

積 分 (数学Ⅲ)

§ 1 不定積分

$F'(x) = f(x)$ が成り立つとき, $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**, または**不定積分**という。

(定数)' = 0 より, $G(x) = F(x) + C$ (C は定数) も原始関数となるので, $f(x)$ の任意の原始関数は $F(x) + C$ と表すことができ, 記号を用いて

$$\int f(x) dx$$

と表す。

不定積分

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + C \quad (C: \text{積分定数})$$

この $\int f(x) dx$ を求めることを**積分する**という。

○ 不定積分の公式

積分は微分の逆演算なので, 今まで学んだ微分の公式から積分の公式をつくることができる。

なお, 今後, 特に断りがない限り C は積分定数を, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数を表すものとする。

初等関数の積分の基本公式

微分公式

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \log a$$

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

積分公式

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \text{ は } \alpha \neq -1 \text{ の実数})$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

次に積分の和，実数倍に関する性質も挙げておく。

◆ 積分の基本公式 ◆

$$\textcircled{1} \quad \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

$$\textcircled{2} \quad \int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

合成関数の中身が**1次式のとき**は，以下のような公式をつくることができる。

これは，後ほど「置換積分法」学ぶことで一般的に証明することができるが，頻繁に出てくるものなので，覚えておくと便利である。

◆ 重要な積分公式 ◆

$$\left\{ \frac{1}{a} F(ax+b) \right\}' = f(ax+b) \quad \longrightarrow \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

例題1 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \quad \int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}} dx \quad (2) \quad \int \frac{x - \cos^2 x}{x \cos^2 x} dx \quad (3) \quad \int \frac{1}{\tan^2 x} dx \quad (4) \quad \int (2e^t - 3 \cdot 2^t) dt$$

練習1 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \quad \int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2} dx \quad (2) \quad \int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{x} dx \quad (3) \quad \int (\tan x + 2) \cos x dx$$

$$(4) \quad \int \frac{3 - 2 \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \quad (5) \quad \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx \quad (6) \quad \int (3e^t - 10^t) dt$$

例題2 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \quad \int \sqrt{2x-3} dx \quad (2) \quad \int \cos\left(\frac{2}{3}x - 1\right) dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{4x+5} \quad (4) \quad \int 2^{-3x+1} dx$$

練習2 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \quad \int \frac{1}{4x^2 - 12x + 9} dx \quad (2) \quad \int \sqrt[3]{3x+2} dx \quad (3) \quad \int e^{-2x+1} dx$$

$$(4) \quad \int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}} dx \quad (5) \quad \int \sin(3x-2) dx \quad (6) \quad \int 7^{2x-3} dx$$

積分は微分の逆演算です。つまり，積分した式を微分すれば元に戻るということです。普段から計算ミスの多い人は必ず，微分をして確かめてみてください。



例題 3 (1) 次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めなさい。

$$F'(x) = \tan^2 x, \quad F(\pi) = 0$$

(2) 点 $(1, 0)$ を通る曲線 $y = f(x)$ 上の点 (x, y) における接線の傾きが $x\sqrt{x}$ であるとき、微分可能な関数 $f(x)$ を求めなさい。

練習 8 (1) 次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めなさい。

$$F'(x) = e^x - \frac{1}{\sin^2 x}, \quad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 (x, y) における法線の傾きが 3^x であり、かつ、この曲線が原点を通るとき、微分可能な関数 $f(x)$ を求めなさい。

例題 4 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(x) = |e^x - 1|$ を満たし、 $f(1) = e$ であるとき、 $f(x)$ を求めなさい。

練習 4 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ とする。 $f'(x) = |\tan^2 x - 1|$, $f(0) = 0$ であるとき、 $f(x)$ を求めなさい。

○ 簡単な式変形による積分計算

積分は微分と違い、積、商の計算を簡単にはできない。積、商の形が出てきたときは簡単な式変形が必要になる。その中で、有名なものを紹介しておこう。

① 分数関数の積分

分数関数の積分にはいくつかのパターンがあるが、ここでは積分公式 $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$ を用いる解法を以下の2つのパターンに分けて紹介する。

(I) (分母の次数)>(分子の次数)のとき

この場合、**部分分数分解**をすることで解決する。

例1 不定積分 $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} dx$ を求めなさい。

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} dx &= \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx \\ &= -3 \log|x-1| + 5 \log|x-2| + C\end{aligned}$$

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{(a+b)x - 2a - b}{(x-1)(x-2)}$$

係数比較すること
でa,bを求める

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}$$

例2 不定積分 $\int \frac{3x^2}{(x-1)^2(x-2)} dx$ を求めなさい。

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2}{(x-1)^2(x-2)} dx &= \int \left(\frac{-9}{x-1} + \frac{-3}{(x-1)^2} + \frac{12}{x-2} \right) dx \\ &= -9 \log|x-1| + \frac{3}{x-1} + 12 \log|x-2| + C\end{aligned}$$

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-2} = \frac{(a+c)x^2 + (b-3a-2c)x + 2a-2b+c}{(x-1)^2(x-2)}$$

係数比較すること
でa,b,cを求める

$$\frac{3x^2}{(x-1)^2(x-2)}$$

なお、一般的には、

$$\frac{A}{(x-a)^n(x-b)} = \frac{a_1}{x-a} + \frac{a_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(x-a)^n} + \frac{b_1}{x-b}$$

と分解することができる。

(Ⅱ) (分母の次数) ≤ (分子の次数) のとき

この場合は、**帯分数化**することで、分子の次数を下げる。

例 3 不定積分 $\int \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 1} dx$ を求めなさい。

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 1} dx &= \int \left(x + 3 + \frac{5}{x - 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5 \log|x - 1| + C \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x-1 \overline{) x^2+2x+2} \\ \underline{x^2-x} \\ 3x+2 \\ \underline{3x-3} \\ 5 \end{array}$$

② 三角関数の公式の利用

三角関数の 2 次式, 3 次式の積分は, 公式を用いて**次数下げ**をしてから積分する必要がある。

例 4 不定積分 $\int \sin^2 x dx$, $\int \cos^3 x dx$, $\int \sin 2x \cos x dx$ を求めなさい。

(倍角の公式利用)	$\int \underbrace{\sin^2 x}_{2\text{次}} dx$	$= \int \underbrace{\frac{1 - \cos 2x}{2}}_{1\text{次}} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$
(3倍角の公式利用)	$\int \underbrace{\cos^3 x}_{3\text{次}} dx$	$= \int \underbrace{\frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}}_{1\text{次}} dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$
(積 → 和の公式利用)	$\int \underbrace{\sin 2x \cos x}_{2\text{次}} dx$	$= \int \underbrace{\frac{\sin 3x + \sin x}{2}}_{1\text{次}} dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C$

(倍角の公式)

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

(3 倍角の公式)

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4}$$

(積→和の公式)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} & \textcircled{2} \quad \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \\ \textcircled{3} \quad \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} & \textcircled{4} \quad \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \end{aligned}$$

例題 5 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx \quad (2) \int \frac{x + 5}{x^2 + x - 2} dx \quad (3) \int \frac{x}{(2x - 1)^4} dx$$

練習 5 次の関数の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx \quad (2) \int \frac{3x + 2}{x(x + 1)^2} dx$$

例題 6 次の関数の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \cos^2 x \, dx \quad (2) \int \cos^3 x \, dx \quad (3) \int \sin 2x \cos 3x \, dx$$

練習 6 次の関数の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \sin^2 x \, dx \quad (2) \int \sin^3 x \, dx \quad (3) \int \cos 3x \cos 5x \, dx$$

§2 置換積分法

ここでは、**置換積分法**という大変便利な積分法を紹介する。まず、

$$y = F(x) = \int f(x)dx$$

とする。ここで、 $x = g(t)$ とおくと、 $y = F(g(t))$

ここで、両辺を t で微分すると、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

合成関数の微分

$$F'(x) = f(x)$$

これより、

$$\frac{dy}{dt} = f(g(t)) \cdot g'(t) \Leftrightarrow y = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \Leftrightarrow \boxed{\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt}$$

という式が得られる。また、 $g'(t) = \frac{dx}{dt}$ であることから、この式は

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot \frac{dx}{dt} dt}$$

と表すこともできる。

これは、

『積分 $\int f(x)dx$ を $x = g(t)$ と置き換えることで、t についての積分に変えた』

ということを表しており、この手法を**置換積分法**という。

例5 不定積分 $\int x\sqrt{2x+1}dx$ を求めなさい。

これは x と $\sqrt{2x+1}$ の積の積分となり、今まで通り計算するのは難しそうです。そこで、登場するのが置換積分法というわけです。

解① $2x+1=t$ とおく $x = \frac{t-1}{2}$ より、 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$

よって、

$$\int x\sqrt{2x+1}dx = \int \frac{t-1}{2} \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} \int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt = \frac{1}{10} t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{10} (2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

x から t の世界へ

t から x の世界へ

この問題は以下のように変形することで、置換積分法に頼らなくても計算できる。

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2x+1}dx &= \frac{1}{2} \int (2x+1-1)\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2} \int \left\{ (2x+1)^{\frac{3}{2}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{5} (2x+1)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right\} + C = \frac{1}{10} (2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

置換積分法は置き方によって、式変形がだいぶ違って来る。上と同じ問題で置き方を変えてみよう。

解② $\sqrt{2x+1}=t$ とおくと $x=\frac{t^2-1}{2}$ より $\frac{dx}{dt}=t$

$$\begin{aligned}\text{よって, } \int x\sqrt{2x+1}dx &= \int \frac{t^2-1}{2} \cdot t \cdot tdt = \frac{1}{2} \int (t^4 - t^2)dt = \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{6}t^3 + C \\ &= \frac{1}{10}(\sqrt{2x+1})^5 - \frac{1}{6}(\sqrt{2x+1})^3 + C\end{aligned}$$

○ 置換積分の式の見方

置換積分法の式 $\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$ は

『 $\int f(x)dx$ に $x = g(t)$ と $dx = g'(t)dt$ を代入した式』

と見ることができる。

さらに、 $dx = g'(t)dt$ という式は、

『 $x = g(t)$ の両辺を t で微分し、その式の両辺に dt をかける』

ことで作ることができる。

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

$\xrightarrow{x=g(t)}$ $\xrightarrow{dx=g'(t)dt}$ 代入!

