

2 次 曲 線

a, b, c, f, g, h は実数で, a, b, h のうち少なくとも 1 つは 0 ではないとき, 2 次方程式

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

が, xy 平面上で表す図形を **2 次曲線** という。

この方程式の係数に色々な値を代入することで得られる曲線は, おもに以下の 3 つに分類されることが知られている。

① 放物線

② 楕円

③ 双曲線

ここでは, この 3 つの曲線の性質を, 様々な観点から調べていく。

§ 1 放物線

今までも何度も扱っている通り, 2 次関数のグラフは放物線であるが, ここでは 2 次曲線という観点からあらためて定義しておく。

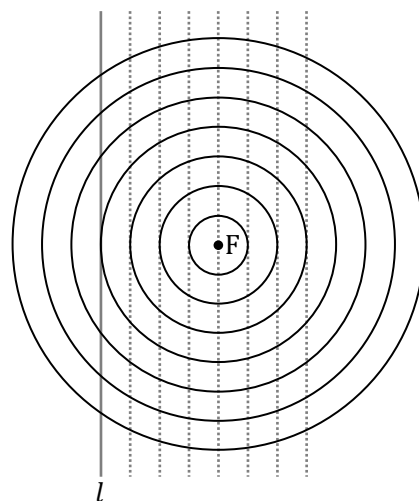
【放物線の定義】

定点 F と, それを通らない定直線 l との距離が等しい点の軌跡を**放物線**といい, 定点 F を放物線の**焦点**, 定直線 l を放物線の**準線**という。

概形を確認しよう!!

焦点 F と準線 l を右図のように定める。

そして, 焦点 F 中心で半径 1, 2, 3, ... の円と, 準線 l との距離が 1, 2, 3, ... である直線を描く。このとき, F と l から距離の等しい点をプロットしてみよう。



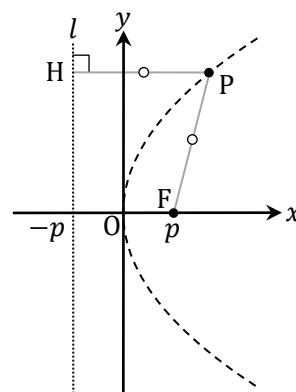
○ 放物線の方程式

焦点 $F(p, 0)$, 準線 l を $x = -p$ とし, 放物線上の任意の点を $P(x, y)$ とする。点 P から準線 l に下ろした垂線の足を H とすると, $PF^2 = PH^2$ より,

$$\begin{aligned} (x-p)^2 + y^2 &= (x+p)^2 &\Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2 \\ &&\Leftrightarrow y^2 &= 4px \end{aligned}$$

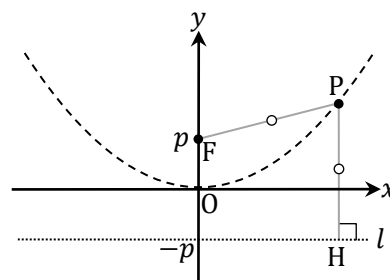
これが放物線の方程式で, この形を**標準形**という。

また, 原点 O を放物線の**頂点**, x 軸を放物線の**軸**という。



焦点が y 軸上にある場合

焦点 $F(0, p)$, 準線 $l: y = -p$ の放物線の場合は, 今求めた式の x, y を入れ替えばよいので, $x^2 = 4py$ と表せる。

**放物線の方程式(標準形)**

焦点 $F(p, 0)$, 準線 l が $x = -p$ である放物線の方程式は

$$y^2 = 4px$$

焦点 $F(0, p)$, 準線 l が $y = -p$ である放物線の方程式は

$$x^2 = 4py$$

例 1 次の放物線の焦点, 準線を求めなさい。

(1) $y^2 = 8x$

(2) $y = -2x^2$

(3) $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$

(1) $y^2 = 4 \cdot 2 \cdot x$ より,

焦点 $(2, 0)$, 準線 $x = -2$

$$\begin{aligned} y^2 &= 4 \cdot \overbrace{2}^p \cdot x \\ y^2 &= 4 \cdot \overbrace{2}^p \cdot x \end{aligned}$$

(2) $y = -2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)y$

$y = -2x^2$ は焦点 $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$, 準線 $y = \frac{1}{8}$ の放物線である。

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \cdot \overbrace{-\frac{1}{8}}^p \cdot y \\ x^2 &= 4 \cdot \overbrace{-\frac{1}{8}}^p \cdot y \end{aligned}$$

(3) $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow (y - 3)^2 - 9 - 4x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (y - 3)^2 = 4(x + 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

これは, 放物線 $y^2 = 4x \quad \cdots \textcircled{2}$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に 3 平行移動したグラフ。

放物線②は頂点 $(0, 0)$, 焦点 $(1, 0)$, 準線 $x = -1$ の放物線。

よって, 放物線①は頂点 $(-1, 3)$, 焦点 $(0, 3)$, 準線 $x = -2$ となる。

$$\begin{aligned} &y = f(x) \text{ を } x \text{ 軸方向に } a, \\ &y \text{ 軸方向に } b \text{ 平行移動した} \\ &\text{グラフは} \\ &y - b = f(x - a) \end{aligned}$$

例題 1 (1) 焦点が点 $(2, 0)$, 準線が直線 $x = -2$ である放物線の方程式を求めなさい。

また, その概形をかきなさい。

(2) 次の放物線の焦点と準線を求め, その概形をかきなさい。

(ア) $y^2 = -3x$

(イ) $y = 2x^2$

(ウ) $2y^2 - 3x + 8y + 10 = 0$

(3) 点 $F(4, 0)$ を通り, 直線 $l: x = -4$ に接する円の中心の軌跡を求めなさい。

練習 1 (1) 放物線 $x^2 = -8y$ の焦点と準線を求め, その概形をかきなさい。

(2) 点 $(3, 0)$ を通り, 直線 $x = -3$ に接する円の中心の軌跡を求めなさい。

(3) 頂点が原点で, 焦点が x 軸上にあり, 点 $(9, -6)$ を通る放物線の方程式を求めなさい。

例題 2 円 $(x - 4)^2 + y^2 = 1$ と直線 $x = -3$ の両方に接する円の中心 P の軌跡を求めなさい。

練習 2 半円 $x^2 + y^2 = 36$, $x \geq 0$ および y 軸の $-6 \leq y \leq 6$ の部分の, 両方に接する円の中心 P の軌跡を求めなさい。

§2 楕円

まずは楕円の定義から。

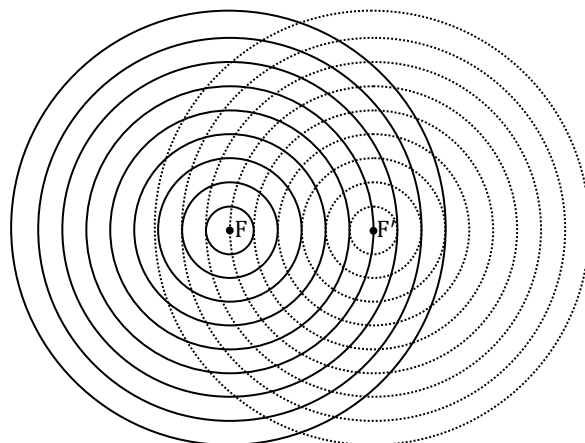
【楕円の定義】

2 定点 F, F' からの距離の和が一定である点の軌跡を**楕円**といい、定点 F, F' を楕円の**焦点**という。

概形を確認しよう!!

焦点 F, F' を右図のように定める。

そして、焦点 F, F' を中心で半径 1, 2, 3, ... の円を描く。このとき、 $PF + PF' = 8$ となるような点 P をプロットしてみよう。



○ 楕円の方程式

焦点 F, F' を $F(c, 0), F'(-c, 0)$ ($c > 0$) とする。

楕円上の任意の点を $P(x, y)$ とし、 $PF + PF' = 2a$... ① とおくと、

$$PF + PF' > FF' \Leftrightarrow 2a > 2c \Leftrightarrow a > c$$

よって、 $0 < c < a$

このとき、

$$\begin{aligned} \text{①} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \dots \text{②} \end{aligned}$$

両辺 2 乗すると、

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \quad \dots \text{③}$$

さらに、両辺 2 乗すると、

$$a^2\{(x+c)^2 + y^2\} = a^4 + c^2x^2 + 2a^2cx \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

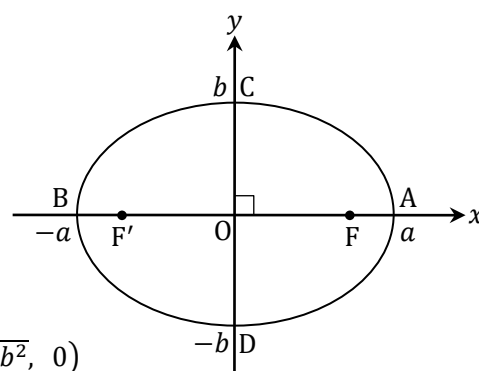
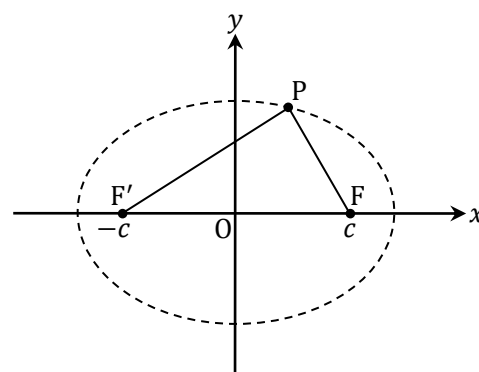
両辺 $a^2(a^2 - c^2) (\neq 0)$ で割ると、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ とおくと、} \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b < a)} \quad \dots \text{④} \text{ となる。}$$

これを楕円の方程式の**標準形**という。

楕円と x 軸、 y 軸との交点を $A(a, 0), B(-a, 0), C(b, 0), D(-b, 0)$ とすると、この 4 点を楕円の**頂点**といい、 AB をこの楕円の**長軸**、 CD を**短軸**という。

また $c^2 = a^2 - b^2$ より、焦点の座標は $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ となる。焦点 F, F' の中点 O を**中心**という。



なお, a, b, c の関係は次のように見ておくと覚えやすい。

今, 右図の点 $C(0, b)$ は,

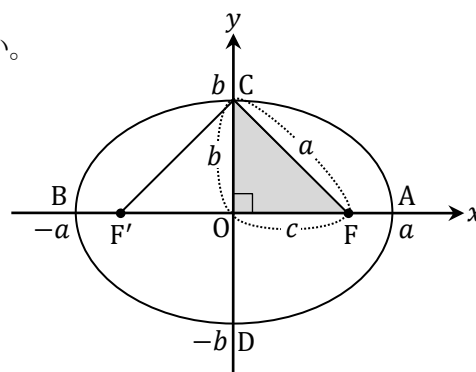
$$FC = F'C, \quad FC + F'C = 2a$$

を満たすので, $FC = F'C = a$ となる。

ここで, $\triangle OCF$ において, 三平方の定理を用いると,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

が成り立っていることが分かる。



さて, ここで1つ問題がある。

④式で楕円の方程式を定めたが, その過程で2回「両辺を2乗」している。

一般的には2乗すると, 必要十分が成り立たないので, ④の軌跡上の点が

すべて①の条件を満たしているかは分からないのである。

つまり現段階では,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{4}$$

となっているということである。

そこで, 最後に①と④が必要十分であることを示しておく。

例えば, 無理関数 $y = \sqrt{x} \dots \textcircled{1}$ の両辺を2乗すると, $y^2 = x \dots \textcircled{2}$ となります。②は放物線全体を表すので, ①を満たす (x, y) は必ず②を満たしますが, その逆は成り立ちません。つまり, 両辺を「2乗する」と, もとの式と異なってしまう可能性があるということです。



④ $\Rightarrow$ ③ について

これは, ③式の左辺が正なので, 右辺 $a^2 + cx$ も正であることが言えればよい。

$$0 < c < a \text{ より, } a^2 + cx > ac + cx = c(a + x)$$

$$-a \leq x \leq a \text{ より, } a + x \geq 0 \text{ となるので, } c(a + x) > 0$$

これより, $a^2 + cx > 0$ となるので, ④ $\Rightarrow$ ③ が成り立つ。

③ $\Rightarrow$ ② について

これも同様に, ②式の左辺が正なので, 右辺 $2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ も正であることが言えればよい。

これは $2a > 0$, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} > 0$ であることから, $(2a)^2 - \left\{ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right\}^2 > 0$ が言えればよい。

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} 4a^2 - \{(x+c)^2 + y^2\} &\geq 4a^2 - \{(a+c)^2 + b^2\} \\ &= 4a^2 - (a^2 + 2ac + c^2 + b^2) \\ &= 4a^2 - (2a^2 + 2ac) \quad (\because c^2 + b^2 = a^2) \\ &= 2a(a - c) > 0 \quad (\because 0 < c < a) \end{aligned}$$

これより, $2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} > 0$ となるので, ③ $\Rightarrow$ ② が成り立つ。

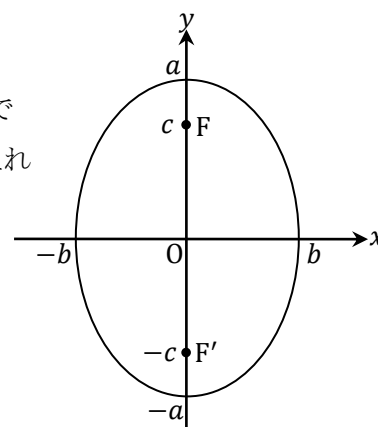
以上より, ① $\Leftrightarrow$ ④ となっていることがわかる。

焦点が y 軸上にある場合

焦点が $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ ($c > 0$) であり, 楕円上の各点から F , F' までの距離の和が $2a$ である楕円の方程式は, 今求めた式の x と y をを入れ替えばよいので,

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

となる。ただし, a, b は $0 < b < a$ を満たし, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ である。



以上のことをまとめると次のようになる。

楕円の方程式(標準形)

方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は楕円を表し, 楕円上の任意の点を P とすると,

	$a > b$ のとき	$a < b$ のとき
焦点	$F(c, 0), F'(-c, 0)$ ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$)	$F(0, c), F'(0, -c)$ ($c = \sqrt{b^2 - a^2}$)
$FP + FP'$	$2a$	$2b$
長軸の長さ	$2a$	$2b$
短軸の長さ	$2b$	$2a$

例 2 次の楕円の長軸・短軸の長さ, 焦点を求めなさい。また, その概形をかきなさい。

(1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) $4x^2 + 3y^2 = 12$

(3) $8x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 3 = 0$

(1) $\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ より,

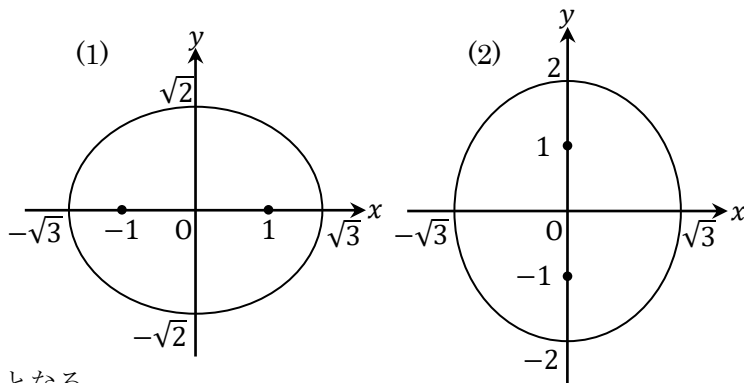
長軸の長さ $2\sqrt{3}$, 短軸の長さ $2\sqrt{2}$

焦点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$

(2) $4x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

長軸の長さは 4, 短軸の長さは $2\sqrt{3}$,

焦点の座標が $(0, 1)$, $(0, -1)$ の楕円となる。



$$(3) \quad 8x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}(y + 1)^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1$$

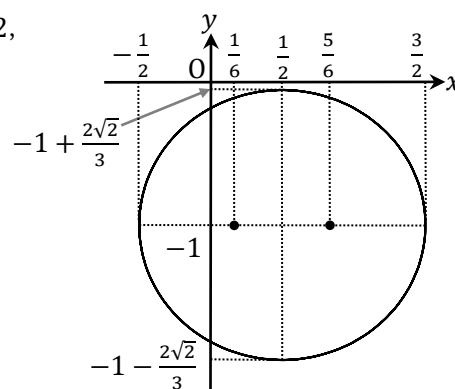
これは、楕円 $x^2 + \frac{9}{8}y^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$ を x 軸方向に $\frac{1}{2}$, y 軸方向に -1

平行移動したグラフ。楕円②は中心 $(0, 0)$, 長軸の長さが 2 ,

短軸の長さ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 焦点 $\left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ 。

よって、楕円①は中心 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, 長軸の長さ 2 ,

短軸の長さ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 焦点が $\left(\frac{5}{6}, -1\right), \left(\frac{1}{6}, -1\right)$ となる。



例題 3 次の楕円の長軸・短軸の長さ, 焦点を求めなさい。また, その概形をかきなさい。

$$(1) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (2) \quad 25x^2 + 16y^2 = 400 \quad (3) \quad 4x^2 + 25y^2 + 16x - 150y + 141 = 0$$

練習 3 次の楕円の長軸・短軸の長さ, 焦点を求めなさい。また, その概形をかきなさい。

$$(1) \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{18} = 1 \quad (2) \quad 56x^2 + 49y^2 = 784 \quad (3) \quad x^2 + 4y^2 + 4x - 24y + 36 = 0$$

例題 4 焦点が $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$ で点 $A(-4, 0)$ を通る楕円の方程式を求めなさい。

練習 4 次のような楕円の方程式を求めなさい。

- (1) 2 点 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ を焦点とし, この 2 点からの距離の和が 6
- (2) 楕円 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ と焦点が一致し, 短軸の長さが 4
- (3) 長軸が x 軸上, 短軸が y 軸上にあり, 2 点 $(-2, 0)$, $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る。

例題 5 長さ 2 の線分の両端 A , B がそれぞれ x 軸および y 軸上を移動するとする。線分 AB の延長上に $BP = 1$ となるように点 P をとるとき, 点 P の軌跡を求めなさい。

練習 5 x 軸上の動点 $P(a, 0)$, y 軸上の動点 $Q(0, b)$ が $PQ = 1$ を満たしながら動くとき, 線分 PQ を $1:2$ に内分する点 T の軌跡の方程式を求め, その概形を図示しなさい。

○ 円と楕円の関係

円 $x^2 + y^2 = a^2$ を x 軸を中心として、 $\frac{b}{a}$ 倍した図形が

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ となる。実際、 x 軸を中心として $\frac{b}{a}$ 倍するには、

$y \rightarrow \frac{a}{b}y$ という変換を行えばいいので、

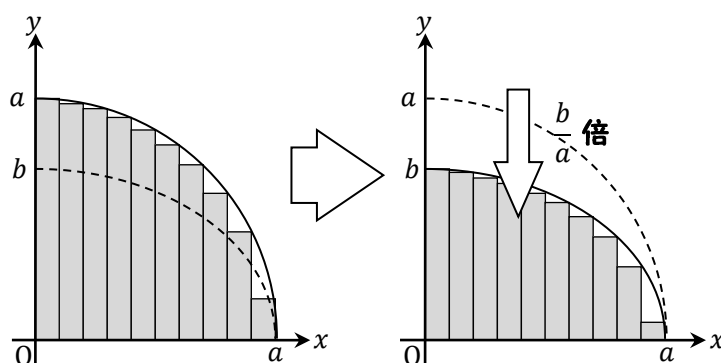
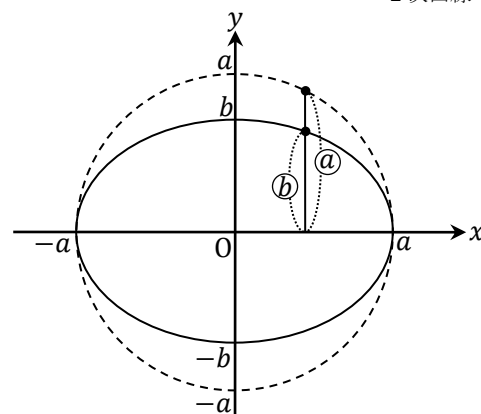
$$x^2 + \left(\frac{a}{b}y\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

となり、確かに楕円になることが分かる。

また、楕円の面積 S は円の面積を $\frac{b}{a}$ 倍すればよく、

$$S = \pi a^2 \times \frac{b}{a} = \boxed{\pi ab}$$

となる。これは円の面積を微小長方形の和ととらえると分かるだろう。



例題 6 円 $x^2 + y^2 = 25$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{3}{5}$ 倍に縮小すると、どのような曲線になりますか。

練習 6 円 $x^2 + y^2 = 9$ を次のように拡大または縮小した楕円の方程式と焦点を求めなさい。

(1) x 軸をもとにして、 y 軸方向に 3 倍に拡大

(2) y 軸をもとにして、 x 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍に縮小

§ 3 双曲線

まずは双曲線の定義から。

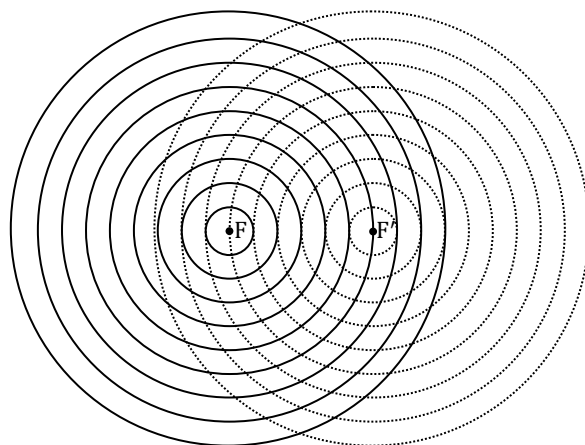
【双曲線の定義】

2 定点 F, F' からの距離の差が一定である点の軌跡を**双曲線**といい、
定点 F, F' を双曲線の**焦点**という。

概形を確認しよう!!

焦点 F, F' を右図のように定める。

そして、焦点 F, F' を中心で半径 1, 2, 3, ... の
円を描く。このとき、 $|PF - PF'| = 2$ となるような
点 P をプロットしてみよう。



○ 双曲線の方程式

焦点 F, F' を $F(c, 0), F'(-c, 0)$ ($c > 0$) とする。

双曲線上の任意の点を $P(x, y)$ とし、 $|PF - PF'| = 2a$... ① とおくと、

$$|PF - PF'| < FF' \Leftrightarrow 2a < 2c \Leftrightarrow a < c$$

よって、 $0 < a < c$

$PF - PF' = \pm 2a$ より、

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

両辺 2 乗すると、

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow \mp 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \quad \dots ② \end{aligned}$$

さらに、両辺 2 乗すると、

$$a^2\{(x+c)^2 + y^2\} = a^4 + c^2x^2 + 2a^2cx \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad \dots ③$$

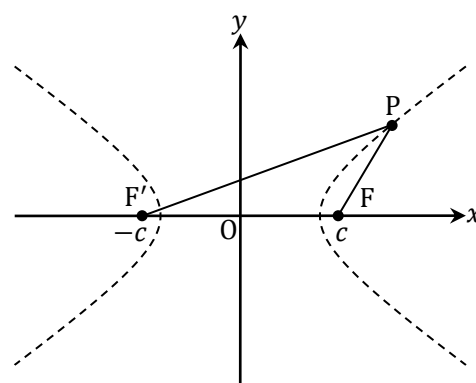
$$a^2(a^2 - c^2) \neq 0 \text{ より, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$c^2 - a^2 = b^2 \text{ とおくと, } \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \dots ④$$

となり、これを双曲線の方程式の**標準形**という。

双曲線と x 軸との交点を A, B とすると、この 2 点を双曲線の**頂点**といい、
 $A(a, 0), B(-a, 0)$ である。

また $c^2 = a^2 + b^2$ より、焦点の座標は $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$
となる。焦点 F, F' の中点 O を**中心**という。



これも楕円のときと同様に、
「両辺を 2 乗」しているのに、
①⇔④となっているとは限り
ません。各自で必要十分であ
ることを示してみてください。



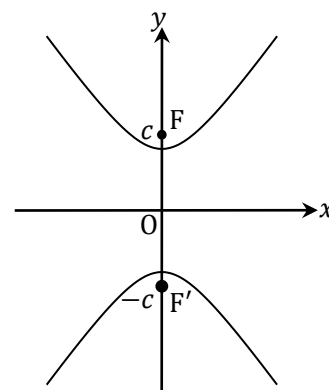
焦点が y 軸上にある場合

焦点が $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ ($c > 0$) であり, 双曲線上の各点から F , F' までの距離の差が $2a$ である楕円の方程式は, 今求めた式の x , y を入れ替えればよいので,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$$

となる。ただし, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。

以上のことをまとめると次のようになる。

**● 双曲線の方程式(標準形) ●**

焦点が F , F' , 双曲線上の任意の点を P とすると, 双曲線の方程式は以下のようになる。

- ① $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ で, $|PF - PF'| = 2a$ のとき

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- ② $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ で, $|PF - PF'| = 2b$ のとき

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

ただし, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。

○ 双曲線の漸近線

双曲線の方程式を変形すると,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{\pm 1}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} \cdots (*)$$

ここで, $x \rightarrow \infty$ ($-\infty$), $y \rightarrow \infty$ ($-\infty$) とすると, (*) の右辺は限りなく 0 に近づく。

これはつまり, 直線 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ が双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ の漸近線であることを表している。

同様に, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$ と考えることで, 直線 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ も漸近線である。

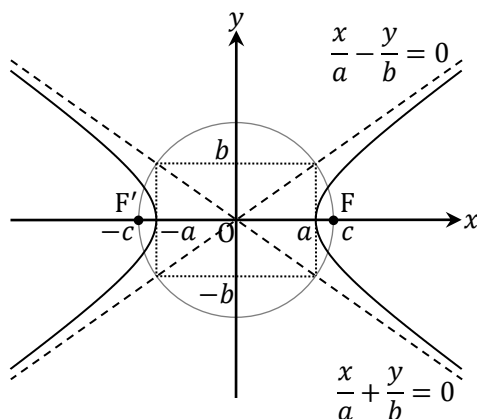
● 双曲線の漸近線 ●

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ の漸近線の方程式は

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

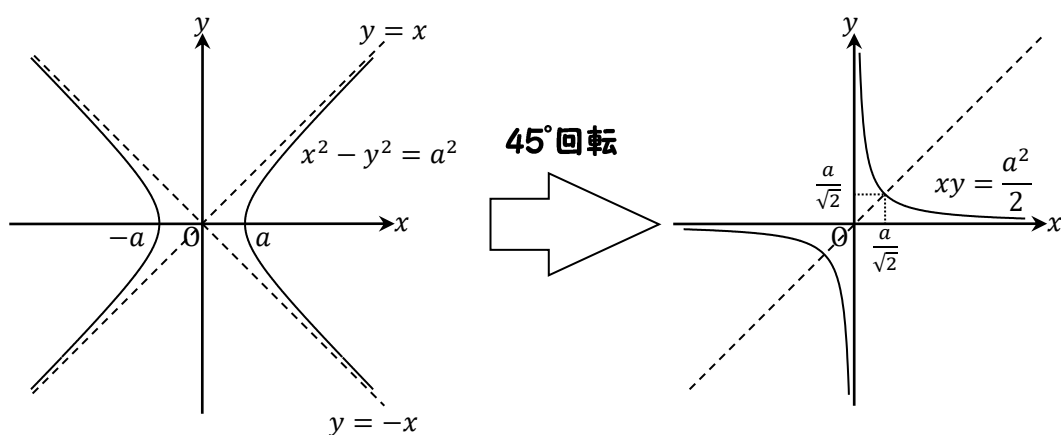
となる。

この漸近線上に, 4点 (a, b) , $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$ があり, さらに $c^2 = a^2 + b^2$ より, この4点と焦点 F, F' はすべて円 $x^2 + y^2 = c^2$ 上にあることが分かる。このように考えると, 3つの値 a, b, c の関係がとらえやすくなる。



また, 2つの漸近線が直角に交わる双曲線を**直角双曲線**という。

これは, 漸近線が $y = \pm x$ となることを意味しているので, 直角双曲線の方程式は $x^2 - y^2 = a^2$ という形で与えられる。直角双曲線を 45° 回転させると, $xy = b$ という式になり, 中学時代に学んだ反比例の式が出てくる。各自確認してみましょう。



例 3 次の双曲線の頂点と焦点, および漸近線を求めなさい。また, その概形をかきなさい。

(1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$

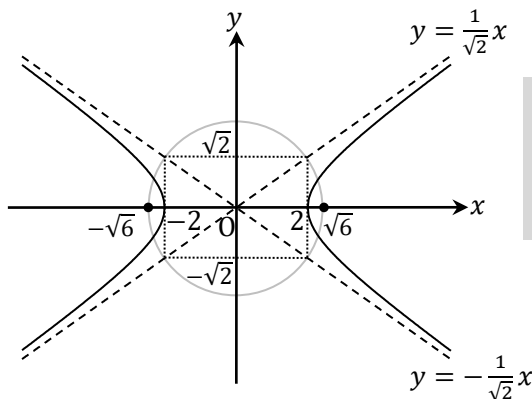
(2) $\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y+1)^2}{4} = -1$