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= g'(t) \\ \downarrow \text{両辺 } dt \text{ 倍} \\ dx &= g'(t)dt\end{aligned}$$

このように見ることで、置換積分法の式をわざわざ覚える必要がなくなる。

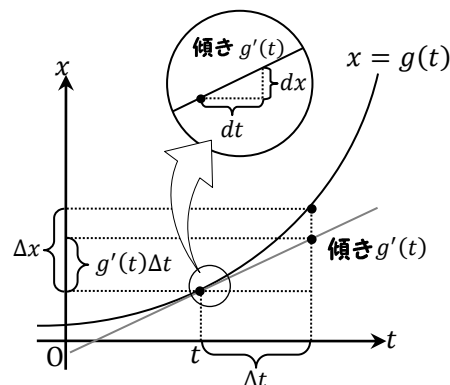
例 6 不定積分 $\int xe^{x^2}dx$ を求めなさい。

$$x^2 = t \text{ とおくと, } \frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x}dt$$

$$\text{よって } \int xe^{x^2}dx = \int xe^t \cdot \frac{1}{2x}dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$x^2 = t$ という式から、 $\frac{dx}{dt}$ を作るのは少々手間がかかります。 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}}$ という関係式があるので、まずは $\frac{dt}{dx}$ を求めるのがポイントです。

ちなみに、ここで出てきた $dx = g'(t)dt$ は右図のように、 t の微小な増分 dt と x の微小な増分 dx の関係を表している。



例題 7 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int (2x+1)\sqrt{x+2} dx$$

$$(2) \int \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} dx$$

$$(3) \int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

練習 7 次の関数の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int (x+2)\sqrt{1-x} dx$$

$$(2) \int \frac{x}{(x+3)^2} dx$$

$$(3) \int \frac{e^{2x}}{e^x+2} dx$$

$$(4) \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right) dx$$

$$(5) \int \frac{x}{1+x^2} \log(1+x^2) dx$$

$$(6) \int \frac{1}{x \log x} dx$$

例題 8 次の関数の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \frac{\sin x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{\cos x} dx$$

練習 8 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$(2) \int \frac{\cos x + \sin 2x}{\sin^2 x} dx$$

$$(3) \int \sin^2 x \tan x dx$$

$$(4) \int \cos^3 x dx$$

例題 9 次の関数の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \frac{x}{\sqrt{x+9}+3} dx$$

$$(2) \int x \sqrt[3]{x+3} dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

練習 9 次の関数の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \frac{x}{\sqrt{2x+1}-1} dx$$

$$(2) \int (x+1) \sqrt[4]{2x-3} dx$$

$$(3) \int \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}} dx$$

○ 積分の準公式

ここでは、覚えておくと便利な積分公式を紹介する。

$$\textcircled{1} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$f(x) = t \text{ とおくと, } \frac{dt}{dx} = f'(x) \Leftrightarrow dx = \frac{1}{f'(x)} dt$$

$$\text{これより, } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{t} \cdot \frac{1}{f'(x)} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|f(x)| + C$$

$$\text{よって, } \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C}$$

$$\textcircled{2} \quad \int \{f(x)\}^n f'(x) dx$$

$$f(x) = t \text{ とおくと } \frac{dt}{dx} = f'(x) \Leftrightarrow dx = \frac{1}{f'(x)} dt$$

$$\text{これより } \int \{f(x)\}^n f'(x) dx = \int t^n f'(x) \cdot \frac{1}{f'(t)} dt = \int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} + C$$

$$\text{よって, } \boxed{\int \{f(x)\}^n f'(x) dx = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} + C}$$

例 7 不定積分 $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1} dx$, $\int \cos^3 x \sin x dx$ を求めなさい。

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1} dx = \int \frac{(x^2+3x-1)'}{x^2+3x-1} dx = \log|x^2+3x-1| + C \quad (\text{準公式①})$$

$$\int \cos^3 x \sin x dx = - \int \cos^3 x (\cos x)' dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C \quad (\text{準公式②})$$



ともに、公式を用いると一瞬で解決します。頻繁に出てくる積分計算なので、覚えておくと大変便利です。

例題 10 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \sin^3 x \cos x dx \quad (2) \int \frac{x+1}{x^2+2x-1} dx \quad (3) \int (2x+1)\sqrt{x^2+x+1} dx$$

練習 10 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} dx \quad (2) \int \sin x \cos^2 x dx \quad (3) \int \frac{x^3+2x}{x^2+1} dx \quad (4) \int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1} dx$$

§3 部分積分法

ここでは、積の形の積分をするための新たな方法を紹介しよう。

今、 $F'(x) = f(x)$ とする。積の微分の公式より、

$$\begin{aligned}\{F(x)g(x)\}' &= F'(x)g(x) + F(x)g'(x) \\ &= f(x)g(x) + F(x)g'(x)\end{aligned}$$

これを $f(x)g(x)$ について解くと、

$$f(x)g(x) = \{F(x)g(x)\}' - F(x)g'(x)$$

ここで、両辺を積分すると、

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)dx &= \int \{F(x)g(x)\}'dx - \int F(x)g'(x)dx \\ &= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

となり、この式を用いた積分法を**部分積分法**という。

● 部分積分法 ●

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{積分}} \underbrace{g(x)}_{\text{そのまま}} dx = \underbrace{F(x)}_{\text{積分}} \underbrace{g(x)}_{\text{そのまま}} - \int \underbrace{F(x)}_{\text{そのまま}} \underbrace{g'(x)}_{\text{微分}} dx$$

例8 次の関数の不定積分を求めなさい。

(1) xe^x

(2) $\log x$

(3) $x^2 \sin x$

(1) $\int xe^x dx = \underbrace{x}_{\text{そのまま}} \underbrace{e^x}_{\text{微分}} - \int \underbrace{1}_{\text{積分}} \cdot \underbrace{e^x}_{\text{そのまま}} dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

積分定数は「記号が全てなくなったところで出せばよい。」

(2) $\int \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C$

$\log x = 1 \cdot \log x$ と考えるところがポイント！
1を積分することでxを導出。

ここで再び部分積分を行う。

(3) $\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$
 $= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

**部分積分法の注意点**

部分積分の計算をする際に、**どちらを微分側でどちらを積分側にすればよいかが問題になるが**，これを見誤ると，計算の終わりが見えず，はまってしまうので注意が必要だ。

上の例8(1)では x を微分側に， e^x を積分側に割り当てたが，試しにこれを逆にして計算してみよう。

$$\int \underbrace{xe^x dx}_{\text{微分!}} = \frac{1}{2}x^2e^x - \int \frac{1}{2}\underbrace{x^2e^x dx}_{\text{微分!}}$$

すると，被積分関数が $xe^x \Rightarrow x^2e^x$ となり，余計複雑な形になってしまっている。これではまったく意味がない。部分積分法は積の積分を完全に解決するための方法ではなく，あくまでも『**よりやりやすい積分に変える**』ためのものである。難化してしまったらだちに，別の方法をとらなくてはならない。

一般的に部分積分における，「微分側」，「積分側」の割り当ては，次のように考えるとよい。

(多項式)×(三角・指数関数)の場合

多項式を「微分側」に割り当てることにより，
次数が下がるため積分しやすくなる。

$$\int \underbrace{x^3 e^x dx}_{\text{微分}} = \underbrace{x^3 e^x}_{\text{積分}} - \int \underbrace{3x^2 e^x dx}_{\text{微分 次数が下がるため易化}}$$

(多項式)×(対数関数)の場合

対数関数を「積分側」に割り当てると，
 $\int \log x dx = x \log x - x + C$ となり難化してしまう。
また，「微分側」に割り当てると， $(\log x)' = \frac{1}{x}$ となり，
有利関数になるため扱いやすい。よって，この場合
多項式を「微分側」に割り当てると積分しやすくなる。

$$\int \underbrace{x^3 \log x dx}_{\text{微分}} = \underbrace{\frac{1}{4}x^4 \log x}_{\text{積分}} - \int \underbrace{\frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} dx}_{\text{微分 有理関数となるため易化}}$$

例題 11 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int xe^{2x} dx$

(2) $\int \log(x+1) dx$

(3) $\int x \cos 2x dx$

練習 11 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int xe^{-x} dx$

(2) $\int x \sin x dx$

(3) $\int x^2 \log x dx$

(4) $\int x \cdot 3^x dx$

(5) $\int \frac{\log(\log x)}{x} dx$

例題 12 次の関数の不定積分を求めなさい。

(1) $x^2 \sin x$

(2) $(\log x)^2$

(3) $x^2 e^{2x}$

練習 12 次の関数の不定積分を求めなさい。

(1) $x^2 \cos x$

(2) $x^2 e^{-x}$

(3) $x \tan^2 x$

例題 13 不定積分 $\int e^x \sin x \, dx$ を求めなさい。

練習 13 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int e^{-x} \cos x \, dx$

(2) $\int \sin(\log x) \, dx$

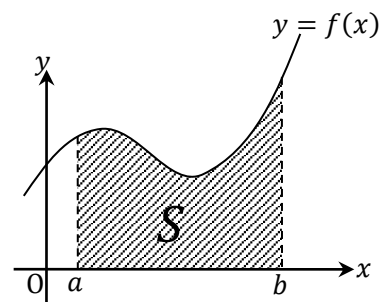
§ 4 定積分

$\int f(x)dx = F(x) + C$ のとき a から b までの**定積分**を次のように表す。

⊛ **定積分** ⊛

関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



これは数Ⅱで学んだように、 $f(x) \geq 0$ のとき、 $y = f(x)$ の $a \leq x \leq b$ の範囲における面積 S を表している。

○ 定積分の性質

定積分には、次のような性質がある。

⊛ **定積分の性質** ⊛

① $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (k は定数)

② $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^a f(x)dx = 0$

④ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

⑤ $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

例題 14 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} dx$ (2) $\int_1^3 \frac{1}{x^2+3x} dx$ (3) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x dx$ (4) $\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$

練習 14 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_1^3 \frac{(x^2-1)^2}{x^4} dx$ (2) $\int_0^1 (x+1-\sqrt{x})^2 dx$ (3) $\int_0^1 \frac{4x-1}{2x^2+5x+2} dx$

(4) $\int_0^\pi (2\sin x + \cos x)^2 dx$ (5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} dx$ (6) $\int_0^{\log 7} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

例題 15 定積分 $I = \int_0^{\pi} |\sin x + \sqrt{3} \cos x| dx$ を求めなさい。

練習 15 次の定積分を求めなさい。

$$(1) \int_0^5 \sqrt{|x-4|} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx$$

$$(3) \int_0^{\pi} |\sqrt{3} \sin x - \cos x - 1| dx$$

例題 16 次のことを証明しなさい。ただし、 m, n は自然数とする。

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & (m+n \text{ が偶数}) \\ \frac{2m}{m^2 - n^2} & (m+n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

練習 16 次の定積分を求めなさい。

$$(1) \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx \quad (m, n \text{ は自然数})$$

$$(2) \int_0^{\pi} \cos mx \cos 2x dx \quad (m \text{ は整数})$$

○ 定積分の置換積分法

例 9 定積分 $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$ を求めなさい。

解①

$x+1=t$ とおくと, $dx=dt$

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \int (t-1)\sqrt{t}dt = \int \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

よって,

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{5}(32-1) - \frac{2}{3}(8-1) = \frac{116}{15}$$

基本的にはこれでよいのだが, 計算の途中で, t で置換したときに, 積分区間も t の範囲に変える ことで, 最後, x の式に戻す必要がなくなる。

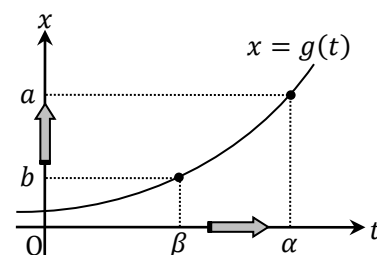
定積分 $\int_b^a f(x)dx$ において, $x=g(t)$ とおくとする。

このとき, x と t に $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$ という対応があれば,

x	b	$\rightarrow$	a
t	β	$\rightarrow$	α

$$\int_b^a f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

というように積分区間も置き換えることで, x に戻す手間が省ける。
この方法で, 先ほどと同じ計算をすると次のようになる。



解②

$x+1=t$ とおくと, $dx=dt$

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = \int_1^4 (t-1)\sqrt{t}dt = \int_1^4 \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

区間も置き換える

$$= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{5}(32-1) - \frac{2}{3}(8-1) = \frac{116}{15}$$

x	0	$\rightarrow$	3
t	1	$\rightarrow$	4

例題 17 次の定積分を求めなさい。

$$(1) \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5-x}} dx \qquad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

練習 17 次の定積分を求めなさい。

$$(1) \int_0^2 x\sqrt{2-x} dx \qquad (2) \int_0^1 \frac{x-1}{(2-x)^2} dx \qquad (3) \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2 - \sin^2 \theta} d\theta \qquad (5) \int_{\log \pi}^{\log 2\pi} e^x \sin e^x dx$$