(1) $\frac{x^2}{(2)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ より,

頂点 $(2, 0), (-2, 0)$

焦点 $(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$

漸近線 $\frac{x}{2} \pm \frac{y}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}x$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

頂点 $(\pm a, 0)$
 焦点 $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$
 漸近線 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

(2) $\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y+1)^2}{4} = -1 \quad \dots \textcircled{1}$

これは, 双曲線 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1 \quad \dots \textcircled{2}$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 平行移動したグラフ。

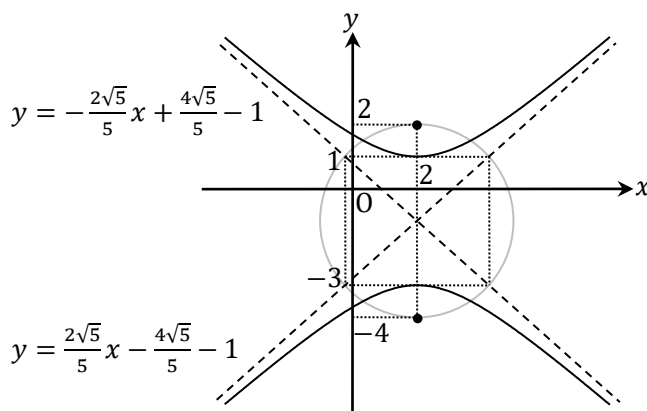
双曲線 $\textcircled{2}$ は頂点 $(0, 2), (0, -2)$, 焦点 $(0, 3), (0, -3)$

漸近線 $\frac{x}{\sqrt{5}} \pm \frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$

よって, 双曲線 $\textcircled{1}$ は頂点 $(2, 1), (2, -3)$, 焦点 $(2, 2), (2, -4)$

漸近線 $y+1 = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}(x-2) \Leftrightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x \mp \frac{4\sqrt{5}}{5} - 1$ (復号同順)

となる。



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

頂点 $(0, \pm b)$
 焦点 $(0, \pm\sqrt{a^2+b^2})$
 漸近線 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

例題 7 次の双曲線の焦点と漸近線を求めなさい。また, その概形をかきなさい。

(1) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $9y^2 - 25x^2 = -225$

(3) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$

練習 7 次の双曲線の焦点と漸近線を求めなさい。また, その概形をかきなさい。

(1) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$

(2) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

(3) $2x^2 - y^2 + 8x + 2y + 11 = 0$

例題 8 次のような双曲線の方程式を求めなさい。

- (1) 2 点 $(5, 0)$, $(-5, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の差が 8 である。
 (2) 焦点が 2 点 $(0, 4)$, $(0, -4)$ で、漸近線が直線 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$ である。

練習 8 次のような双曲線の方程式を求めなさい。

- (1) 2 点 $(4, 0)$, $(-4, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の差が 6
 (2) 漸近線が直線 $y = \pm 2x$ で、点 $(3, 0)$ を通る。
 (3) 中心が原点で、漸近線が直交し、焦点の 1 つが点 $(3, 0)$

例題 9 放物線 $y^2 = 6x$ 上の点 P と、定点 $A(a, 0)$ の距離の最小値を求めなさい。ただし、 a は実数の定数とする。

練習 9 (1) 双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 P と点 $A(0, 2)$ の距離を最小にする P の座標とそのときの距離を求めなさい。

(2) 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点 P と点 $A(a, 0)$ の距離の最小値を求めなさい。ただし、 a は実数の定数とする。

例題 10 (1) 点 $P(X, Y)$ を、原点を中心として角 θ だけ回転した点を $Q(x, y)$ とするとき、 X, Y を x, y, θ で表しなさい。

(2) 曲線 $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$ を、原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転移動した曲線の方程式を求めなさい。

練習 10 曲線 $C: x^2 + 6xy + y^2 = 4$ を、原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる曲線の方程式を求めることにより、曲線 C が双曲線であることを示しなさい。

§ 4 2 次曲線と直線

○ 2 次曲線と直線の位置関係

2 次曲線 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ と、直線 $y = mx + n$ の位置関係は、2 式から y を消去してできる x の 2 次方程式の解の個数で分類することができる。つまり、判別式を D とすると、

・ $D > 0$ のとき、異なる 2 点で交わる ・ $D = 0$ のとき、接する ・ $D < 0$ のとき、共有点なし

となる。

例 4 楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ と直線 $y = x + k$ が共有点を持つような k の値の範囲を求めなさい。

解①

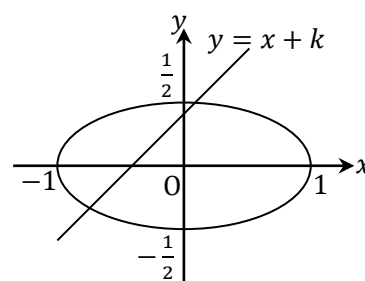
2 式から y を消去すると、

$$x^2 + 4(x + k)^2 = 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 8kx + 4k^2 - 1 = 0$$

この方程式が解を持つ条件を考えればよいので、

判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D/4 \geq 0 &\Leftrightarrow 16k^2 - 5(4k^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -4k^2 + 5 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$



次に楕円を円に変換して考えてみます。

解②

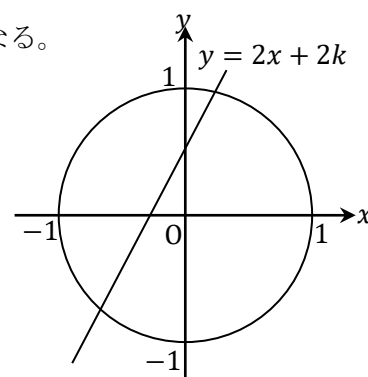
楕円と直線を x 軸を中心として、2 倍に拡大すると、

楕円は $x^2 + y^2 = 1$ となり、直線は $\frac{1}{2}y = x + k \Leftrightarrow y = 2x + 2k$ となる。

つまり、円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = 2x + 2k$ が共有点を持つ条件を求めればよい。

これは点 O と直線 $y = 2x + 2k$ の距離が 1 以下ならばよいので、

$$\begin{aligned} \frac{|2k|}{\sqrt{4+1}} \leq 1 &\Leftrightarrow |2k| \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq 2k \leq \sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$



例題 11 次の 2 次曲線と直線は共有点を持ちますか。共有点をもつ場合には、その点の座標を求めなさい。

(1) $4x^2 + 9y^2 = 36, 2x + 3y = 6$

(2) $9x^2 - 4y^2 = 36, 2x - y = 1$

練習 11 次の 2 次曲線と直線は共有点を持ちますか。共有点をもつ場合には、交点・接点の別とその点の座標を求めなさい。

(1) $4x^2 - y^2 = 4, 2x - 3y + 2 = 0$

(2) $y^2 = -4x, y = 2x - 3$

(3) $3x^2 + y^2 = 12, x + 2y = 2\sqrt{13}$

例題 12 次の曲線と直線の共有点の個数を求めなさい。ただし、 k, m は定数とする。

(1) $x^2 + 4y^2 = 20, y = x + k$

(2) $4x^2 - y^2 = 4, y = mx$

練習 12 (1) 楕円 $x^2 + 4y^2 = 3$ と直線 $y = x + a$ が共有点をもつような定数 a の値の範囲を求めなさい。

(2) m を定数とする。放物線 $y^2 = -8x$ と直線 $x + my = 2$ の共有点の個数を求めなさい。

例題 13 直線 $y = 4x + 1$ と楕円 $4x^2 + y^2 = 4$ が交わってできる弦の中点の座標、および長さを求めなさい。

練習 13 次の直線と曲線が交わってできる弦の中点の座標と長さを求めなさい。

(1) $y = 3 - 2x, x^2 + 4y^2 = 4$

(2) $x + 2y = 3, x^2 - y^2 = -1$

例題 14 双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ と直線 $y = -x + k$ が異なる 2 点 P, Q で交わる時、

(1) 定数 k のとりうる値の範囲を求めなさい。

(2) (1)の範囲で k を動かしたとき、線分 PQ の中点 M の軌跡を求めなさい。

練習 14 (1) 楕円 $(x - 4)^2 + 4(y - 3)^2 = 4$ と直線 $y = mx$ が異なる 2 点 P, Q で交わるような、定数 m の値の範囲を求めなさい。

(2) (1)の楕円と直線が異なる 2 点で交わる時、線分 PQ の中点はある楕円の上を動く。その楕円の方程式を求めなさい。

例題 15 放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) の焦点 F を通る直線と放物線の交点を P, Q とするとき、線分 PQ が点 F で 1 : 2 に内分されるように直線 PQ の傾きを定めなさい。

練習 15 放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) の弦 PQ の両端と頂点 O を通る線分 PO, QO が直交するならば、弦 PQ は定点を通過することを証明しなさい。

例題 16 楕円 $x^2 + 2y^2 = 1$ と放物線 $4y = 2x^2 + a$ が異なる 4 点で交わるための、定数 a の値の範囲を求めなさい。

練習 10 2 つの曲線 $C_1 : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ と $C_2 : x^2 - y^2 = k$ が少なくとも 3 点を共有するのは、正の定数 k がどんな値の範囲にあるときですか。

例題 17 楕円上にあって長軸、短軸上にない点 P と短軸の両軸を結ぶ 2 つの直線が、長軸またはその延長と交わる点をそれぞれ Q , R とする。楕円の中心を O とすると、線分 OQ , OR の長さの積は一定であることを証明しなさい。

練習 17 双曲線上の任意の点 P から 2 つの漸近線に垂線 PQ , PR を下ろすと、線分の長さの積 $PQ \cdot PR$ は一定であることを証明しなさい。

○ 2 次曲線の接線

① 放物線の接線

放物線 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$) 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式を考える。

判別式を用いる

(i) $P = O$ のとき、接線の方程式は $x = 0$

(ii) $P \neq O$ のとき、接線は y 軸と平行にならないので、接線の方程式は

$x = m(y - y_1) + x_1$ とおける。これより、 x を消去すると、

$$y^2 = 4pm(y - y_1) + 4px_1 \Leftrightarrow y^2 - 4pmy + 4pm y_1 - 4px_1 = 0$$

判別式を D とすると、

$$D/4 = 0 \Leftrightarrow 4p^2m^2 - 4py_1m + 4px_1 = 0$$

$$y_1^2 = 4px_1 \text{ より, } 4p^2m^2 - 4py_1m + y_1^2 = 0 \Leftrightarrow (2pm - y_1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{y_1}{2p}$$

$$\text{これより, 接線の方程式は, } x = \frac{y_1}{2p}(y - y_1) + x_1 \Leftrightarrow 2px = y_1y - y_1^2 + 2px_1$$

$$y_1^2 = 4px_1 \text{ より, } 2px = y_1y - 4px_1 + 2px_1 \Leftrightarrow y_1y = 2p(x + x_1)$$

(i), (ii) より、接線の方程式は、 $y_1y = 2p(x + x_1)$

微分を用いる

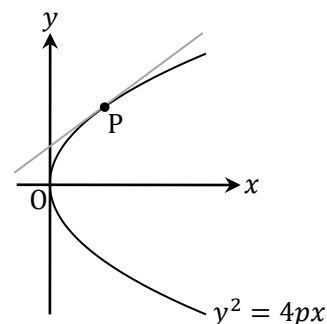
(i) $P = O$ のとき、接線の方程式は $x = 0$

(ii) $P \neq O$ のとき

$$\text{両辺を } x \text{ で微分すると, } 2yy' = 4p \Leftrightarrow y' = \frac{2p}{y}$$

$$\text{よって, } P(x_1, y_1) \text{ における接線の傾きは, } \frac{2p}{y_1}$$

$$\text{これより, 接線の方程式は, } y = \frac{2p}{y_1}(x - x_1) + y_1 \quad (\text{以下略})$$



◆ 放物線の接線の方程式 ◆

放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1y = 2p(x + x_1)$$

② 楕円の接線

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式を考える。

判別式を用いる

- (i) P が $(\pm a, 0)$ と一致するとき、接線の方程式は $x = \pm a$
 (ii) P が (i) 以外の点のとき、接線は y 軸と平行にならないので、
 接線の方程式は $y = m(x - x_1) + y_1$ とおける。

これより、 y を消去すると、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\{m(x - x_1) + y_1\}^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2m(y_1 - mx_1)x + a^2(y_1 - mx_1)^2 - a^2b^2 = 0$$

判別式を D とすると、

$$D/4 = 0 \Leftrightarrow a^4m^2(y_1 - mx_1)^2 - (a^2m^2 + b^2)\{a^2(y_1 - mx_1)^2 - a^2b^2\} = 0$$

$$a^2 \neq 0 \text{ より, } a^2m^2(y_1 - mx_1)^2 - (a^2m^2 + b^2)\{(y_1 - mx_1)^2 - b^2\} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2m^2(y_1 - mx_1)^2 - (a^2m^2 + b^2)(y_1 - mx_1)^2 + b^2(a^2m^2 + b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^2(y_1 - mx_1)^2 + b^2(a^2m^2 + b^2) = 0$$

$$b^2 \neq 0 \text{ より, } -(y_1 - mx_1)^2 + a^2m^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - x_1^2)m^2 + 2x_1y_1m + b^2 - y_1^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ より, } a^2 - x_1^2 = \frac{a^2y_1^2}{b^2}, \quad b^2 - y_1^2 = \frac{b^2x_1^2}{a^2}$$

$$\text{よって, } (*) \Leftrightarrow \frac{a^2y_1^2}{b^2}m^2 + 2x_1y_1m + \frac{b^2x_1^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow (a^2y_1m + b^2x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$$\text{これより, 接線の方程式は, } y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) + y_1 \Leftrightarrow \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ より, } \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

(i), (ii) より、接線の方程式は、 $\boxed{\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1}$

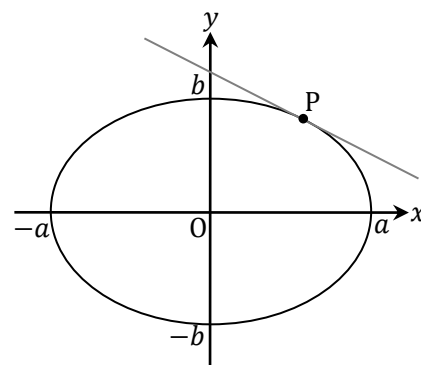
微分を用いる

- (i) P が $(\pm a, 0)$ と一致するとき、接線の方程式は $x = \pm a$
 (ii) P が (i) 以外の点のとき

$$\text{両辺を } x \text{ で微分すると, } \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\text{よって, } P(x_1, y_1) \text{ における接線の傾きは, } -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$$\text{これより, 接線の方程式は, } y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) + y_1 \quad (\text{以下略})$$