例題 18 $f(x)$ は連続な関数, a は正の定数とする。

- (1) 等式 $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ を証明しなさい。
- (2) (1)の等式を利用して, 定積分 $\int_0^a \frac{e^x}{e^x + e^{a-x}} dx$ を求めなさい。

練習 18 (1) 連続な関数 $f(x)$ について, 等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ を証明しなさい。

(2) 定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ を求めなさい。

例題 19 (1) 連続な関数 $f(x)$ について, 等式 $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ を示しなさい。

(2) 定積分 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx$ を求めなさい。

練習 19 連続な関数 $f(x)$ は常に $f(x) = f(-x)$ を満たすものとする。

(1) 等式 $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^a f(x) dx$ を証明しなさい。

(2) 定積分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + e^{-x}} dx$ を求めなさい。

○ 定積分の部分積分法

ここでは2通りの計算方法を紹介する。

例 10 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx$ を求めなさい。

まずは原始関数を求めてから、最後に値を代入します。

解①

$$\int x \cos 2x \, dx = x \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \, dx = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx = \left[\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos \pi}{4} - \frac{\cos 0}{4} = -\frac{1}{2}$$

次に、原始関数が確定した部分から値を代入して計算していきます。

$$\int_b^a f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_b^a - \int_b^a F(x)g'(x)dx$$

解②

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx = \left[\underbrace{x \cdot \frac{\sin 2x}{2}}_{\text{ここ}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2} \, dx = 0 + \left[\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$



ここで、先に積分
区間を代入しま
う。

例題 20 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_1^2 \frac{\log x}{x^2} \, dx$

(2) $\int_0^{2\pi} x^2 |\sin x| \, dx$

練習 20 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_0^{\frac{1}{3}} x e^{3x} \, dx$

(2) $\int_1^e x^2 \log x \, dx$

(3) $\int_1^e (\log x)^2 \, dx$

(4) $\int_a^b (x-a)^2(x-b) \, dx$

(5) $\int_0^{2\pi} \left| x \cos \frac{x}{3} \right| \, dx$

例題 21 a は 0 でない定数とし、 $A = \int_0^{\pi} e^{-ax} \sin 2x \, dx$, $B = \int_0^{\pi} e^{-ax} \cos 2x \, dx$ とする。このとき、 A , B の値をそれぞれ求めなさい。

練習 21 (1) $\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$ を求めなさい。

(2) (1)の結果を用いて、 $\int_0^{\pi} x e^{-x} \sin x \, dx$ を求めなさい。

例題 22 (1) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ のとき、 $y = f(x)$ の逆関数を $y = g(x)$ を求めなさい。

(2) (1)の $f(x)$, $g(x)$ に対し、次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = bf(b) - af(a)$$

練習 22 a を正の定数とする。任意の実数 x に対して、 $x = a \tan y$ を満たす y $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ を対応させる

関数を $y = f(x)$ とするとき、 $\int_0^a f(x) dx$ を求めなさい。

§5 いろいろな定積分

ここでは定積分の計算において重要な手法をいくつか紹介する。

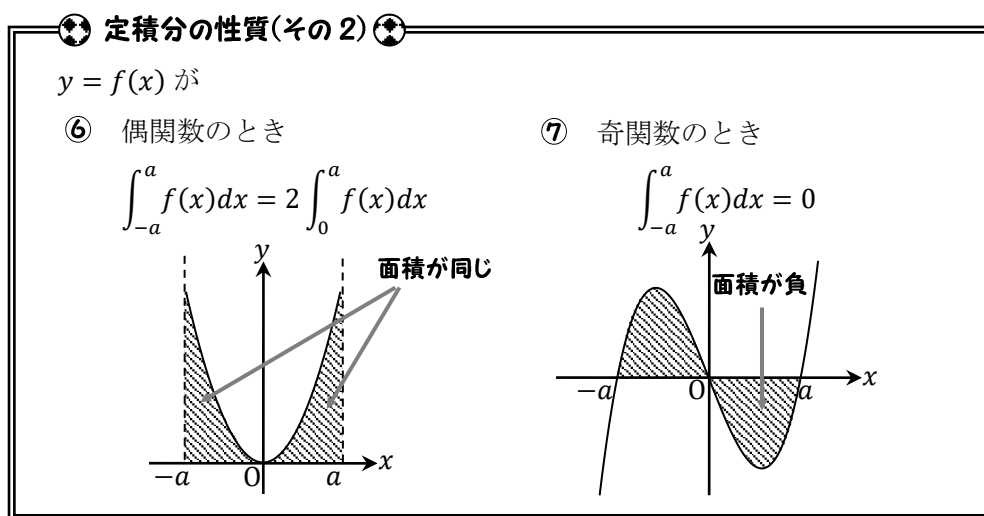
○ 偶奇に関する定積分

定積分の計算をするときに、被積分関数の**偶奇性に注目**すると計算が楽になる。

ちなみに、 $y = f(x)$ が…

偶関数であるとは、グラフが **y 軸に関して対称**で、 $f(x) = f(-x)$ が成り立つことであり、

奇関数であるとは、グラフが **原点に関して対称**で、 $-f(x) = f(-x)$ が成り立つことである。



ここで⑥の偶関数の場合を、置換積分法を用いて証明しておこう。

証明 まず、 $\int_{-a}^a f(x)dx$ を以下のように分ける

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx$$

x	$-a$	$\rightarrow$	0
t	a	$\rightarrow$	0

ここで、 $\int_{-a}^0 f(x)dx$ について考える。 $x = -t$ とおくと、 $dx = -dt$ より、

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 -f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt \quad (\because f(x) \text{ は偶関数})$$

以上より、

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(x)dx$$

⑦の奇関数の場合も同様に証明することができる。

例 11 定積分 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1)^2 \sin x \, dx$ を求めなさい。

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x+1)^2 \sin x \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x^2 + 2x + 1) \sin x \, dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{(x^2 \sin x)}_{\text{奇関数}} + \underbrace{2x \sin x}_{\text{偶関数}} + \underbrace{\sin x}_{\text{奇関数}} \, dx \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2x \sin x \, dx \\
 &= 4[x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\cos x) \, dx \\
 &= -\frac{2}{3}\pi + 4[\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{3}\pi + 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

偶奇性の判断は

(偶関数) $\times$ (偶関数) = (偶関数)

(偶関数) $\times$ (奇関数) = (奇関数)

(奇関数) $\times$ (奇関数) = (偶関数)

と考えると早い。



例題 23 次の定積分を求めなさい。(1)では a は定数とする。

(1) $\int_{-a}^a \frac{x^3}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + \cos x)^3 \, dx$

練習 28 次の定積分を求めなさい。(2)では a は定数とする。

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin t + 3 \cos t)^2 \, dt$

(2) $\int_{-a}^a x \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos x + x^2 \sin x) \, dx$

○ 特殊な置換積分

ここでは特殊な置換をする積分を紹介する。とても有名な形なのでしっかりと覚えておこう。

① $\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin \theta$ とおく

例 12 定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$) を求めなさい。

解①

$x = a \sin \theta$ とおくと, $dx = a \cos \theta d\theta$

よって,

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta$$

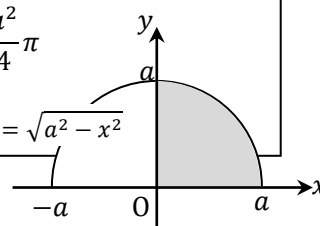
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \cos \theta| \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = a^2 \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4} \pi$$

x	$0 \rightarrow a$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

これは結局、半径 a の円の面積の4分の1を表しています。これに気づけばわざわざ計算する必要はありませんね。



この問題の場合、積分区間の選び方は1通りではありません。この問題のように、0付近で選んでおくのが最も簡単なのですが、ここでは試しに別の区間で計算してみましょう。

解②

$x = a \sin \theta$ とおくと, $dx = a \cos \theta d\theta$

よって,

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |a \cos \theta| \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2 \cos^2 \theta d\theta = a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = a^2 \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{a^2}{4} \pi$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

x	$0 \rightarrow a$
θ	$\pi \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき,
 $|\cos \theta| = -\cos \theta$
 となります。ここが、
 先ほどの計算との違いです。



これを見ても分かる通り、積分区間のとり方はいろいろありますが、計算の手間を考えると、なるべくシンプルな区間を選んだほうがいいわけです。

② $\frac{1}{x^2 + a^2} \Rightarrow x = a \tan \theta$ とおく

例 13 定積分 $\int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ ($a > 0$) を求めなさい。

$x = a \tan \theta$ とおくと, $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} \cdot \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \cdot \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta = \frac{1}{a} [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow a$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

③ $\sqrt{x^2 + A} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおく

例 14 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ を求めなさい。

解①

$x + \sqrt{x^2 + 1} = t$ とおく。

$\sqrt{x^2 + 1} = t - x$ より, 両辺 2 乗して整理すると, $x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \dots (*)$

これより, $dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 + 1}{t^2} \right) dt$

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} \right) + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{t^2 + 1}{t} \right)^2} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

以上より,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{2t}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 + 1}{t^2} \right) dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C \quad (\because t > 0)$$

$x + \sqrt{x^2 + A} = t$ とおく理由

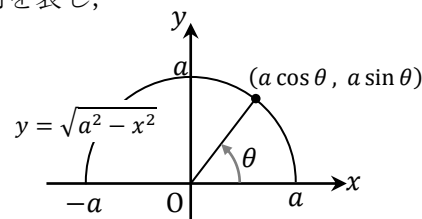
被積分関数に $\sqrt{x^2 + A}$ が含まれているときには、 $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ と置くことで、計算できるが、
「なぜ、こんな変な置き方をするの？」 と思った人も多いのではないだろうか。

ここでは、この置き方をする理由を探っていこう。

まず、被積分関数に $\sqrt{a^2 - x^2}$ が含まれるときは $x = a \sin \theta$ と置くとよいわけだが、この理由は何となく分かる人も多いだろう。それは、 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ が原点中心、半径 a の半円を表し、

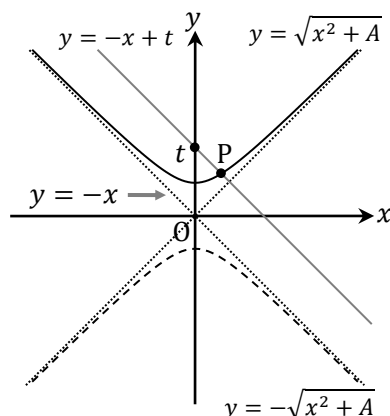
その**媒介変数表示**が $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}$ となることからきている。ここでは、

計算がしやすさから、 $x = a \sin \theta$ という置き換えをしているが、
 当然 $x = a \cos \theta$ と置いてもよいわけである。



そして、 $x + \sqrt{x^2 + A} = t$ と置く理由も、実はこれと同じである。
 $y = \sqrt{x^2 + A}$ は双曲線の上側を表しているの、その**媒介変数表示**を
 考えることで、この置き換えの意味が見えてくる。

双曲線 $y = \sqrt{x^2 + A}$ …① と、漸近線 $y = -x$ に平行な直線
 $y = -x + t$ …② の交点を P とすると、 y 切片 t の値 1 つに対し、
 交点 P もただ 1 つに定まるので、点 P の座標が双曲線の媒介変数表示
 となるのである。



つまり、①、②式より y を消去した方程式

$$\sqrt{x^2 + A} = -x + t \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + A} = t \quad \dots \textcircled{3}$$

により、双曲線の媒介変数表示が求まる。そしてこの方程式③こそが、
 この置き換えの理由となる。なお、**例 14** の解答中に出てくる (*) 式は双曲線上の任意の点の x 座標を表している。

また、(*) 式の t を e^θ とおくと、双曲線 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ の媒介変数表示は $x = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$, $y = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$

となる。つまり**例 14** は、 $x = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$ と置換しても解くこともできる。

解②

$x = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$ とおくと、

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} - 2}{4} + 1} = \sqrt{\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^2} = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

$$dx = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} d\theta \text{ より, } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{1}{\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}} \cdot \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} d\theta = \int 1 d\theta = \theta + C$$

$$x = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \Leftrightarrow 2x = e^\theta - e^{-\theta} \Leftrightarrow e^{2\theta} - 2xe^\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\theta = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$e^\theta > 0 \text{ より, } e^\theta = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow \theta = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\text{よって, } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

例題 24 次の定積分を求めなさい。(1)で a は正の定数とする。

$$(1) \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - x^2} dx \qquad (2) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

練習 24 次の定積分を求めなさい。

$$(1) \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx \qquad (2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} \qquad (3) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

例題 25 次の定積分を求めなさい。

$$(1) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 3} \qquad (2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

練習 25 次の定積分を求めなさい。

$$(1) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1} \qquad (2) \int_1^4 \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} \qquad (3) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}}$$

例題 26 次の不定積分を求めなさい。

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \qquad (2) \int \sqrt{x^2 + 1} dx$$

練習 26 次の不定積分を求めなさい。ただし、(1)、(2)では $a \neq 0$ とする。

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \qquad (2) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx \qquad (3) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

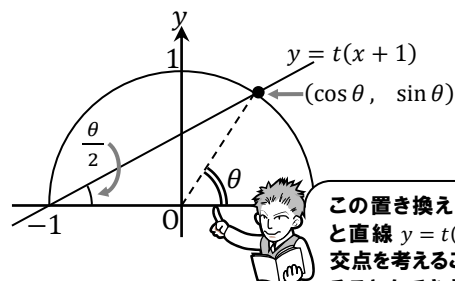
④ $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおく

このように置くことで、三角関数が次のように式変形できる。

$$\cos \theta = \cos 2 \cdot \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\tan \theta = \tan 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\sin \theta = \cos \theta \cdot \tan \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \cdot \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2t}{1 + t^2}$$



この置き換えは単位円と直線 $y = t(x + 1)$ の交点を考えることで求めることもできます。確認してみましょう。

これにより、三角関数の積分が**有理関数の積分**に帰着できるわけです。

例 15 定積分 $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx$ を求めなさい。

解①

$\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと、

$$dt = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{1 + \cos x} dx = \frac{1}{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} dx = \frac{1 + t^2}{2} dx \Leftrightarrow dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

これより、 $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1 - t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} \right) dt = \left[\log \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \log(2 + \sqrt{3})$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$
t	$0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$

解②

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$\sin x = t$ とおくと、 $\cos x dx = dt$

これより、 $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1 - t^2} dt$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1 - t)(1 + t)} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right) dt = \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \log(2 + \sqrt{3})$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$
t	$0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

○ 定積分と漸化式

定積分を漸化式ととらえることで、見通しがよくなるものがある。

例 16 定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ (n は 0 以上の整数) を求めなさい。

$n \geq 2$ のとき, $\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x$ として部分積分をする。

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x \, dx = [(-\cos x) \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \right\} \\
 &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \qquad \text{よって, } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}
 \end{aligned}$$

$$\text{これより, } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} I_{n-6} = \dots$$

$$\text{と次数下げをしていくと, } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{から}$$

(i) n が偶数のとき

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(ii) n が奇数のとき

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$\cos^n x$ の定積分に関しては次のように考えるとよい。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx \quad \cdots (*)$$

$$\text{ここで } \frac{\pi}{2} - x = t \text{ とおくと } -dx = dt \text{ より } (*) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n t \cdot (-1) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$$

$$\text{これより, } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \text{ となる。}$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$



これは『ウォリスの積分公式』という有名な公式です。 $\sin^n x$, $\cos^n x$ のどちらでも成り立ちます。

n が偶数のときと、奇数のときで結果が異なりますが、最後の $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ さえ覚えておけば使えるようになるでしょう。

例題 27 (1) $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ (m, n は 0 以上の整数) とする。このとき、等式 [1], [2] を示しなさい。

$$[1] \quad I_{m,n} = I_{n,m} \qquad [2] \quad I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \quad (n \geq 2)$$

(2) 上記の等式を利用して、次の定積分を求めなさい。

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^3 x dx$

② $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^7 x dx$

練習 27 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ (n は自然数) とする。 $n \geq 3$ のときの I_n を、 n, I_{n-2} を用いて表しなさい。
また、 I_3, I_4 を求めなさい。

§ 6 定積分で表された関数

ここでは、定積分で表された関数について、以下の3つのパターンに分けて学んでいく。

① 積分区間に変数を含むとき

積分区間に変数を含む場合は、いきなり積分の計算をするのではなく、**まず微分をしてその関数の正体を探っていく**ことがポイントとなる。

$$\int f(t)dt = F(t) + C \text{ のとき, } \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = F(g(x)) - F(h(x)) \text{ より}$$

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx} \{F(g(x)) - F(h(x))\} = \underbrace{f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)}_{\text{合成関数の微分}}$$

となる。つまり、

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

また、この式において、 $g(x) = x$, $h(x) = a$ (定数) とおくと

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

となり、これは微分と積分が互いに逆演算であるということを主張する重要な式である。

例 17 次の関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を微分しなさい。

$$f(x) = \int_1^x (\sin t - \cos t)dt, \quad g(x) = \int_{2x+1}^{x^2} \log t dt, \quad h(x) = \int_0^x x e^t dt$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x (\sin t - \cos t)dt = \sin x - \cos x$$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \int_{2x+1}^{x^2} \log t dt = \underbrace{\log x^2 \cdot 2x}_{x^2 \text{ の微分}} - \underbrace{\log(2x+1) \cdot 2}_{2x+1 \text{ の微分}} = 2x \log x^2 - 2 \log(2x+1)$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \underbrace{x e^t dt}_{\text{ } x \text{ は } x \text{ の関数として扱う}} = \frac{d}{dx} x \int_0^x e^t dt = \int_0^x e^t dt + x e^x = [e^t]_0^x + x e^x = e^x + x e^x - 1$$



ここで t に x を代入して、答え『 $x e^x$ 』としてはいけません。 x も $\int_0^x e^t dt$ も x の式ですから、積の微分をします。

② 積分区間が定数のとき

この場合、定積分の結果は定数となるので、**文字 C で置き換える**と見通しがよくなる。

例えば、下の式も一見複雑そうに見えるが、文字で置き換えるとただの2次関数となるので、**実は単純な式**であることがわかる。

$$f(x) = x^2 + \underbrace{\int_b^a f(t)dt}_{C \text{ とおくと}} = x^2 + C \Rightarrow \text{2次関数に!}$$

例 18 $f(x) = e^x + 2 \int_0^1 f(t)(x+t)dt$ を満たすとき, $f(x)$ を求めなさい。

$$f(x) = e^x + 2 \int_0^1 f(t)(x+t)dt = e^x + 2x \int_0^1 f(t)dt + 2 \int_0^1 tf(t)dt$$

$$\int_0^1 f(t)dt = A, \quad \int_0^1 tf(t)dt = B \quad \text{とおくと,} \quad f(x) = e^x + 2Ax + 2B$$

$$\text{これより, } A = \int_0^1 (e^t + 2At + 2B)dt = [e^t + At^2 + 2Bt]_0^1 = e - 1 + A + 2B \quad \text{よって, } B = \frac{1-e}{2}$$

$$\text{また, } B = \int_0^1 (te^t + 2At^2 + 2Bt)dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt + \left[\frac{2}{3}At^3 + Bt^2 \right]_0^1$$

$$= e - [e^t]_0^1 + \frac{2}{3}A + B = 1 + \frac{2}{3}A + B \quad \text{よって, } A = -\frac{3}{2}$$

$$\text{以上より, } f(x) = e^x - 3x + 1 - e$$



定積分の中に x が含まれているので,

$\int_0^1 f(t)(x+t)dt = A$
とおくことはできません。
よくある間違いなので注意が必要です。

例題 28 次の関数を微分しなさい。

$$(1) \quad f(x) = \int_0^x (t-x) \sin t \, dt$$

$$(2) \quad f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\log t} \, dt \quad (x > 0)$$

練習 28 次の関数を微分しなさい。ただし, (3)では $x > 0$ とする。

$$(1) \quad y = \int_0^x (x-t)^2 e^t \, dt$$

$$(2) \quad y = \int_x^{x+1} \sin \pi t \, dt$$

$$(3) \quad y = \int_x^{x^2} \log t \, dt$$

例題 29 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。(2)では, 定数 a の値も求めなさい。

$$(1) \quad f(x) = 3x + \int_0^\pi f(t) \sin t \, dt$$

$$(2) \quad \int_a^x (x-t)f(t) \, dt = \log x - x + 1$$

練習 29 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

$$(1) \quad f(x) = \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \, dt$$

$$(2) \quad f(x) = e^x \int_0^1 \frac{1}{e^t + 1} \, dt + \int_0^1 \frac{f(t)}{e^t + 1} \, dt$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2}x + \int_0^x (t-x) \sin t \, dt$$

例題 30 $-2 \leq x \leq 2$ のとき, 関数 $f(x) = \int_0^x (1-t^2)e^t \, dt$ の最大値・最小値と, そのときの x の値を求めなさい。

練習 30 $f(x) = \int_0^x e^t \cos t \, dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ の最大値とそのときの x の値を求めなさい。

③ 被積分関数に複数の文字をもつとき

被積分関数に複数の文字が含まれている場合は、**どの文字が積分変数なのかを見極めることがポイント**となる。例えば下の式では

$$\int_b^a \underbrace{f(x, t) dt}_{\text{ここに注目!}}$$

最後の dt に注目すると、文字 t に関する定積分と分かり、最終的に x の関数になる。

例 19 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - tx)^2 dx$ の最小値を求めなさい。

最後の dx というところに注目することで、これは t に関して最小値を考えればよいことが分かる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - tx)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + t^2 x^2 - 2tx \sin x) dx \quad \cdots (*)$$

$$\text{ここで, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ の公式利

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 x^2 dx = \left[\frac{t^2 x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24} t^2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2tx \sin x dx = 2t[-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2t$$

$$\text{よって, } (*) \Leftrightarrow \frac{\pi^3}{24} t^2 - 2t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{24} \left(t - \frac{24}{\pi^3} \right)^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{24}{\pi^3}$$

$$\text{以上より, } t = \frac{24}{\pi^3} \text{ のとき, 最小値 } \frac{\pi}{4} - \frac{24}{\pi^3}$$

例題 31 (1) 定積分 $I(a) = \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2} x - ax \right)^2 dx$ を求めなさい。

(2) $I(a)$ の値を最小にする a の値を求め、そのときの積分の値 I を求めなさい。

練習 31 $I = \int_0^{\pi} (x + a \cos x)^2 dx$ について、次の問いに答えなさい。

(1) I を a の関数で表しなさい。

(2) I の最小値とそのときの a の値を求めなさい。

例題 32 実数 t が $1 \leq t \leq e$ の範囲を動くとき、 $S(t) = \int_0^1 |e^x - t| dx$ の最大値と最小値を求めなさい。

練習 32 $x > 0$ のとき、関数 $f(x) = \int_0^1 \left| \log \frac{t+1}{x} \right| dt$ の最小値を求めなさい。

§7 区分求積法

曲線 $y = x^2$ と直線 $x = 1$ および x 軸によって囲まれた部分の面積(【図1】斜線部)は

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるが、これは次のような方法でも求めることができる。

区間 $[0, 1]$ を【図2】のように n 等分し、 n 個の長方形に分割すると

左から k 番目の長方形の面積は $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$ となる。よって、各長方形の