円の接線を用いる

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を x 軸を中心にして, y 軸方向に $\frac{a}{b}$ 倍すると,
 円 $x^2 + y^2 = a^2$... ① になる。

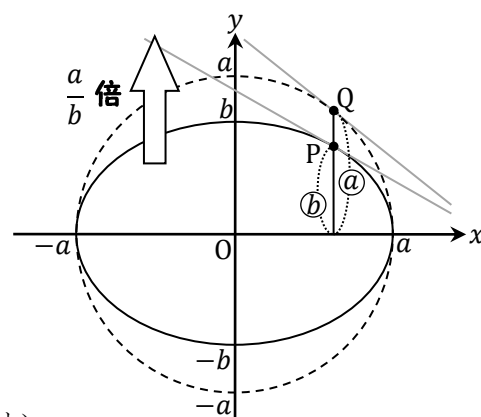
このとき, 接点 $P(x_1, y_1)$ は円(*)上の点 $Q(x_1, \frac{a}{b}y_1)$ に移る。

円(*)の点 Q における接線の方程式は, $x_1x + \frac{a}{b}y_1y = a^2$... ②

求める接線は直線②を x 軸を中心にして, y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍すればよい。

これは②式を, $y \rightarrow \frac{a}{b}y$ と変換すればよいので,

$$x_1x + \frac{a}{b}y_1 \cdot \frac{a}{b}y = a^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1}$$



円 $x^2 + y^2 = r^2$ の点 (x_1, y_1)
 における接線の方程式は
 $x_1x + y_1y = r^2$

楕円の接線の方程式

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

③ 双曲線の接線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式を考える。

判別式を用いる

(i) P が $(\pm a, 0)$ と一致するとき、接線の方程式は $x = \pm a$

(ii) P が (i) 以外の点のとき、接線は y 軸と平行にならないので、

接線の方程式は $y = m(x - x_1) + y_1$ とおける。

これより、 y を消去すると、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\{m(x - x_1) + y_1\}^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2m(y_1 - mx_1)x + a^2(y_1 - mx_1)^2 + a^2b^2 = 0$$

判別式を D とすると、

$$D/4 = 0 \Leftrightarrow a^4m^2(y_1 - mx_1)^2 - (a^2m^2 - b^2)\{a^2(y_1 - mx_1)^2 + a^2b^2\} = 0$$

$$a^2 \neq 0 \text{ より, } a^2m^2(y_1 - mx_1)^2 - (a^2m^2 - b^2)\{(y_1 - mx_1)^2 + b^2\} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2m^2(y_1 - mx_1)^2 - (a^2m^2 - b^2)(y_1 - mx_1)^2 - b^2(a^2m^2 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2(y_1 - mx_1)^2 - b^2(a^2m^2 - b^2) = 0$$

$$b^2 \neq 0 \text{ より, } (y_1 - mx_1)^2 - a^2m^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + y_1^2 + b^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ より, } x_1^2 - a^2 = \frac{a^2y_1^2}{b^2}, \quad y_1^2 + b^2 = \frac{b^2x_1^2}{a^2}$$

$$\text{よって, } (*) \Leftrightarrow \frac{a^2y_1^2}{b^2}m^2 - 2x_1y_1m + \frac{b^2x_1^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow (a^2y_1m - b^2x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$$\text{これより, 接線の方程式は, } y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) + y_1 \Leftrightarrow \frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ より, } \frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

(i), (ii) より、接線の方程式は、 $\boxed{\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1}$

微分を用いる

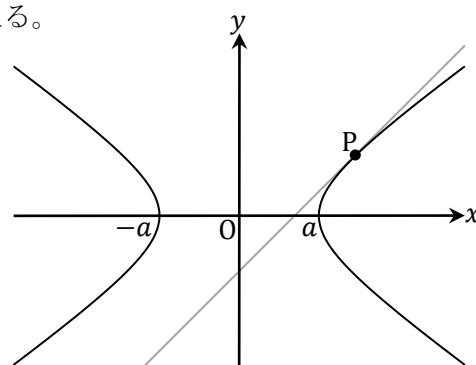
(i) P が $(\pm a, 0)$ と一致するとき、接線の方程式は $x = \pm a$

(ii) P が (i) 以外の点のとき

$$\text{両辺を } x \text{ で微分すると, } \frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\text{よって, } P(x_1, y_1) \text{ における接線の傾きは, } \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$$\text{これより, 接線の方程式は, } y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) + y_1 \quad (\text{以下略})$$



● 双曲線の接線の方程式 ●

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

放物線，楕円，双曲線の接線の方程式をそれぞれ求めたが，この 3 つの接線には 1 つの共通した特徴がある。それはすべて， $x^2 \rightarrow x \times x$ ， $y^2 \rightarrow y \times y$ ， $2x \rightarrow x + x$ ， $2y \rightarrow y + y$ とみて，**片方の x ， y に接点の座標を代入すればよい** ということである。この特徴をとらえておけば，接線の方程式を覚えるのは楽になる。

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{片方の } x, y \text{ に接点} & \\
 & (x_1, y_1) \text{ の座標を代入} & \\
 \begin{array}{l} y^2 = 4px \\ \downarrow \\ \textcircled{y} \times y = 2p(\textcircled{x} + \textcircled{x}) \\ \downarrow \\ y_1 y = 2p(x + x_1) \end{array} & \leftarrow \text{接線の方程式完成!} \Rightarrow & \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \downarrow \\ \frac{\textcircled{x} \times \textcircled{x}}{a^2} \pm \frac{\textcircled{y} \times \textcircled{y}}{b^2} = 1 \\ \downarrow \\ \frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \end{array}
 \end{array}$$

一般的に 2 次曲線 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$ax_1 x + h(x_1 y + y_1 x) + by_1 y + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

となる。微分を用いれば，比較的簡単に示すことができますので，挑戦してみましょう。

例題 18 点 $A(-1, 3)$ から楕円 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ に引いた接線の方程式を求めなさい。

練習 18 次の 2 次曲線の，与えられた点から引いた接線の方程式を求めなさい。

(ア) $x^2 - 4y^2 = 4$ ，点 $(2, 3)$

(イ) $y^2 = 8x$ ，点 $(3, 5)$

例題 19 放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線と x 軸との交点を T ，放物線の焦点を F とすると， $\angle PTF = \angle TPF$ であることを証明しなさい。ただし， $x_1 > 0$ ， $y_1 > 0$ とする。

練習 19 双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線は，点 P と 2 つの焦点 F, F' とを結んでできる $\angle FPF'$ を 2 等分することを証明しなさい。ただし， $x_1 > 0$ ， $y_1 > 0$ とする。

例題 20 双曲線 $x^2 - 4y^2 = 4$ 上の点 (a, b) における接線の傾きが m のとき、次の問いに答えなさい。ただし、 $b \neq 0$ とする。

- (1) a, b, m の間の関係式を求めなさい。
- (2) この曲線上の点と直線 $y = 2x$ の間の距離 d とする。 d の最小値を求めなさい。また、 d の最小値を与える曲線上の点の座標を求めなさい。

練習 20 楕円 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ と 2 定点 $A(0, -1), P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ がある。楕円 C 上を動く点 Q に対し、 $\triangle APQ$ の面積が最大となるとき、点 Q の座標および $\triangle APQ$ の面積を求めなさい。

例題 21 楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ について、楕円の外部の点 $P(a, b)$ から、この楕円に引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めなさい。

練習 21 a は正の定数とする。点 $(1, a)$ を通り、双曲線 $x^2 - 4y^2 = 2$ に接する 2 本の直線が直交するとき、 a の値を求めなさい。

例題 22 楕円 $Ax^2 + By^2 = 1$ に、この楕円の外部にある点 $P(x_0, y_0)$ から引いた 2 本の接線の 2 つの接点を Q, R とする。次のことを示しなさい。

- (1) 直線 QR の方程式は $Ax_0x + By_0y = 1$ である。
- (2) 楕円 $Ax^2 + By^2 = 1$ の外部にあつて、直線 QR 上にある点 S からこの楕円に引いた 2 本の接線の 2 つの接点を通る直線 l は、点 P を通る。

練習 22 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の 1 点 $P(x_0, y_0)$ から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた 2 本の接線の両接点を通る直線を l とする。ただし、 $y_0 \neq 0$ とする。

- (1) 直線 l は、方程式 $x_0x + y_0y = 1$ で与えられることを示しなさい。
- (2) 直線 l は、双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ に接することを証明しなさい。

例題 23 実数 x, y が 2 つの不等式 $y \leq x + 1, x^2 + 4y^2 \leq 4$ を満たすとき、 $y - 2x$ の最大値、最小値を求めなさい。

練習 23 実数 x, y が 2 つの不等式 $x^2 + 9y^2 \leq 9, y \geq x$ を満たすとき、 $x + 3y$ の最大値、最小値を求めなさい。

例題 24 連立不等式 $x - 2y + 3 \geq 0$, $2x - y \leq 0$, $x + y \geq 0$ の表す領域を A とする。点 (x, y) が領域 A を動くとき、 $y^2 - 4x$ の最小値と、そのときの x, y の値を求めなさい。

練習 24 連立不等式 $x - 3y + 6 \geq 0$, $x + 2y - 4 \geq 0$, $3x + y - 1 \leq 0$ の表す領域を A とする。点 (x, y) が領域 A を動くとき、 $x^2 - y^2 + 2$ の最大値と、そのときの x, y の値を求めなさい。

§5 離心率

これまでは異なる定義が与えられていた 3 曲線(放物線, 楕円, 双曲線)であったが, 実は

定点(焦点)からの距離と, 定直線(準線)からの距離の比が一定となる点の軌跡…(*)

という定義で**統一的にとらえることができる**。つまり, 焦点を F , 準線を l , 2 次曲線上の任意の点を P , P から l に下ろした垂線の足を H とすると, 定義(*)は定数 e を用いて,

$$\frac{PF}{PH} = e (> 0)$$

と表すことができる。この定数 e のことを**離心率**という。

ちなみに, $e = 1$ のときは, 放物線の定義に他ならない。

よって, ここでは $e \neq 1$ のときを考える。

ここで, $F(p, 0)$, $l: x = -p$, $P(x, y)$ とすると,

$$\frac{PF}{PH} = e \Leftrightarrow PF = ePH \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x+p|$$

両辺正より, 2 乗すると,

$$(x-p)^2 + y^2 = e^2(x+p)^2 \Leftrightarrow (1-e^2)x^2 - 2p(1+e^2)x + p^2(1-e^2) + y^2 = 0$$

$e \neq 1$ より,

$$\begin{aligned} (1-e^2)\left(x - \frac{p(1+e^2)}{1-e^2}\right)^2 - \frac{p^2(1+e^2)^2}{1-e^2} + p^2(1-e^2) + y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{p(1+e^2)}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= \frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2} \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{p(1+e^2)}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{2ep}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{4e^2p^2}{1-e^2}} = 1 \end{aligned}$$

ここで, x 軸方向に $-\frac{p(1+e^2)}{1-e^2}$ 平行移動すると, $\frac{x^2}{\left(\frac{2ep}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{4e^2p^2}{1-e^2}} = 1 \dots \textcircled{1}$ となる。

(i) $0 < e < 1$ のとき

$$1-e^2 > 0 \text{ より, } \frac{2ep}{1-e^2} = a(>0) \dots \textcircled{2}, \frac{2ep}{\sqrt{1-e^2}} = b(>0) \dots \textcircled{3} \text{ とおくことができる。}$$

これより, ①式は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ となり, これは**楕円**を表す。

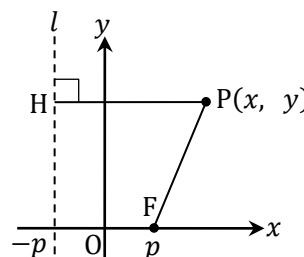
また②, ③より p を消去すると, 離心率は $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ と表すことができる。

(ii) $e > 1$ のとき

$$e^2 - 1 > 0 \text{ より, } \frac{2ep}{e^2 - 1} = a(>0) \dots \textcircled{4}, \frac{2ep}{\sqrt{e^2 - 1}} = b(>0) \dots \textcircled{5} \text{ とおくことができる。}$$

これより, ①式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ となり, これは**双曲線**を表す。

また④, ⑤より p を消去すると, 離心率は $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ と表すことができる。



以上をまとめると次のようになる。

● 離心率と 2 次曲線 ●

定点 F と、 F を通らない定直線 l がある。平面上の動点 P から l に下ろした垂線の足を H とするとき、 $\frac{PF}{PH} = e$ を満たす点 P の軌跡は

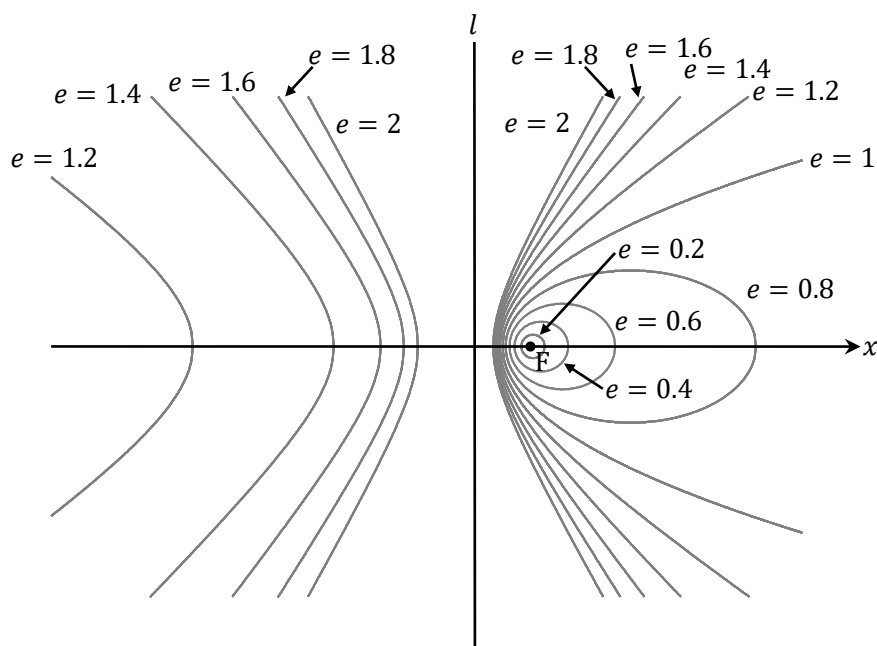
$0 < e < 1$ のとき、楕円

$e = 1$ のとき、放物線

$e > 1$ のとき、双曲線

となる。 F を焦点、 l を準線、 e を離心率という。

また、離心率 e を変化させると、2 次曲線は次のように変化していく。



例題 25 $a > 0$, $a \neq 1$ とする。点 $A(a, 0)$ からの距離と直線 $x = \frac{1}{a}$ からの距離の比が $a : 1$ である点 P の軌跡を求めなさい。

練習 25 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めなさい。

- (1) 点 $F(1, 0)$ と直線 $x = 3$ からの距離の比が $1 : \sqrt{3}$ であるような点 P
- (2) 点 $F(3, 1)$ と直線 $x = \frac{4}{3}$ からの距離の比が $3 : 2$ であるような点 P

§ 6 媒介変数表示

○ 楕円の媒介変数表示

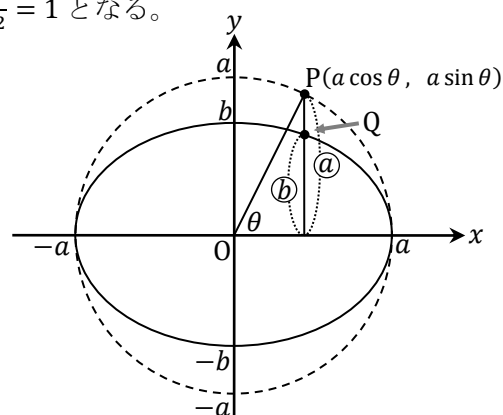
円 $x^2 + y^2 = a^2$ を x 軸を中心として, $\frac{b}{a}$ 倍した図形が楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ となる。

また, 円周上の任意の点を $P(a \cos \theta, a \sin \theta)$ とすると,
楕円周上の任意の点 Q は

$$Q\left(a \cos \theta, a \sin \theta \times \frac{b}{a}\right) \Rightarrow \boxed{Q(a \cos \theta, b \sin \theta)}$$

と表すことができる。つまり, 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \text{ となる。}$$



● 楕円の媒介変数表示 ●

$$\begin{aligned} &\text{楕円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ の媒介変数表示は} \\ &\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \text{【}\theta\text{ の取り方に注意！】} \end{aligned}$$

○ 双曲線の媒介変数表示

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ …① と,

漸近線に平行な直線 $y = -\frac{b}{a}x + t$ …②

の交点を P とする。 t の値を 1 つ決めると, 交点 P も
ただ 1 つに定まるので, 点 P の座標は双曲線①の
媒介変数表示を与える。①, ②より y を消去すると,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \left(-\frac{b}{a}x + t \right)^2 = 1 \Leftrightarrow 2abtx = a^2t^2 + a^2b^2$$

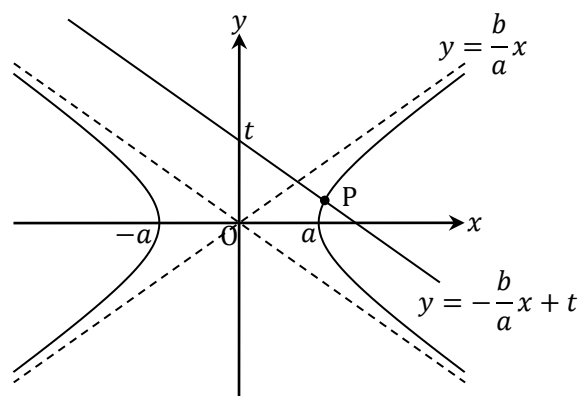
$$2abt \neq 0 \text{ より, } x = \frac{a^2t^2 + a^2b^2}{2abt} = \frac{a}{2} \left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t} \right)$$

$$\text{このとき, } y = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{2} \left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t} \right) + t = \frac{b}{2} \left(\frac{t}{b} - \frac{b}{t} \right)$$

よって, 双曲線①の媒介変数表示は $\boxed{x = \frac{a}{2} \left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t} \right), y = \frac{b}{2} \left(\frac{t}{b} - \frac{b}{t} \right)}$ となる。

ここで, $\frac{t}{b} = \pm e^\theta$ とおくと, 双曲線①の媒介変数表示は $\boxed{x = \pm \frac{a}{2} (e^\theta + e^{-\theta}), y = \pm \frac{b}{2} (e^\theta - e^{-\theta})}$

と表すこともできる。



● 双曲線の媒介変数表示 ●

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left(\frac{t}{b} + \frac{b}{t} \right) \\ y = \frac{b}{2} \left(\frac{t}{b} - \frac{b}{t} \right) \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{a}{2} (e^\theta + e^{-\theta}) \\ y = \pm \frac{b}{2} (e^\theta - e^{-\theta}) \end{cases} \quad (\text{復号同順})$$

例題 26 次の式で表される点 $P(x, y)$ は、どのような曲線を描きますか。

- (1) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin^2 \theta + 1 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = 3 \cos \theta + 2 \\ y = 4 \sin \theta + 1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = 2^t + 2^{-t} \\ y = 2^t - 2^{-t} \end{cases}$

練習 26 t を媒介変数とする。次の式で表される図形はどんな曲線を描きますか。

- (1) $\begin{cases} x = 2\sqrt{t} + 1 \\ y = 4t + 2\sqrt{t} + 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \sin \theta \cos \theta \\ y = 1 - \sin 2\theta \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 6t \end{cases}$
- (4) $\begin{cases} x = 5 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x = \frac{2}{\cos \theta} \\ y = \tan \theta \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x = 3^{t+1} + 3^{-t+1} + 1 \\ y = 3^t - 3^{-t} \end{cases}$

例題 27 (1) 放物線 $y = x^2 - 2(t+1)x + 2t^2 - t$ の頂点は、 t の値が変化するとき、どんな曲線上を動きますか。
 (2) 定円 $x^2 + y^2 = r^2$ の周上を点 $P(x, y)$ が動くとき、座標が $(y - x^2, 2xy)$ で表される点 Q はどんな曲線上を動きますか。

練習 27 (1) 放物線 $y^2 - 4x + 2ty + 5t^2 - 4t = 0$ の焦点 F は、 t の値が変化するとき、どんな曲線上を動きますか。

(2) 点 $P(x, y)$ が、原点を中心とする半径 1 の円周上を反時計回りに 1 周するとき、点 $Q_1(-y, x)$ 、点 $Q_2(x^2 + y^2, 0)$ は、原点の周りを反時計回りに何周しますか。

例題 28 (1) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と直線 $y = -x + t$ との交点を考えて、この双曲線を媒介変数 t を用いて表しなさい。

(2) 曲線 $x = \frac{3}{1+t^2}$, $y = \frac{3t}{1+t^2}$ は、どのような図形ですか(t は媒介変数)。

練習 28 t を媒介変数とする。次の式で表された曲線はどのような図形を表しますか。

- (1) $x = \frac{2(1+t^2)}{1-t^2}$, $y = \frac{6t}{1-t^2}$
- (2) $x \sin t = \sin^2 t + 1$, $y \sin^2 t = \sin^4 t + 1$

例題 29 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) の第 1 象限の部分上にある点 P における楕円の法線が、 x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ Q, R とする。このとき、 $\triangle OQR$ (O は原点) の面積 S のとりうる値の範囲を求めなさい。

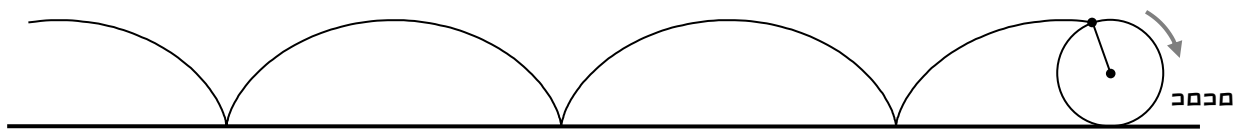
練習 29 実数 x, y が $2x^2 + 3y^2 = 1$ を満たすとき、 $x^2 - y^2 + xy$ の最大値と最小値を求めなさい。

例題 30 O は原点とする。点 P が円 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ の周上を動くとき、半直線 OP 上にあつて、 $OP \cdot OQ = 1$ を満たす点 Q の軌跡を求めなさい。

練習 30 xy 平面上に円 $C_1 : x^2 + y^2 - 2x = 0$, $C_2 : x^2 + y^2 - x = 0$ がある。原点 O を除いた円 C_1 上を動く点 P に対して、直線 OP と円 C_2 の交点のうち O 以外の点を Q とし、Q と x 軸に関して対称な点を Q' とする。このとき、線分 PQ' の中点 M の軌跡を表す方程式を求め、概形を図示しなさい。

○ サイクロイド

直線上に沿って円を転がすとき、円周上の定点の軌跡を**サイクロイド(cycloid)**という。



ここでは、中心が y 軸上にある半径 a の円を、 x 軸上に沿って転がすとき、円周上の定点 $P(x, y)$ の軌跡を考える。

円の中心を O' 、円と x 軸の接点を A 、 $\angle PO'A = \theta$ とする。
このとき、

$$OA = \text{弧 } AP = a\theta$$

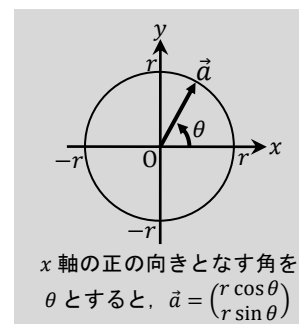
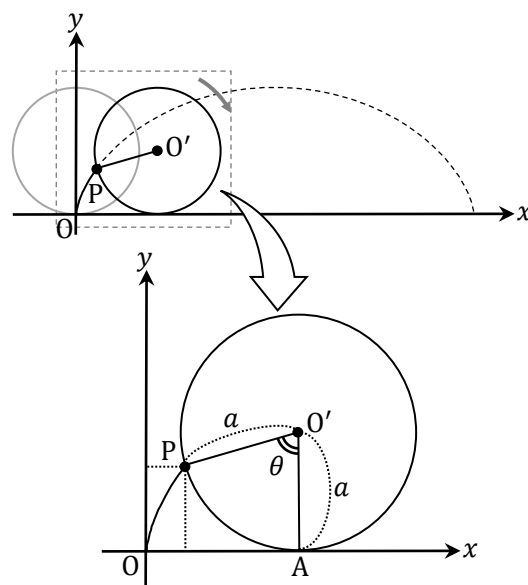
となるので、 $O'(a\theta, a)$ 。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \begin{pmatrix} a\theta \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ a \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\theta \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ -a \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\theta \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ -a \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\theta - a \sin \theta \\ a - a \cos \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

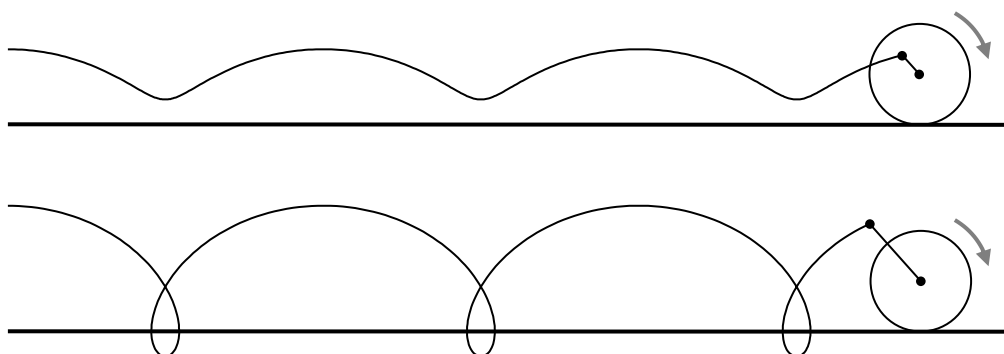
これより、サイクロイドの媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

となる。



ちなみに、直線上に沿って円を転がすとき、円の内部または外部の定点の軌跡を**トロコイド**といい、以下のような曲線になる。



○ アステロイド

定円 C があり、それに内接する円 D が滑らずに回転する。
2 円 C, D の半径の比が $4:1$ になるとき、円 D 上の
定点 P の軌跡を**アステロイド**という。

ここでは、 $C: x^2 + y^2 = a^2$ とし、中心が x 軸上にある半径 $\frac{a}{4}$ の円 D を
円 C に沿って滑らずに回転させる。初め円 D 上の定点 P が、点 $(a, 0)$ と
一致しているとき、 $P(x, y)$ の軌跡を考えよう。

$A(a, 0)$ とし、円 D の中心を O' 、円 C との接点を B とする。

$\angle O'OA = \theta$ とすると、弧 $PB =$ 弧 $AB = a\theta$ 。

円 O' は半径 $\frac{a}{4}$ の円なので、 $\angle BO'P = 4\theta$ となる。

よって、 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OA}$ のなす角が 3θ となる。これより、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \\ &= \frac{3a}{4} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{a}{4} \begin{pmatrix} \cos(-3\theta) \\ \sin(-3\theta) \end{pmatrix} \\ &= \frac{a}{4} \begin{pmatrix} 3 \cos \theta + \cos 3\theta \\ 3 \sin \theta - \sin 3\theta \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} \cos^3 \theta \\ \sin^3 \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

【3 倍角の公式】

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha\end{aligned}$$

これより、アステロイドの媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$$

となる。また、この 2 式より、

$$\cos \theta = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \sin \theta = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

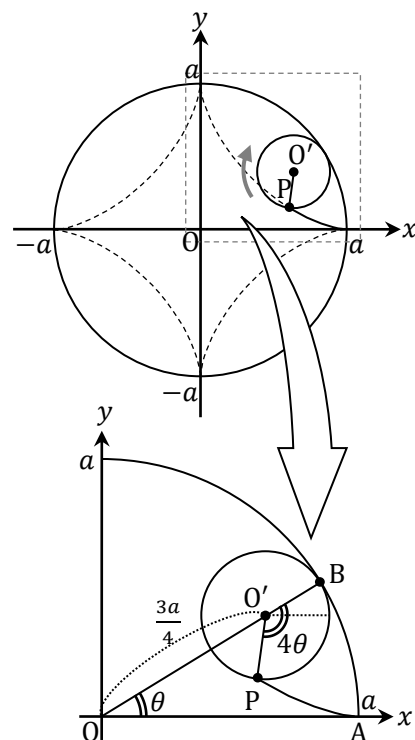
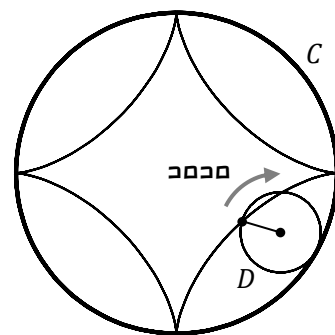
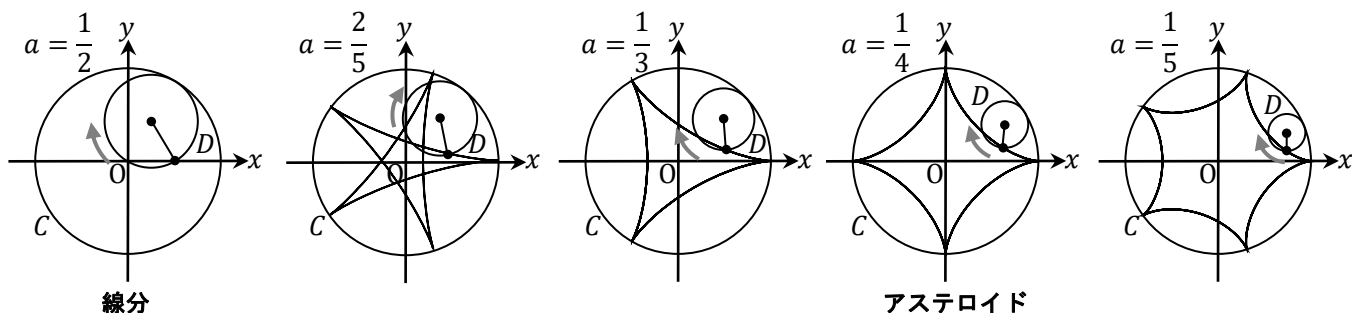
となるので、ここから θ を消去すると、