面積の総和は

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

となる。ここで、 $n \rightarrow \infty$ とすると、長方形の面積の総和は放物線と x 軸で囲まれた部分の面積に限りなく近くなる。実際、計算してみると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり、極限值②と定積分①が一致する。つまり、以下の関係式が成り立つことが分かる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2 dx$$

一般的に、連続な関数 $y = f(x)$ においても、区間 $[a, b]$ を n 等分し、 n 個の長方形に分割することで、右図の斜線部分の面積を、極限を用いて表すことができる。

区間 $[a, b]$ を n 等分するので、各長方形の横の長さが $\frac{b-a}{n}$

となるので、左から k 番目の長方形の面積は $\frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)$

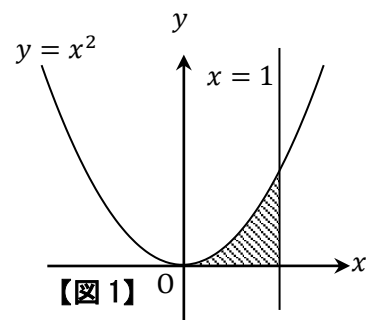
と表すことができる。よって、以下の関係式が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) = \int_a^b f(x) dx$$

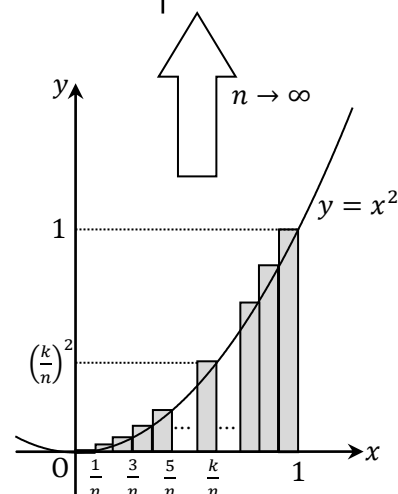
このように細かく分割することで面積や体積を考える方法を **区分求積法** という。

特に $a = 0$, $b = 1$ のときは次のようになる。

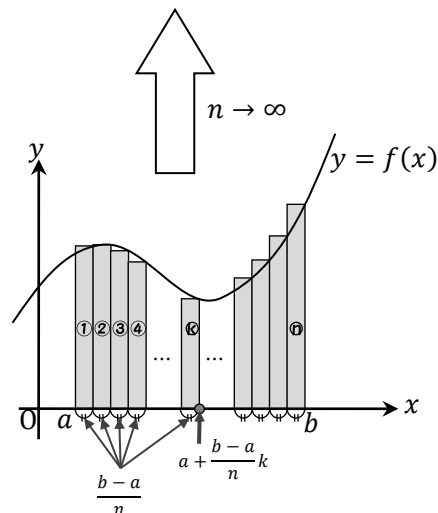
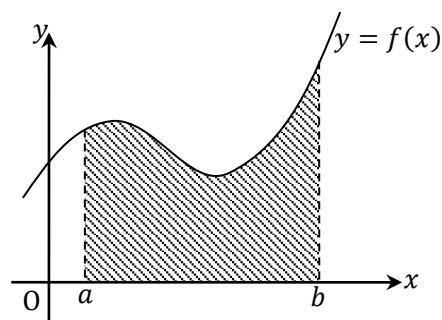
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$



【図1】



【図2】



例 20 極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3} + \frac{2\sqrt{n^2+2^2}}{n^3} + \frac{3\sqrt{n^2+3^2}}{n^3} + \cdots + \frac{\sqrt{2}}{n} \right)$ を求めなさい。

この形のままだと分かりにくいので、まずは Σ を用いて表すことから始めます。

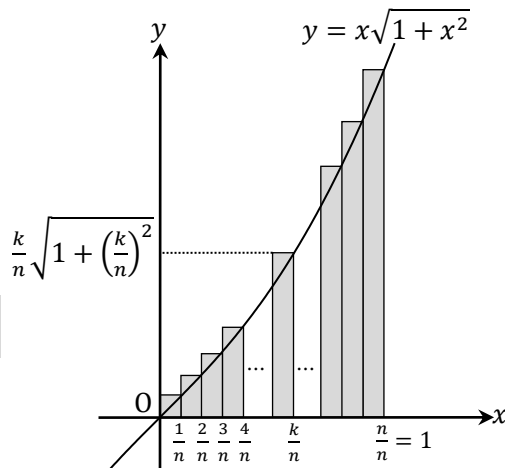
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\sqrt{n^2+k^2}}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx$$

積分の準公式②
 $\int \{f(x)\}^n f'(x) dx$

$$= \frac{1}{3} \left[(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$



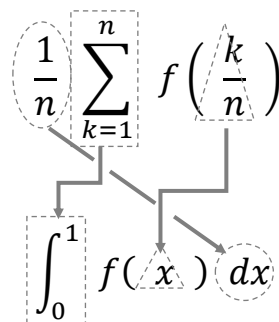
区分求積法を使うためのポイントは、右のような対応を意識することである。

$n \rightarrow \infty$ となることで、 $\frac{1}{n}$ が x 方向の微小な変化を表す dx に変わり、

有限個の和を表す Σ が $\int$ に変わり、そして $\frac{k}{n}$ が変数 x に対応する。

式変形の第一歩として、まず $\frac{k}{n}$ を作ることを目指すことがポイントとなる。

機械的な計算で終わるのではなく、**式の意味を考えながら計算する**ことが大切である。



例題 33 次の極限值を求めなさい。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{n^4} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(k+n)^2(k+2n)}$$

練習 33 次の極限值を求めなさい。

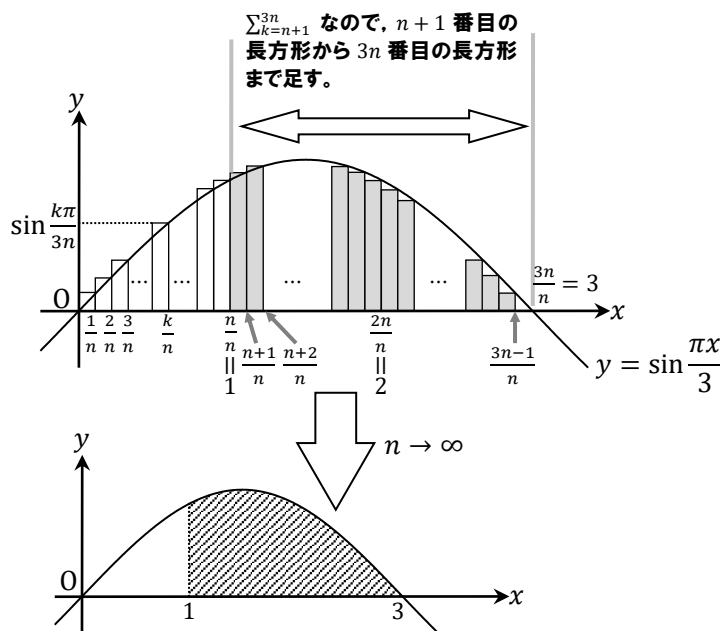
$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + 3e^{\frac{3}{n}} + \cdots + ne^{\frac{n}{n}} \right)$$

例 21 極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{3n} \sin \frac{k}{3n} \pi$ を求めなさい。

k の範囲が例 20 と違います。式の意味をしっかりと考えましょう。

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{3n} \sin \frac{k}{3n} \pi = \int_1^3 \sin \frac{\pi x}{3} dx \\ &= -\frac{3}{\pi} \left[\cos \frac{\pi x}{3} \right]_1^3 \\ &= -\frac{3}{\pi} \left(-1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{9}{2\pi} \end{aligned}$$



例題 34 次の極限值を求めなさい。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{3n+k}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

練習 34 次の極限值を求めなさい。(2)では $p > 0$ とする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \left(\frac{3}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{3n}{n} \right)^2 \right\}$

(2) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p + (n+2)^p + \cdots + (n+2n)^p}{1^p + 2^p + \cdots + (2n)^p}$

例題 35 長さ 2 の線分 AB を直径とする半円周を点 $A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = B$ で n 等分する。

(1) $\triangle AP_k B$ の 3 辺の長さの和 $AP_k + P_k B + BA$ を $l_n(k)$ とおく。 $l_n(k)$ を求めなさい。

(2) 極限值 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n(1) + l_n(2) + \cdots + l_n(n)}{n}$ を求めなさい。

練習 35 曲線 $y = \sqrt{4-x}$ を C とする。 t ($2 \leq t \leq 3$) に対して、曲線 C 上の点 $(t, \sqrt{4-t})$ と原点、点 $(t, 0)$ の

3 点を頂点とする三角形の面積を $S(t)$ とする。区間 $[2, 3]$ を n 等分し、その端点と分点を小さい方から

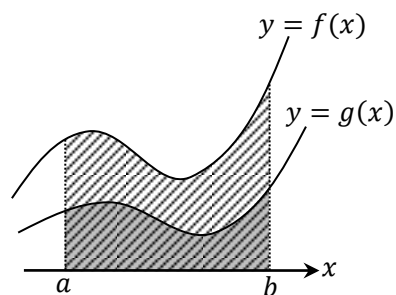
順に、 $t_0 = 2, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = 3$ とするとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S(t_k)$ を求めなさい。

§ 8 定積分と不等式

区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

が成立している。これは右図のように面積を比較すれば明らかであろう。等号は区間 $[a, b]$ で常に $f(x) = g(x)$ が成立しているときである。

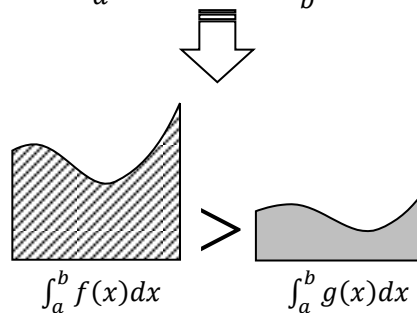


例えば…

$2 \leq x \leq 3$ のとき, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{3} dx &< \int_2^3 \frac{1}{x} dx < \int_2^3 \frac{1}{2} dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} < [\log x]_2^3 < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} < \log \frac{3}{2} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成立している。



例題 36 (1) 次の不等式を証明しなさい。

(ア) $0 < x < \frac{1}{2}$ のとき, $1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(イ) $\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{\pi}{6}$

(2) 不等式 $\int_0^a e^{-t^2} dt \geq a - \frac{a^3}{3}$ を証明しなさい。ただし, $a \geq 0$ とする。

練習 36 (1) 次の不等式を証明しなさい。

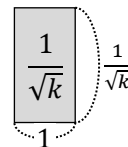
(ア) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ のとき, $1 < \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

(イ) $\frac{\pi}{4} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}} < 2 - \sqrt{4-\pi}$

(2) $x > 0$ のとき, 不等式 $\int_0^x e^{-t^2} dt < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$ を証明しなさい。

例 22 不等式 $2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ を証明しなさい。

慣れないうちは難しく感じるかもしれませんが、 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ を $1 \times \frac{1}{\sqrt{k}}$ と見ることで長方形の面積の和が見えてきます。ここから、定積分の不等式に持ち込もうという発想になるわけです。



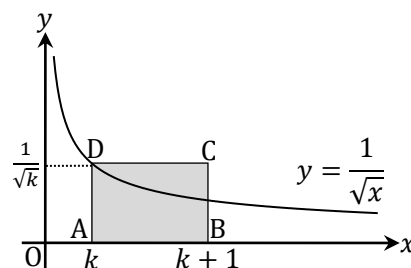
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ とおくと, } f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} < 0$$