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}}$$

と表すこともできる。

一般的に、定円 C があり、それに内接しながら円 D が滑らずに回転するときの円周上の定点の軌跡を
内サイクロイド、または**ハイポサイクロイド(hypocycloid)**という。

円 C と円 D の半径の比が $1:a$ ($0 < a < 1$) とすると、 a の値により、下図のように変化する。



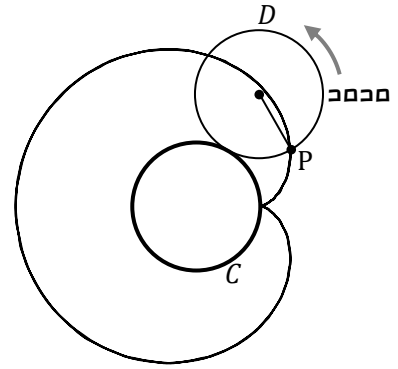
○ カージオイド

定円 C があり，それに外接する円 D が滑らずに回転する。

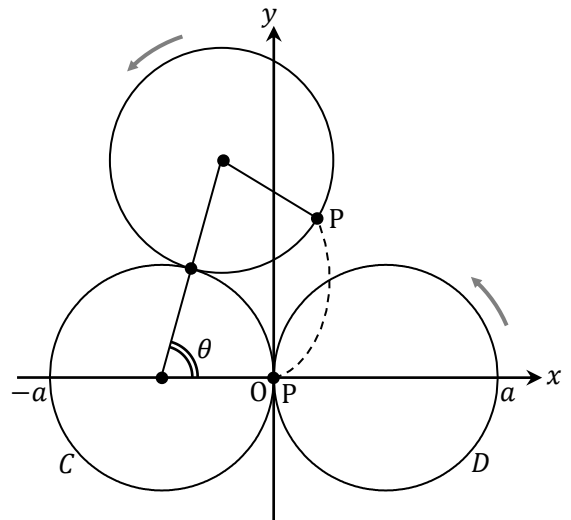
2 円 C, D の半径が等しいとき，円 D 上の定点 P の軌跡を
カージオイドという。

ここでは， $C : \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ とし，中心が x 軸上にある半径 $\frac{a}{2}$

の円 D を円 C に沿って滑らずに回転させる。初め円 D 上の定点 P が，
原点にあるとき， $P(x, y)$ の軌跡を考えよう。

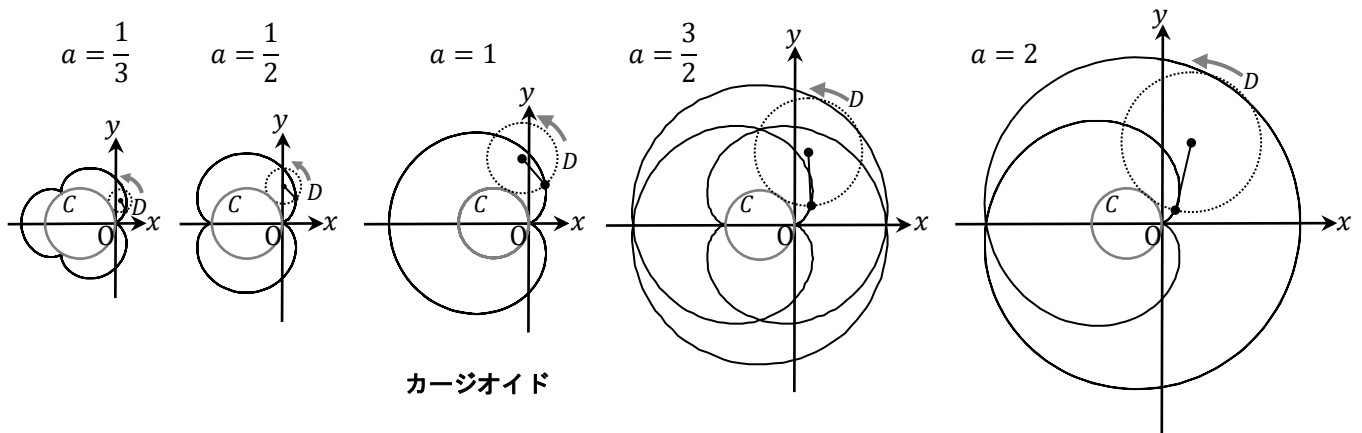


(各自で求めよう!)



一般的に、定円 C があり、それに外接しながら円 D が滑らずに回転するときの円周上の定点の軌跡を**外サイクロイド**、または**エピサイクロイド (epicycloid)** という。

円 C と円 D の半径の比が $1:a$ とすると、 a の値により、下図のように変化する。



例題 31 半径 b の円 C が、原点 O を中心とする半径 a の定円 O に外接しながら滑ることなく回転するとき、円 C 上の定点 $P(x, y)$ が、初め定円 O の周上の定点 $A(a, 0)$ にあったものとして、点 P が描く曲線を媒介変数 θ で表しなさい。ただし、円 C の中心 C と O を結ぶ線分の、 x 軸の正の方向からの回転角を θ とする。

練習 31 $a > 2b$ とする。半径 b の円 C が原点 O を中心とする半径 a の定円 O に内接しながら滑ることなく回転していく。円 C 上の定点 $P(x, y)$ が、初め定円 O の周上の定点 $A(a, 0)$ にあったものとして、円 C の中心 C と原点 O を結ぶ線分の、 x 軸の正方向からの回転角を θ とするとき、点 P が描く曲線を媒介変数 θ で表しなさい。

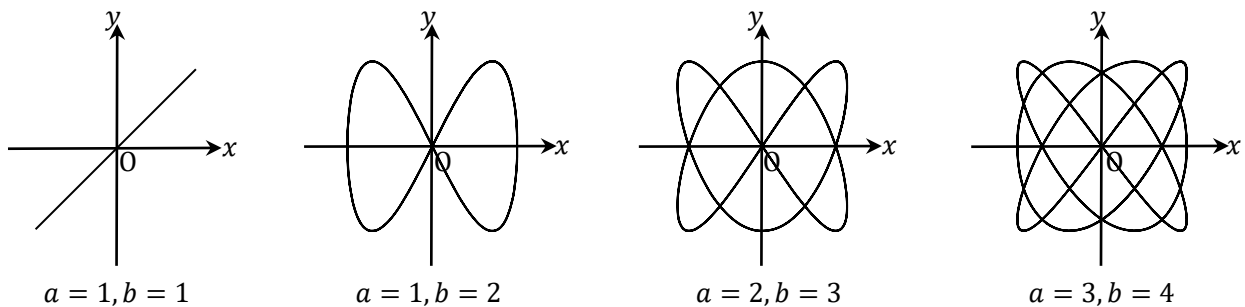
○ リサージュ曲線

有理数 a, b に対して、媒介変数表示

$$\begin{cases} x = \sin at \\ y = \sin bt \end{cases}$$

で表される曲線を**リサージュ曲線**という。

a, b の値を変えていくと、以下のような曲線が現れる。

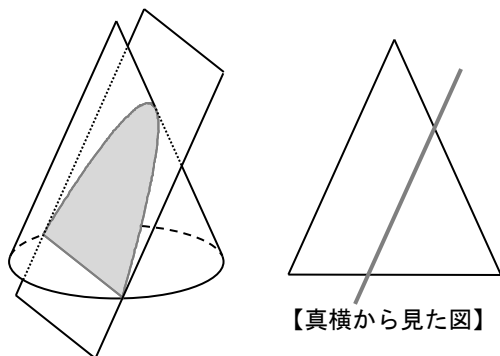


§7 円すいと2次曲線

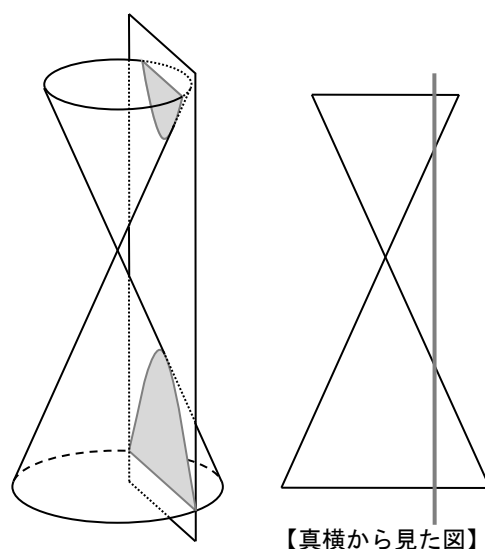
2次曲線は別名「**円錐曲線**」とも呼ばれる。それは、円錐を平面で切断したときの断面が、切る角度によって、放物線、楕円、双曲線になるからである。

具体的には以下のとおりである。

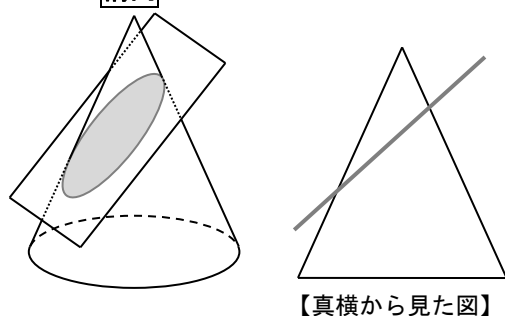
放物線(母線と平行に切る)



双曲線(底面と垂直に切る)



楕円



○ 幾何的な証明

ここでは楕円の場合のみ証明をする(放物線、双曲線の場合も基本的な考え方は同じです。次ページの図を用いて考えてみよう！)。

円錐と平面の共有部分に現れる曲線を D とする。

まず、円錐の側面と平面に接する2つの球 C, C' を考える。このとき、球と円錐との共有部分に現れる円を S, S' とし、平面と球の接点を F, F' とする。また、円錐の頂点と曲線 D 上の任意の点 P を結ぶ直線と、円 S, S' の交点をそれぞれ Q, Q' とする。このとき、線分 PF, PQ は球 C の接線なので、

$$PF = PQ$$

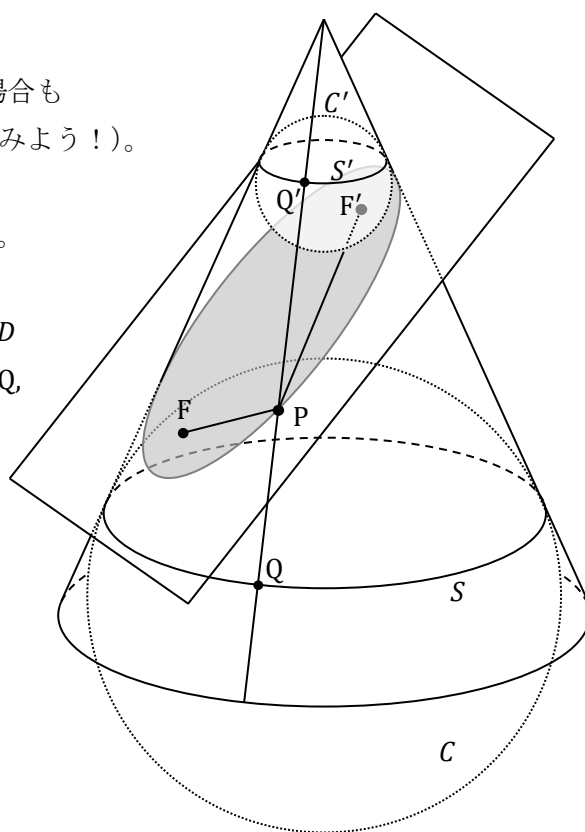
同様に、線分 PF', PQ' は球 C' の接線なので、

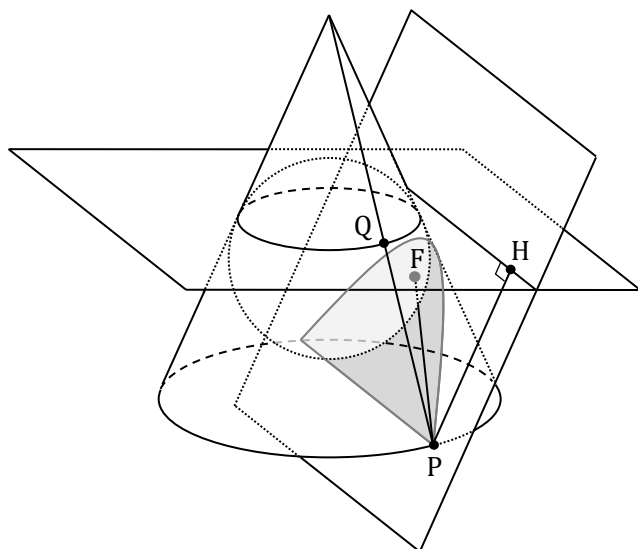
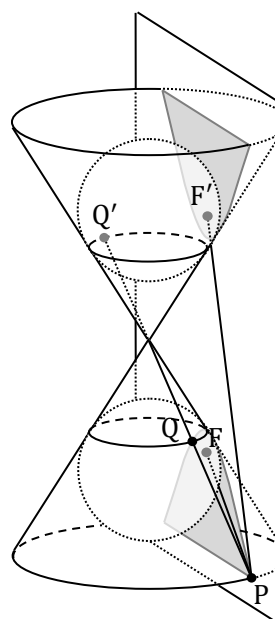
$$PF' = PQ'$$