よって、 $y = f(x)$ は単調減少。

右図のように 4 点 A, B, C, D を定めると、

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < (\text{四角形 ABCD の面積})$$

$$\text{これより, } \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{k}}$$



この不等式の両辺に $k = 1, 2, \dots, n$ を代入し、辺々を加えると、

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \cdots (*)$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^{n+1} = 2(\sqrt{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$\text{よって, } (*) \Leftrightarrow 2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

以上より、不等式は成り立つ。

例題 37 n は 2 以上の自然数とする。次の不等式を証明しなさい。

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n + 1$$

練習 37 次の不等式を証明しなさい。ただし、 n は自然数とする。

$$(1) \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$$

$$(2) \quad 2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

例題 38 自然数 n に対して, $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx$ とする。

- (1) a_1 を求めなさい。 (2) a_{n+1} と a_n で表しなさい。 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めなさい。

練習 38 自然数 n に対して, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$ とする。

- (1) I_1 を求めなさい。また, $I_n + I_{n+1}$ を n で表しなさい。
 (2) 不等式 $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示しなさい。
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ が成り立つことを示しなさい。

例題 39 次の極限值を求めなさい。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x t e^{-t} \, dt$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{1+3\cos^2 t} \, dt$

練習 39 (1)(ア) $1 \leq x \leq e$ において, 不等式 $\log x \leq \frac{x}{e}$ が成り立つことを示しなさい。

(イ) 自然数 n に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^e x^2 (\log x)^n \, dx$ を求めなさい。

- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \int_0^x t e^{t^2} \, dt$ を求めなさい。

例題 40 $f(x)$, $g(x)$ はともに区間 $a \leq x \leq b$ ($a < b$) で定義された連続な関数とする。このとき, 不等式

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right\}^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx \cdot \int_a^b \{g(x)\}^2 \, dx$$

が成立することを示しなさい。また, 等号はどのようなときに成立するかを述べなさい。

練習 40 関数 $f(x)$ が区間 $[0, 1]$ で連続で常に正であるとき, 次の不等式を証明しなさい。

- (1) $\left\{ \int_0^1 f(x) \, dx \right\} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{f(x)} \, dx \right\} \geq 1$ (2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2 e^x} \, dx \geq \frac{1}{e-1}$

例題 41 $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, $\alpha = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ とする。 $|a_n - \alpha| \leq \int_0^1 x^n dx$ であることを示し,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めなさい。

練習 41 自然数 n に対して, $R_n(x) = \frac{1}{1+x} - \{1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n\}$ とする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 R_n(x^2) dx$ を求めなさい。

(2) 無限級数 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ の和を求めなさい。

例題 42 (1) 2 以上の自然数 n に対して, 次の不等式を証明しなさい。

$$n \log n - n + 1 < \log(n!) < (n+1) \log(n+1) - n$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n \log n - n}$ を求めなさい。

練習 42 n を 2 以上の自然数とする。

(1) 定積分 $\int_1^n x \log x dx$ を求めなさい。

(2) 次の不等式を証明しなさい。

$$\frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{4} (n^2 - 1) < \sum_{k=1}^n k \log k < \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{4} (n^2 - 1) + n \log n$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \cdots \cdot n^n)}{n^2 \log n}$ を求めなさい。

§9 面積

数学Ⅱで学んだように、定積分を計算することによって面積を求めることができる。

右図のように、 $y = f(x)$ と x 軸、および2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積は

$$f(x) \geq 0 \text{ のとき} \quad S_1 = \int_a^b f(x) dx$$

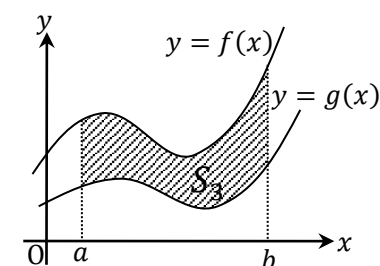
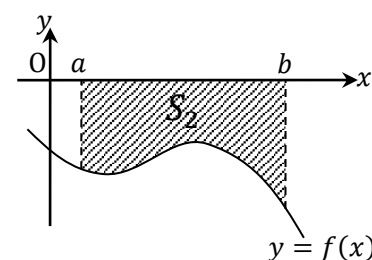
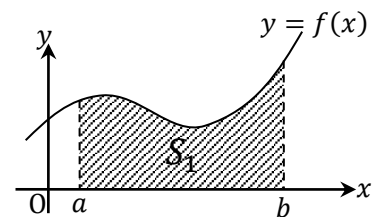
$$f(x) \leq 0 \text{ のとき} \quad S_2 = -\int_a^b f(x) dx$$

となる。

また、区間 $[a, b]$ において、常に $f(x) \geq g(x)$ のとき、この2曲線に囲まれた部分の面積は

$$S_3 = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

となる。



x 軸が $y = 0$ と表せることを考えると、面積を求める式は

$$S = \int_a^b \left(\begin{array}{c} \text{上にある} \\ \text{グラフ} \end{array} - \begin{array}{c} \text{下にある} \\ \text{グラフ} \end{array} \right) dx$$

とまとめることができます。常に、グラフの上下を意識して、解くことが必要です。



例 23 2 曲線 $y = \sin x$, $y = \sin 3x$ ($0 \leq x \leq \pi$) によって囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

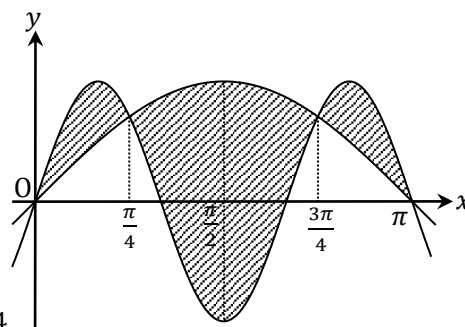
2 曲線の交点の x 座標は

$$\sin x = \sin 3x \Leftrightarrow 4 \sin^3 x - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x (2 \sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ より, } x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$$

右図斜線部分は、 $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称なので、

$$\begin{aligned} S &= 2 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 3x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sin 3x) dx \right\} \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2 \left[-\cos x + \frac{1}{3} \cos 3x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\sqrt{2} - 4}{3} \end{aligned}$$



例題 43 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

(1) $y = -\cos^2 x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, x 軸, y 軸 (2) $y = (3-x)e^x$, $x=0$, $x=2$, x 軸

練習 43 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

(1) $y = -x^4 + 2x^3$ (2) $y = x + \frac{4}{x} - 5$ (3) $y = 10 - 9e^{-x} - e^x$

例題 44 区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ において, 2 つの曲線 $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。

練習 44 次の曲線または直線で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

(1) $y = \sqrt{3} \cos x$, $y = \sin 2x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ (2) $y = \log \frac{3}{4-x}$, $y = \log x$
 (3) $y = xe^x$, $y = e^x \ (0 \leq x \leq 1)$, $x=0$ (4) $y = (\log x)^2$, $y = \log x^2 \ (x > 0)$

例題 45 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

(1) $y = e \log x$, $y = -1$, $y = 2e$, y 軸
 (2) $y = -\cos x \ (0 \leq x \leq \pi)$, $y = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, y 軸

練習 45 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

(1) $x = y^2 - 2y - 3$, $y = -x - 1$
 (2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 1$, $y = \frac{1}{2}$, y 軸
 (3) $y = \tan x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \sqrt{3}$, $y = 1$, y 軸

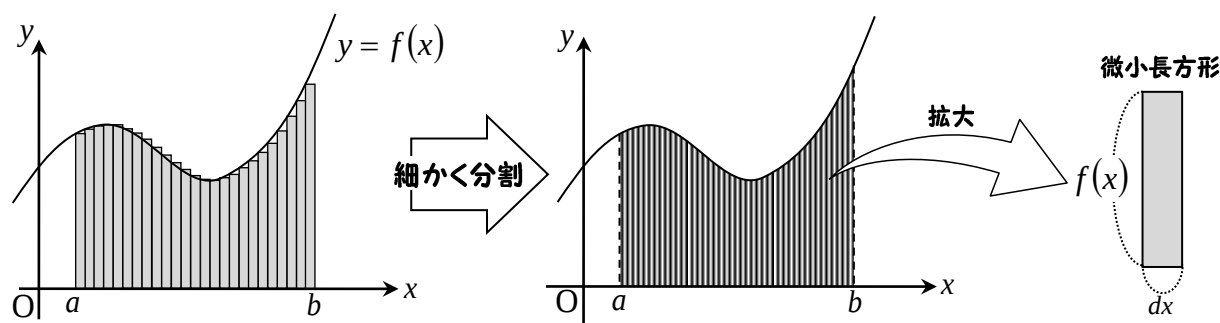
例題 46 曲線 $y = \log x$ が曲線 $y = ax^2$ と接するように正の定数 a の値を定めなさい。また, そのとき, これらの曲線と x 軸で囲まれる図形の面積を求めなさい。

練習 46 e は自然対数の底, a , b , c は実数である。放物線 $y = ax^2 + b$ を C_1 とし, 曲線 $y = c \log x$ を C_2 とする。 C_1 と C_2 が点 $P(e, e)$ で接しているとき

- (1) a , b , c の値を求めなさい。
 (2) C_1 , C_2 および x 軸, y 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

○ 積分記号の意味

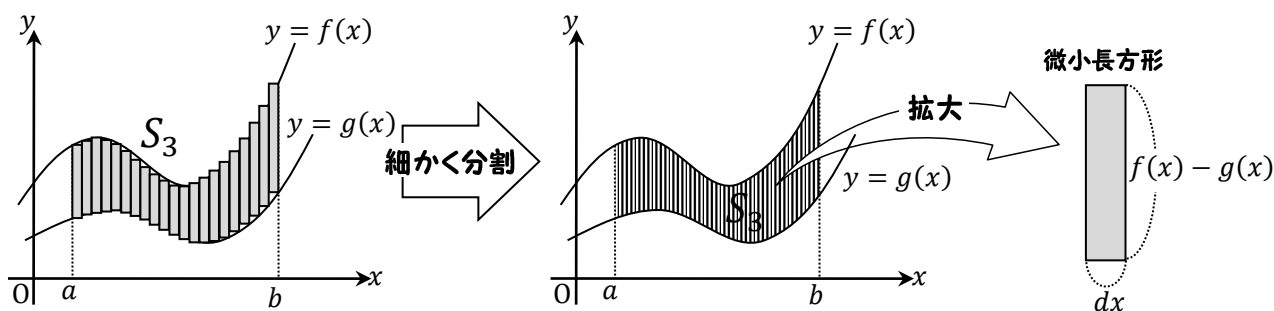
そもそも積分における面積の計算は、曲線に囲まれた図形を長方形に分割することからはじまり、その分割を細かくすることで、より正確な面積を求めることができる。



定積分の記号 $\int_a^b f(x)dx$ は $f(x)dx$ を微小な長方形の面積とし、それをインテグラル記号 $\int_a^b$ を用いて足して(Sum)いると考えるとよい。

$$\text{Sum} \Rightarrow \sum \Rightarrow \sum \Rightarrow \sum \Rightarrow \int \Rightarrow \int_a^b \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{縦}} \times \underbrace{dx}_{\text{横}}}^{\text{微小長方形の面積}}$$

2 曲線で挟まれた部分の面積 S_3 も同様に微小長方形に注目して考えると見通しがよくなります。



これより、次の式が導かれるのも納得がいくであろう。

$$S_3 = \int_a^b \overbrace{\underbrace{\{f(x) - g(x)\}}_{\text{縦}} \times \underbrace{dx}_{\text{横}}}^{\text{微小長方形の面積}}$$

○ 陰関数で表される図形の面積

陰関数はまず y について解き、グラフの概形を調べることから始めます。

例 24 曲線 $4x^2 - y^2 = x^4$ によって囲まれた部分の面積を求めなさい。

$$4x^2 - y^2 = x^4 \Leftrightarrow y^2 = x^2(4 - x^2) \Leftrightarrow y = \pm x\sqrt{4 - x^2}$$

$$4 - x^2 \geq 0 \text{ より, } -2 \leq x \leq 2$$

$y = x\sqrt{4 - x^2}$ と $y = -x\sqrt{4 - x^2}$ は x 軸に関して対称なグラフで、さらに奇関数。

よって、 $y = x\sqrt{4 - x^2}$ の $0 \leq x \leq 2$ の部分を調べればよい。

$$y' = \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \text{ より増減表は以下のようになる。}$$

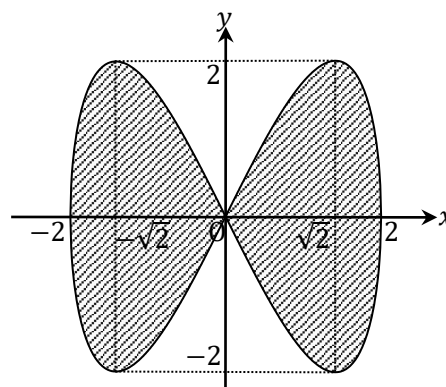
x	0	...	$\sqrt{2}$	...	2
y'	+	+	0	-	/
y	0	↗	2	↘	0

増減表と対称性を考えるとグラフは右のようになる。

これより、求める面積は、

$$4 \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2} dx = -\frac{4}{3} \left[(4 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

積分の準公式②
 $\int \{f(x)\}^n f'(x) dx$



例題 47 2つの楕円 $x^2 + 3y^2 = 4$...①, $3x^2 + y^2 = 4$...② がある。

- (1) 2つの楕円の4つの交点の座標を求めなさい。
- (2) 2つの楕円の内部の重なった部分の面積を求めなさい。

練習 47 次の面積を求めなさい。

- (1) 連立方程式 $x^2 + y^2 \leq 4$, $xy \geq \sqrt{3}$, $x > 0$, $y > 0$ で表される領域の面積
- (2) 2つの楕円 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ の内部の重なった部分の面積

例題 48 曲線 $(x^2 - 2)^2 + y^2 = 4$ で囲まれる部分の面積 S を求めなさい。

練習 48 次の図形の面積 S を求めなさい。

- (1) 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形
- (2) 曲線 $y^2 = (x + 3)x^2$ で囲まれた図形
- (3) 曲線 $2x^2 - 2xy + y^2 = 4$ で囲まれた図形

○ パラメータで表される図形の面積

まずはパラメータを用いて表された図形がどのような概形になるのかを調べます。

例 25 曲線 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$) および x 軸によって囲まれた部分の面積を求めなさい。

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta \text{ より,}$$

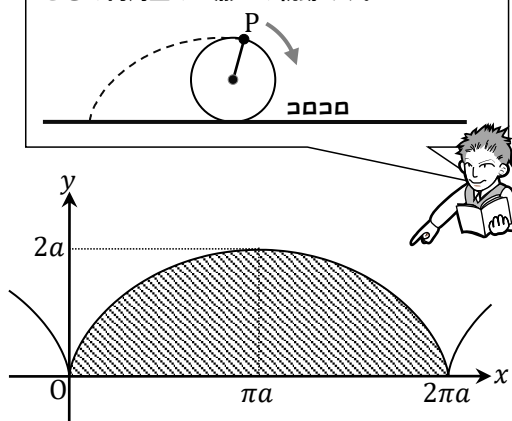
θ	0	...	π	...	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	+	+	+	0
$\frac{dy}{d\theta}$	0	+	0	-	0
(x, y)	(0, 0)	↗	$(\pi a, 2a)$	↘	$(2\pi a, 0)$

以上より、パラメータで表された曲線が表すグラフは右ようになる。

よって、 $0 \leq x \leq 2\pi a$ において $y \geq 0$ より求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi a} y \, dx &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta) \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= a^2 \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

これはサイクロイドというとても有名な曲線ですので、概形を覚えておいてもよいでしょう。ちなみに、この曲線は直線上で円盤を転がしたときの円周上の1点Pの軌跡です。



x	0	→	$2\pi a$
θ	0	→	2π

問題で与えられている変数は θ なので、まずは θ の積分に変えます。置換積分です。



例題 49 媒介変数 t によって、 $x = 4\cos t$, $y = \sin 2t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) と表される曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

練習 49 曲線 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq \pi$) と x 軸および直線 $x = \pi$ で囲まれる部分の面積 S を求めなさい。

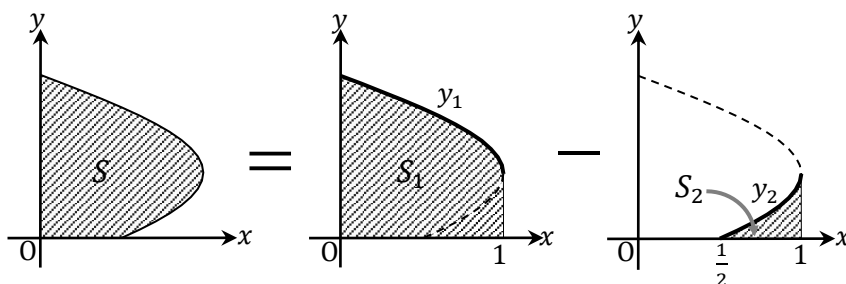
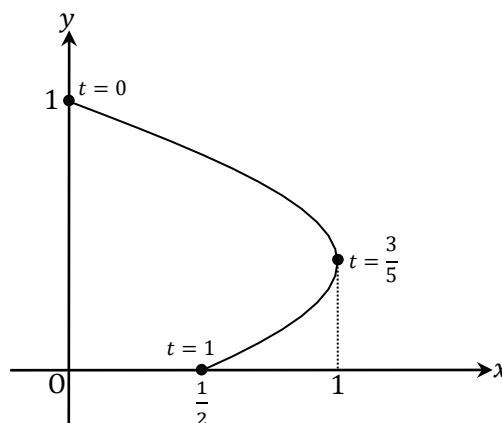
次のような図形においては少々工夫が必要です。

例 26 曲線 $\begin{cases} x = \sin \frac{5}{6}\pi t \\ y = 1 - t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 1$) と x 軸および y 軸によって囲まれた部分の面積を求めなさい。

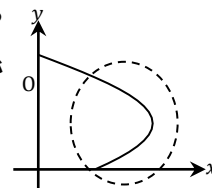
$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{6}\pi \cos \frac{5}{6}\pi t, \quad \frac{dy}{dt} = -1 < 0 \quad \text{より}$$

t	0	...	$\frac{3}{5}$	...	1
$\frac{dx}{dt}$	+	+	0	-	-
$\frac{dy}{dt}$	-	-	-	-	-
(x, y)	(0, 1)	$\searrow$	$(1, \frac{2}{5})$	$\swarrow$	$(\frac{1}{2}, 0)$

以上より、グラフの概形は右のようになる。



この場合、この部分がグラフの上下を意識した立式をしなくてはならないので、1つの定積分で面積を表すことができません。そこで、左図のように面積の差で考えます。



曲線の $0 \leq t \leq \frac{3}{5}$ の部分を y_1 , $\frac{3}{5} \leq t \leq 1$ の部分を y_2 とすると、

$$S_1 = \int_0^1 y_1 dx = \int_0^{\frac{3}{5}} y \cdot \frac{dx}{dt} dt, \quad S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 y_2 dx = \int_{\frac{3}{5}}^1 y \cdot \frac{dx}{dt} dt$$

x	0	→	1
t	0	→	$\frac{3}{5}$

x	$\frac{1}{2}$	→	1
t	1	→	$\frac{3}{5}$

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^{\frac{3}{5}} y \cdot \frac{dx}{dt} dt - \int_{\frac{3}{5}}^1 y \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\frac{3}{5}} y \cdot \frac{dx}{dt} dt + \int_{\frac{3}{5}}^1 y \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int_0^1 y \cdot \frac{dx}{dt} dt$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$\text{よって、} S = \frac{5}{6}\pi \int_0^1 (1-t) \cos \frac{5}{6}\pi t dt$$

$$= \frac{5}{6}\pi \left[(1-t) \frac{6}{5\pi} \sin \frac{5}{6}\pi t \right]_0^1 - \int_0^1 \sin \frac{5}{6}\pi t \cdot (-1) dt$$

$$= -\frac{6}{5\pi} \left[\cos \frac{5}{6}\pi t \right]_0^1 = \frac{3}{5\pi} (\sqrt{3} + 2)$$

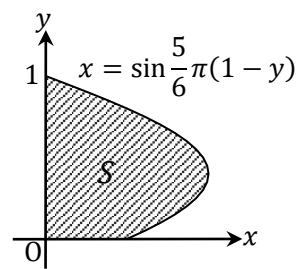
例 26 は 2 式から t を消去すると,

$$\begin{cases} x = \sin \frac{5}{6} \pi t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1) \Leftrightarrow x = \sin \frac{5}{6} \pi (1 - y) \quad (0 \leq y \leq 1)$$

となる。これより, 面積は

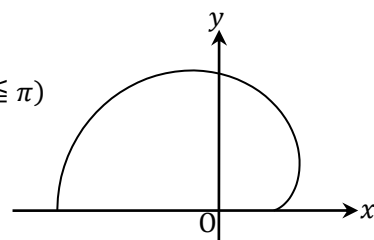
$$S = \int_0^1 \sin \frac{5}{6} \pi (1 - y) dy = \frac{6}{5\pi} \left[\cos \frac{5}{6} \pi (1 - y) \right]_0^1 = \frac{6}{5\pi} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{5\pi} (\sqrt{3} + 2)$$

となり, こちらの方が簡単に求まる。



例題 50 媒介変数 t によって, $x = 2 \cos t - \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$ ($0 \leq t \leq \pi$)

と表される図の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。



練習 50 媒介変数 t によって, $x = 2t + t^2$, $y = t + 2t^2$ ($-2 \leq t \leq 0$) と表される曲線と, y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。

面積の利用

例題 51 方程式 $\sqrt{2}(x-y) = (x+y)^2$ で表される曲線 A について、次のものを求めなさい。

- (1) 曲線 A を原点 O を中心として、 $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させてできる曲線の方程式
- (2) 曲線 A と直線 $x = \sqrt{2}$ で囲まれる図形の面積 S

練習 51 a は 1 より大きい定数とする。曲線 $x^2 - y^2 = 2$ と直線 $x = \sqrt{2}a$ で囲まれた図形の面積 S を、原点を中心とする $\frac{\pi}{4}$ の回転移動を考えることにより求めなさい。

例題 52 曲線 $C_1: y = k \sin x$ ($0 < x < 2\pi$) と、曲線 $C_2: y = \cos x$ ($0 < x < 2\pi$) について、次の各問いに答えなさい。ただし、 $k > 0$ とする。

- (1) C_1 , C_2 の 2 交点の x 座標を α , β ($\alpha < \beta$) とするとき、 $\sin \alpha$, $\sin \beta$ を k を用いて表しなさい。
- (2) C_1 , C_2 で囲まれた図形の面積が 10 であるとき、 k の値を求めなさい。

練習 52 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で、2 曲線 $y = \tan x$, $y = a \sin 2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が 1 となるように正の実数 a の値を定めなさい。

例題 53 曲線 $y = \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と x 軸で囲まれる図形を E とする。曲線上の点 $(t, \cos t)$ を通る傾きが 1 の直線 l で E を分割する。こうして得られた 2 つの図形の面積が等しくなるとき、 $\cos t$ の値を求めなさい。