これより、

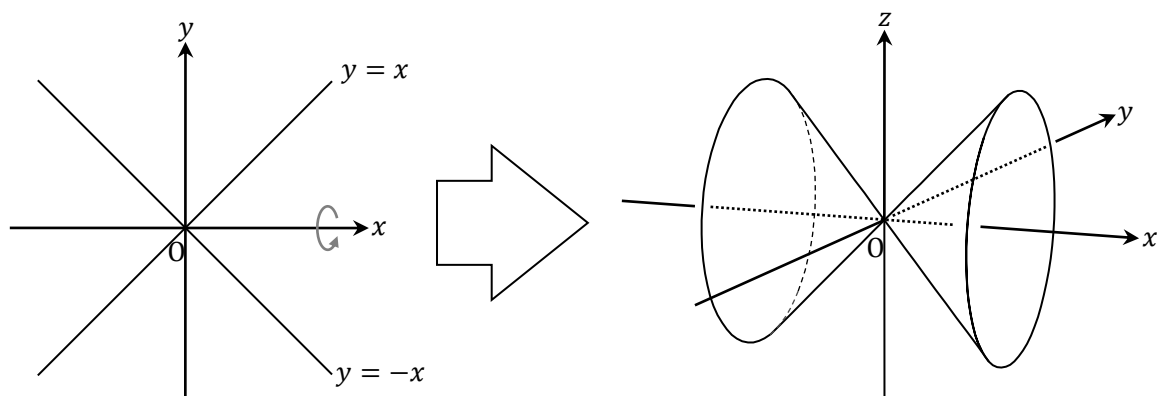
$$PF + PF' = PQ + PQ' = QQ' \text{ (一定)}$$

となるので、曲線 D は楕円であることが分かる。



放物線の証明**双曲線の証明****○ 円錐の方程式を用いた確認①(双曲線)**

まず, 2 直線 $y = \pm x$ を, x 軸を中心に回転させたときにできる円錐の方程式を求めよう。



図形の方程式を求めるには, 図形上の任意の点が満たす関係式を作ればよい。

ここでは, 円錐の方程式を 2 通りの方法で求める。

方法①(底面と平行な平面を利用する)

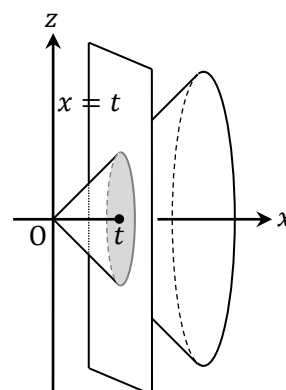
平面 $x = t$ と円錐の共有部分は yz 平面に平行で半径 $|t|$ の円となるので, $y^2 + z^2 = t^2$ と表せる。よって, 円錐上の任意の点 $P(x, y, z)$ は

$$\begin{cases} x = t \\ y^2 + z^2 = t^2 \end{cases}$$

よって, 円錐の方程式は 2 式から t を消去すればよいので,

$$\begin{cases} x = t \\ y^2 + z^2 = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x^2 = y^2 + z^2}$$

となる。



方法② (ベクトルの内積を利用する)

円錐上の任意の点を $P(x, y, z)$ ($x > 0$) とする。

$A(1, 0, 0)$ とすると, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角は常に 45° となるので,

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}|} &= \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

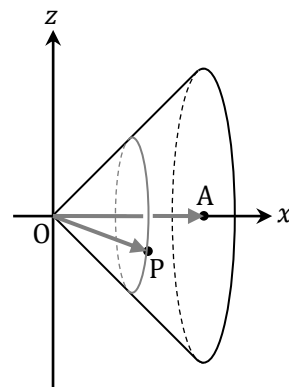
両辺正より, 2 乗すると,

$$2x^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 + z^2$$

これは, $x = y = z = 0$ のときも満たす。

また, $x < 0$ のときは, 点 A を $A(-1, 0, 0)$ とすれば同じ式が得られる。

よって, 円錐の方程式は, $\boxed{x^2 = y^2 + z^2}$

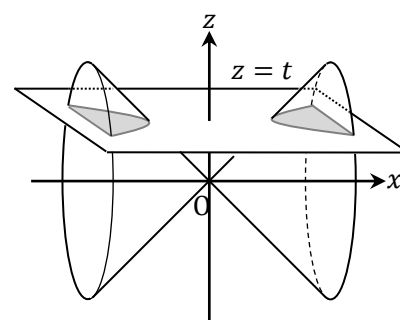


以上より, 円錐の方程式が求まった。ここで, この円錐を xy 平面と平行な平面 $z = t$ で切断する。

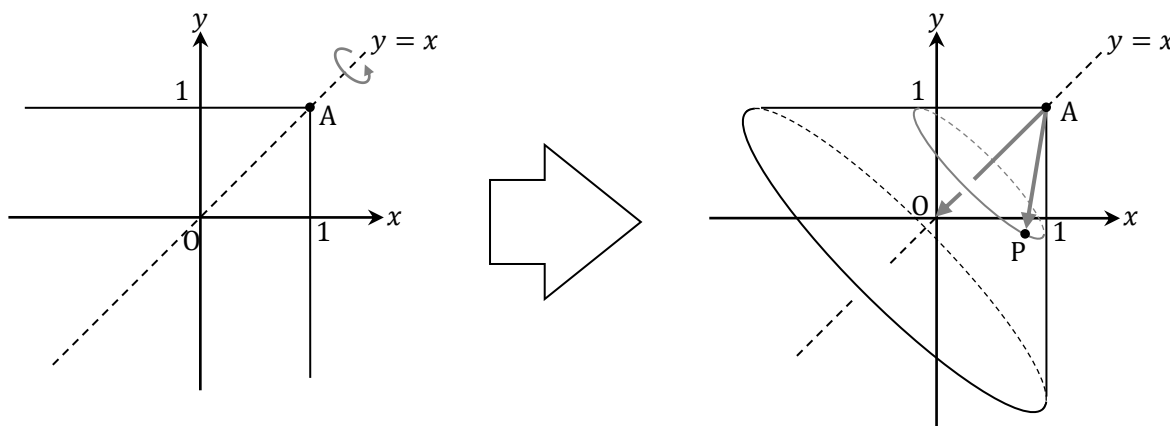
これは求めた円錐の方程式に $z = t$ を代入すればよいので,

$$x^2 = y^2 + t^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = t^2$$

となり, 確かに双曲線が現れる。

**○ 円錐の方程式を用いた確認② (放物線)**

ここでは, 2 直線 $x = 1$ ($y \leq 1$), $y = 1$ ($x \leq 1$) を, $y = x$ を中心に回転させたときにできる円錐の方程式を求める。



先ほどの **方法②** を用いて求める。

円錐上の任意の点を $P(x, y, z)$ ($x < 1, y < 1$) とする。

$A(1, 1, 0)$ とすると, $\overrightarrow{AO}$ と $\overrightarrow{AP}$ のなす角は常に 45° となるので,

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AP}|} &= \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{-x + 1 - y + 1}{\sqrt{2} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow 2 - x - y = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2} \end{aligned}$$

両辺正より，2 乗すると，

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy + 4 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2 \Leftrightarrow \boxed{z^2 + 2x + 2y - 2xy - 2 = 0}$$

これは， $x = y = 1$ のときも成り立つ。

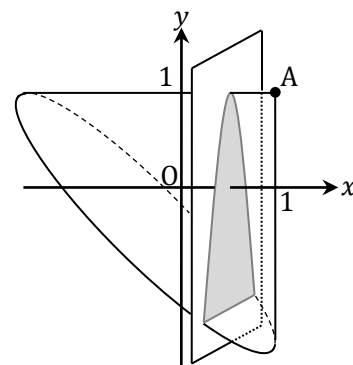
以上より，円錐の方程式となる。

ここで，この円錐を母線と平行な平面 $x = t$ ($t \leq 1$) で切断する。

これは求めた円錐の方程式に $x = t$ を代入すればよいので，

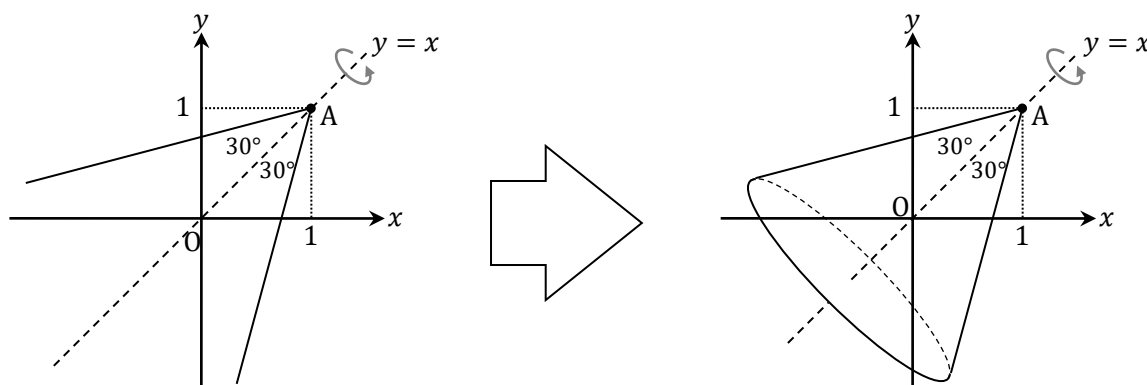
$$z^2 + 2t + 2y - 2ty - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{z^2}{2(1-t)} + 1}$$

となり，確かに放物線が現れる。



○ 円錐の方程式を用いた確認③(楕円)

ここでは，点 $A(1, 1)$ を通り，直線 $y = x$ となす角が 30° である 2 直線(ただし， $x \leq 1$ かつ $y \leq 1$)を $y = x$ を中心に回転させたときにできる円錐の方程式を求め，これを平面 $x = \frac{1}{2}$ で切断してみよう。



(各自で証明してみよう!)

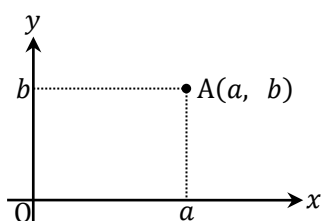
§ 8 極座標と極方程式

○ 極座標

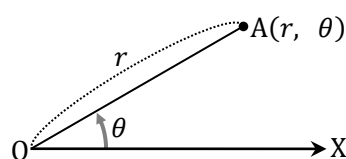
平面上のある点 A の位置を表すときに、今までは直交する 2 本の座標軸を用いて、図のように $A(a, b)$ と表してきたが、ここではこれとは異なる位置の表し方を考えよう。

平面上に点 O と半直線 OX を定めると、ある点 A の位置は、 OA の長さ r と、 OA と半直線 OX のなす角 θ で決まる。このように長さ r と角度 θ の組 (r, θ) で点の位置を表す方法を**極座標表示**という。このとき、 (r, θ) を点 A の**極座標**といい、定点 O を**極**、半直線 OX を**始線**、角 θ を**偏角**という。

直交座標表示



極座標表示



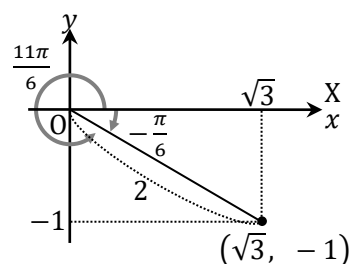
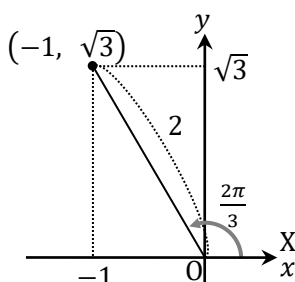
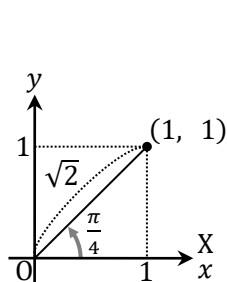
直交座標における、原点 O を極とし、 x 軸の正の部分の始線としたとき、直交座標表示と極座標表示は以下のように対応する。

直交座標表示

極座標表示

$$\begin{aligned} (1, 1) &\Rightarrow \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \\ (-1, \sqrt{3}) &\Rightarrow \left(2, \frac{2\pi}{3}\right) \\ (\sqrt{3}, -1) &\Rightarrow \left(2, \frac{11\pi}{6}\right) \text{ or } \left(2, -\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

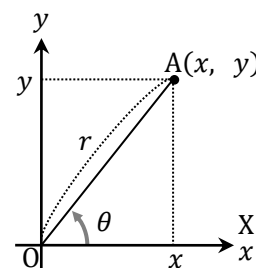
(r, θ) と $(r, \theta + 2n\pi)$ は同じ点を表します。つまり、1 つの点の位置を示すときに、極座標を用いると複数の表し方が考えられるというわけです。



一般的には、直交座標において点 $A(x, y)$ と表される点が、極座標において点 $A(r, \theta)$ と表されたとすると、直交座標表示と極座標表示には以下のような関係がある。

● 直交座標と極座標 ●

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (\text{ただし, } r = \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \text{つまり, } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ のとき, } \cos \theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$



例題 32 (1) 極座標が次のような点を図示しなさい。

$$A\left(3, \frac{2\pi}{3}\right), B\left(2, -\frac{3}{2}\pi\right)$$

(2) 極座標が次のような点 P の直交座標を求めなさい。また、直交座標が次のような点 Q の極座標 (r, θ) ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めなさい。

$$P\left(2, -\frac{\pi}{3}\right), Q(\sqrt{3}, -1)$$

練習 82 (1) 極座標が次のような点を図示しなさい。また、直交座標を求めなさい。

$$(ア) \left(2, \frac{3}{4}\pi\right) \quad (イ) \left(3, -\frac{\pi}{2}\right) \quad (ウ) \left(2, \frac{17}{6}\pi\right) \quad (エ) \left(4, -\frac{10}{3}\pi\right)$$

(2) 直交座標が次のような点の極座標 (r, θ) ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めなさい。

$$(ア) (1, \sqrt{3}) \quad (イ) (-2, -2) \quad (ウ) (-3, \sqrt{3})$$

例題 33 O を極とするの極座標に関して、2 点 $A\left(4, -\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ がある。

(1) 線分 AB の長さを求めなさい。

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

練習 88 O を極とするの極座標に関して、3 点 $A\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(4, \frac{2}{3}\pi\right)$, $C\left(2, -\frac{3}{4}\pi\right)$ が与えられているとき、

次のものを求めなさい。

(1) 線分 AB の長さ

(2) $\triangle OAB$ の面積

(3) $\triangle ABC$ の面積

○ 極方程式

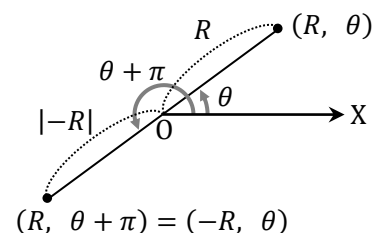
ある図形 F 上の任意の点の位置を極座標 (r, θ) を用いて表すとき、この r と θ が満たす関係式 $r = f(\theta)$, $F(r, \theta) = 0$ を図形 F の **極方程式** という。

なお極方程式においては、 $r < 0$ となる極座標の点も考えるものとする。三角関数の性質から

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = -r \cos(\theta + \pi) \\ y = r \sin \theta = -r \sin(\theta + \pi) \end{cases}$$

が成り立つので、 $r < 0$ の場合 (r, θ) は $(-r, \theta + \pi)$ となる。

つまり、 $R > 0$ のとき、 (R, θ) と $(-R, \theta)$ は極 O に関して対称である。



例 5 O を極とする次の極方程式が表す図形を、 xy 平面上に図示しなさい。

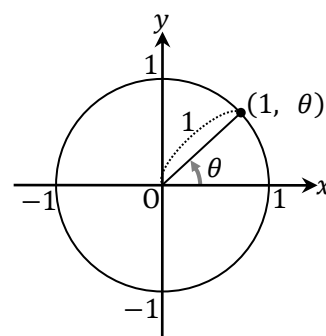
- (1) $r = 1$ (2) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (3) $r = \cos \theta$ (4) $r = \theta$ ($\theta \geq 0$)

極方程式のまま図形を考えてもよいですし、慣れ親しんだ直交座標系に直して考えてもよいでしょう。

- (1) 図形上の任意の点 (r, θ) が、常に $r = 1$ を満たすので、これは、極 O 中心、半径 1 の円となる。

直交座標で考えると…

$x^2 + y^2 = r^2$ より、 $x^2 + y^2 = 1$ となる。

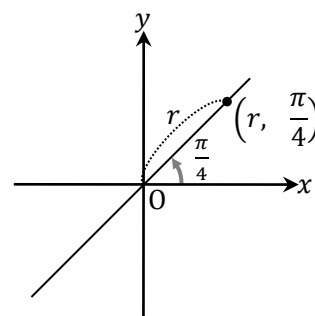


- (2) 図形上の任意の点 (r, θ) が、常に $\theta = \frac{\pi}{4}$ を満たすので、

始線とのなす角が $\theta = \frac{\pi}{4}$ である直線を表す。

直交座標で考えると…

$\begin{cases} x = r \cos \frac{\pi}{4} = \frac{r}{\sqrt{2}} \\ y = r \sin \frac{\pi}{4} = \frac{r}{\sqrt{2}} \end{cases}$ より、2 式から r を消去すると直線 $y = x$ となる。

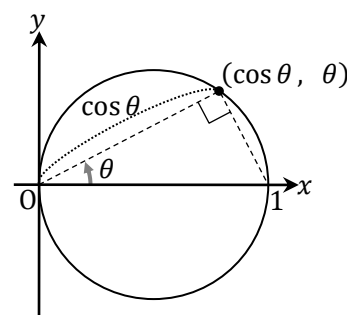


- (3) 図形上の任意の点 (r, θ) と極 O の距離が常に $\cos \theta$ となるので、極 O と $(1, 0)$ を直径の両端とする円になる。

なお、この極方程式の場合 r が負の値になることもあるが、その場合は次のように考えるとよい。

例えば、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ のときは $r = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるが、これは

$\theta = \frac{3}{4}\pi + \pi = \frac{7}{4}\pi$ 方向に $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を表す。他の点も同様に考える。



直交座標で考えると…

$r = \cos \theta$ の両辺を r 倍すると, $r^2 = r \cos \theta$ 。

$x^2 + y^2 = r^2$, $x = r \cos \theta$ より,

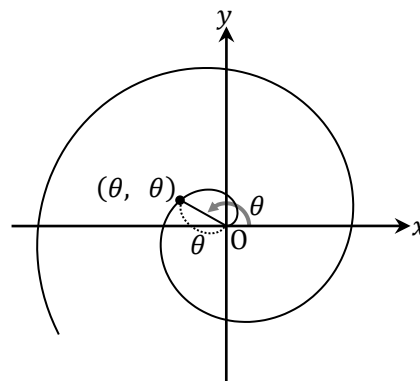
$$x^2 + y^2 = x \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ となる。}$$

- (4) これは θ の増加に伴い, 極 O からの距離も増え続けるので, 右図のような螺旋が現れる。

直交座標で考えると…

$\begin{cases} x = \theta \cos \theta \\ y = \theta \sin \theta \end{cases}$ と表すことが出来るが, この 2 式から

θ を消すことはできない。よって, グラフをかくにはパラメータ表示のまま微分をしていくことになる。



例題 34 極座標に関して, 次の円・直線の方程式を求めなさい。ただし, $a > 0$ とする。

- (1) 中心が点 (α, α) ($0 < \alpha < \pi$) で, 極 O を通る円
- (2) 点 $A(a, 0)$ を通り, 始線 OX とのなす角が α ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$) である直線

練習 34 極座標に関して, 次の円・直線の方程式を求めなさい。

- (1) 中心が点 $A\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$, 半径が 2 の円
- (2) 点 $A\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ を通り, OA (O は極) に垂直な直線

例 6 次の直交座標に関する方程式を、極方程式で表しなさい。

(1) $x + y = 1$

(2) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

基本的には、 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, $x^2 + y^2 = r^2$ を用いて変形していけばよいが、図形的に考えてもよいでしょう。

(1) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ より,

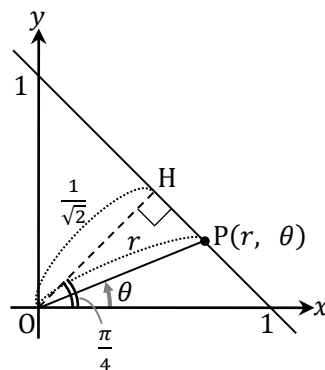
$$x + y = 1 \Leftrightarrow r \cos \theta + r \sin \theta = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

図形的に考えると…

図形上の任意の点を $P(r, \theta)$, 極 O から下ろした垂線の足を

H とすると, $OP = r$, $OH = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle POH = \frac{\pi}{4} - \theta$ となるので,

$$\cos \angle POH = \frac{OH}{OP} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \Leftrightarrow \sqrt{2}r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$



(2) $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r \cos \theta$ より,

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2r \cos \theta = 0 \Leftrightarrow r(r - 2 \cos \theta) = 0$$

よって, $r = 0$ または $r = 2 \cos \theta$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき, $r = 2 \cos \theta$ は $r = 0$ となるので,

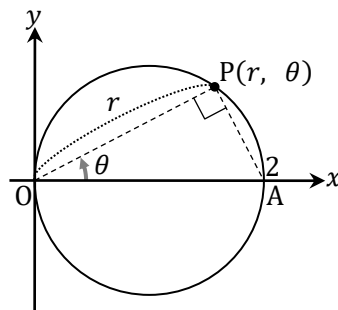
求める極方程式は $r = 2 \cos \theta$ となる。

図形的に考えると…

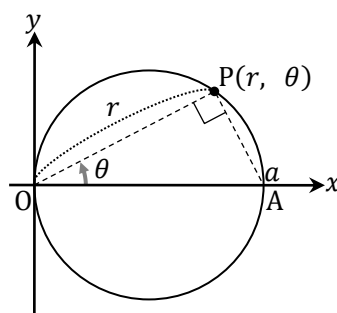
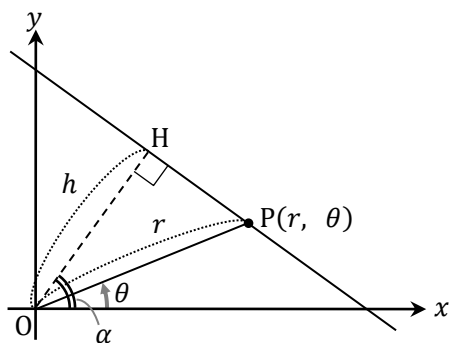
図形上の任意の点を $P(r, \theta)$ とし, $A(2, 0)$ とおくと,

$\angle APO = \frac{\pi}{2}$ となるので,

$$\cos \angle AOP = \frac{OP}{OA} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{r}{2} \Leftrightarrow r = 2 \cos \theta$$



一般的には、極を通らない直線の極方程式は、 $r \cos(\theta - \alpha) = h$ と表すことができ、
極 O と点 $(a, 0)$ を直径の両端とする円の極方程式は $r = a \cos \theta$ と表すことができる。



例題 35 (1) 円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ を極方程式で表しなさい。

(2) 次の極方程式はどのような曲線を表しますか。直交座標の方程式で答えなさい。

(ア) $r = \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta$

(イ) $r^2 \sin 2\theta = 4$

練習 35 (1) 楕円 $2x^2 + 3y^2 = 1$ を極方程式で表しなさい。

(2) 次の極方程式はどのような曲線を表しますか。直交座標の方程式で答えなさい。

(ア) $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{3} \sin \theta$

(イ) $r = \cos \theta + \sin \theta$

(ウ) $r^2(1 + 3 \cos^2 \theta) = 4$

(エ) $r^2 \cos 2\theta = r \sin \theta (1 - r \sin \theta) + 1$

例題 36 点 A の極座標を $(10, 0)$, 極 O と点 A を結ぶ線分を直径とする円 C の周上の任意の点を Q とする。点 Q における円 C の接線に極 O から垂線 OP を下ろし, 点 P の極座標を (r, θ) とするとき, その軌跡の極方程式を求めなさい。ただし, $0 \leq \theta < \pi$ とする。

練習 36 (1) 半径 a の円 C の定直径を OA とする。点 P は円周上の動点で, 点 P における接線に O から垂線 OQ を引き, OQ の延長上に点 R をとって $QR = a$ とする。O を極, 始線を OA として, 点 R の軌跡の方程式を求めなさい。

(2) 直線 OR の点 R における垂線 RQ' は, 定円に接することを示しなさい。

○ 2 次曲線の極方程式

極座標が $A(a, 0)$ である点 A を通り、始線 OX に垂直な直線を l とする。

平面上の点 $P(r, \theta)$ から直線 l に下ろした垂線の足を H とすると、

$$\frac{OP}{PH} = e \text{ (定数)}$$

を満たす点 P の軌跡は 2 次曲線となる。

これを用いて、2 次曲線の極方程式を求めよう。

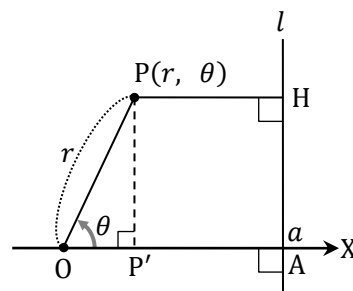
P から始線 OX に下ろした垂線の足を P' とすると、

$$PH = P'A = a - r \cos \theta$$

よって、

$$\frac{OP}{PH} = e \Leftrightarrow \frac{r}{a - r \cos \theta} = e \Leftrightarrow r = ae - er \cos \theta \Leftrightarrow r = \frac{ae}{1 + e \cos \theta}$$

となり、 $0 < e < 1$ のときは楕円、 $e = 1$ のときは放物線、 $e > 1$ のときは双曲線を表す。



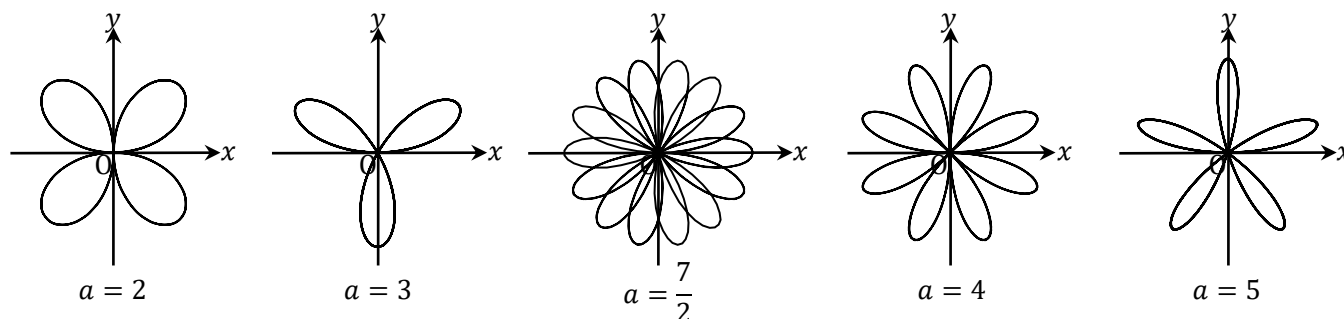
○ 正葉曲線

有理数 a に対して、極方程式

$$r = \sin a\theta$$

で表される曲線を**正葉曲線**という。

a の値を変えていくと、以下のような曲線が現れる。



例題 37 a, e を正の定数、点 A の極座標を $(a, 0)$ とし、 A を通り始線 OX に垂直な直線を l とする。点 P から l に下ろした垂線を PH とするとき、 $e = \frac{OP}{PH}$ であるような点 P の軌跡の方程式を求めなさい。ただし、 O を極とする。

練習 37 (1) 極座標において、点 $A(3, \pi)$ を通り始線に垂直な直線を g とする。極 O と直線 g からの距離の比が次のように一定である点 P の軌跡の極方程式を求めなさい。

(ア) $1:2$

(イ) $1:1$

(2) 次の極方程式の表す曲線を、直交座標の方程式で表しなさい。

(ア) $r = \frac{4}{1 - \cos \theta}$

(イ) $r = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6} \cos \theta}$

(ウ) $r = \frac{1}{2 + \sqrt{3} \cos \theta}$

例題 38 2 次曲線の 1 つの焦点 F を通る弦の両端を P, Q とするとき、 $\frac{1}{FP} + \frac{1}{FQ}$ は、弦の方向に関係なく一定であることを証明しなさい。

練習 38 放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) を C とし、原点を O とする。

- (1) C の焦点 F を極とし、 OF に平行で O を通らない半直線 FX を始線とする極座標において、曲線 C の極方程式を求めなさい。
- (2) C 上に 4 点があり、それらを y 座標が大きい順に A, B, C, D とすると、線分 AC, BD は焦点 F で垂直に交わっている。ベクトル $\vec{FA}$ が x 軸の正の方向となす角を α とするとき、 $\frac{1}{AF \cdot CF} + \frac{1}{BF \cdot DF}$ は α によらず一定であることを示し、その値を p で表しなさい。

例題 39 曲線 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ の極方程式を求めなさい。また、この曲線の概形をかきなさい。ただし、原点 O を極、 x 軸の正の部分の始線とする。

練習 39 $a > 0$ とする。極方程式 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) で表される曲線 K (カージオイド、心臓形) について、次の各問いに答えなさい。

- (1) 曲線 K は直線 $\theta = 0$ に関して対称であることを示しなさい。
- (2) 曲線 $C : r = a \cos \theta$ はどんな曲線を表しますか。また、曲線 C を利用して曲線 K の概形をかきなさい。