練習 53 xy 平面上に 2 曲線 $C_1: y = e^x - 2$ と $C_2: y = 3e^{-x}$ がある。

- (1) C_1 と C_2 の共有点 P の座標を求めなさい。
- (2) 点 P が通る直線 l が、 C_1 , C_2 および y 軸によって囲まれた部分の面積を 2 等分するとき、 l の方程式を求めなさい。

例題 54 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) で表される曲線を C とする。

- (1) 曲線 C 上の点 $P(a, b)$ における接線 l の方程式を求めなさい。
- (2) $0 < a < \pi$ とするとき、曲線 C と接線 l および直線 $x = \pi$ と y 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$ (2 部分の和) を求めなさい。
- (3) 面積 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めなさい。

練習 54 $f(x) = e^x - x$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) t は実数とする。このとき、曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = t$, $x = t - 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (2) $S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めなさい。

例題 55 曲線 $y = e^{-x} \sin x$ ($x \geq 0$) と x 軸で囲まれた図形で、 x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n S_k$ を求めなさい。

練習 55 曲線 $y = e^{-x}$ と $y = e^{-x} |\cos x|$ で囲まれた図形のうち、 $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ を満たす部分の面積を a_n とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。

- (1) a_1, a_n の値を求めなさい。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ を求めなさい。

例題 56 極方程式 $r = f(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) で表される曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積は

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

と表される。これを用いて、極方程式 $r = 2(1 + \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) で表される曲線上の

点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積を求めなさい。

練習 56 例題で与えられた面積公式を利用して、極方程式 $r = 1 + \sin \frac{\theta}{2}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) で表される曲線 C と x 軸で囲まれる領域の面積を求めなさい。

§ 10 非回転体の体積

ここでは、定積分を用いた体積の計算方法を学んでいく。

右図のような立体 A の体積 V を求めることを考えよう。

$a \leq x \leq t$ の部分の体積を $V(t)$ とすると、 t の増分 Δt に対する $V(t)$ の増分 ΔV は

$$\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$$

と表すことができる。

また、 $t \leq x \leq t + \Delta t$ において、立体 A を x 軸に垂直な平面で切断したとき、切り口の面積の最大値を M 、最小値を m とすると、

$$M \cdot \Delta t > V(t + \Delta t) - V(t) > m \cdot \Delta t$$

この不等式の両辺を Δt で割ると

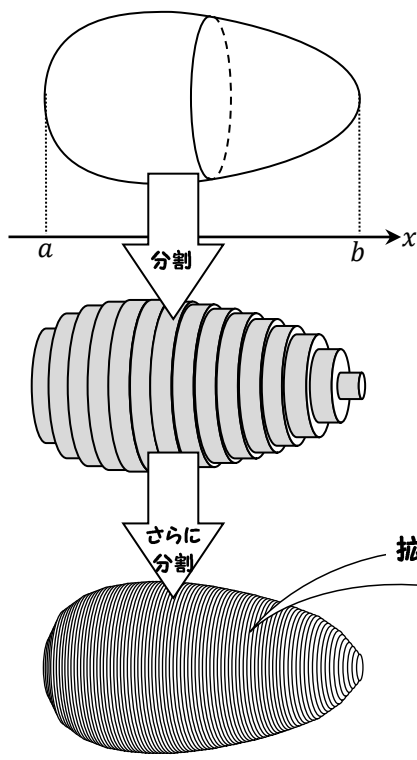
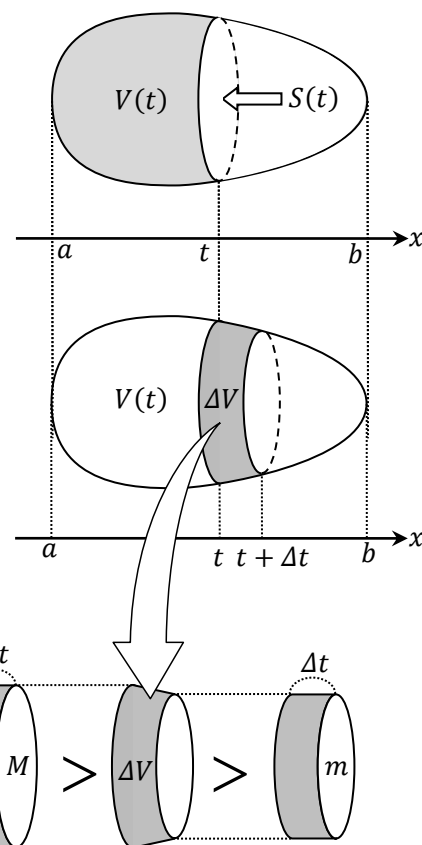
$$M > \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} > m$$

ここで $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、 $M \rightarrow S(t)$ 、 $m \rightarrow S(t)$ となるので、はさみうちの原理より次の関係式が得られる。

$$V'(t) = S(t)$$

$V(t)$ の定義より、 $V(b) = V$ 、 $V(a) = 0$ であるからこの立体の体積は次のように表すことができる。

$$V = V(b) = V(b) - V(a) = \int_a^b S(x) dx$$



$$V = \int_a^b S(x) dx$$

微小体積
 $S(x) dx$
底面積 高さ

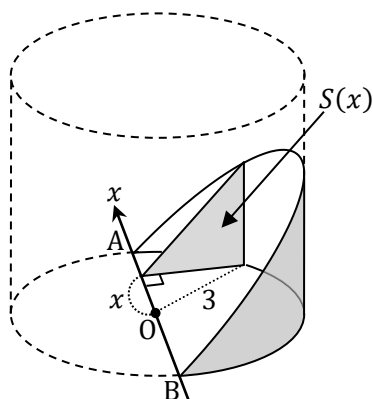
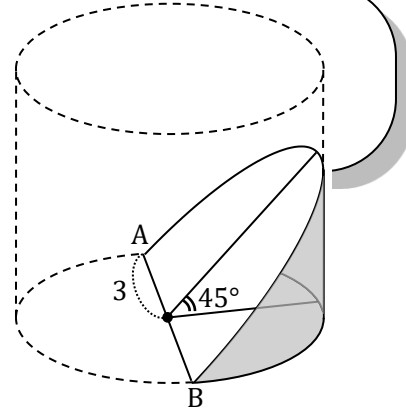
体積でも面積と同様に
『細かく分けて足す』
という考え方が大切です。
つまり、微小体積を求める
ことが体積計算の第一歩と
いうわけです。



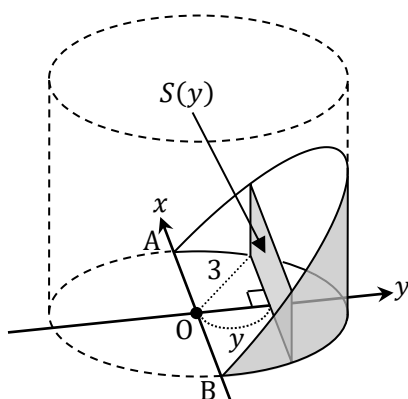
例 27 底面の半径が 3 の直円柱がある。右図のように、底面の直径 AB を含み、底面と 45° の角をなす平面で直円柱を切り取る。この切り取られた立体の体積を求めなさい。

この問題は微小体積の取り方により難度が異なります。

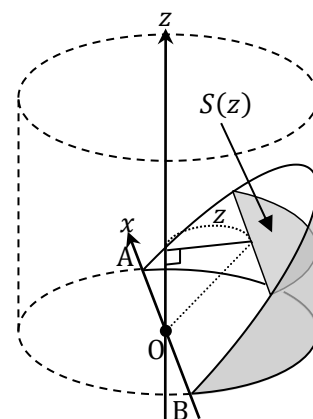
ここでは下図のように x 軸, y 軸, z 軸をとり、各軸に垂直に切ることによって現れる 3 種類の微小体積を考えてみましょう。



《 x 軸に垂直に切断》



《 y 軸に垂直に切断》



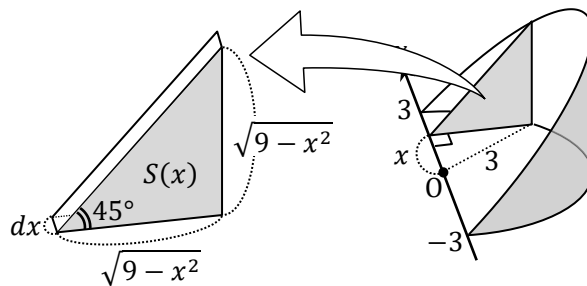
《 z 軸に垂直に切断》

解① x 軸に垂直に切断した場合

$$\text{断面積は, } S(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{9-x^2})^2 = \frac{9-x^2}{2}$$

よって、求める体積は、

$$V = \int_{-3}^3 \frac{9-x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (3+3)^3 = 18$$



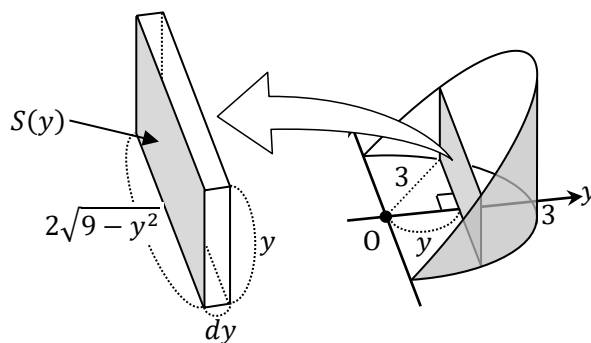
解② y 軸に垂直に切断した場合

$$\text{断面積は, } S(y) = 2y\sqrt{9-y^2}$$

よって、求める体積は、

$$V = \int_0^3 2y\sqrt{9-y^2} dy = -\frac{2}{3} \left[(9-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 18$$

積分の準公式②
 $\int \{f(x)\}^n f'(x) dx$



解③ z 軸に垂直に切断した場合

断面の中心角を 2θ とおくと、
断面積は、

$$\begin{aligned} S(z) &= \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \sin 2\theta \right) \\ &= \frac{9}{2} (2\theta - \sin 2\theta) dz \end{aligned}$$

よって体積は、 $V = \int_0^3 \frac{9}{2} (2\theta - \sin 2\theta) dz$

$z = 3 \cos \theta$ より、 $dz = -3 \sin \theta d\theta$

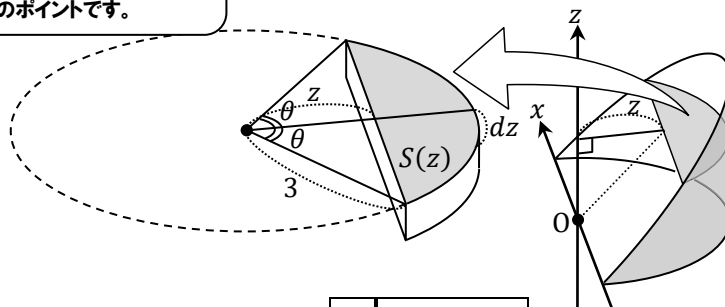
$$\begin{aligned} \text{これより、} V &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{9}{2} (2\theta - \sin 2\theta) (-3 \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{27}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta \sin \theta - \sin 2\theta \sin \theta) d\theta \\ &= 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

ここで、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta d\theta = [-\theta \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{より、}$$

$$V = 27 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 18$$

円の面積を求めるためには中心角が必須。最初には θ を置くところが、この解法のポイントです。



z	$0 \rightarrow 3$
θ	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

被積分関数が θ で表され、積分変数が z なので、このままでは積分できません。そこで、置換積分をして変数をそろえます。

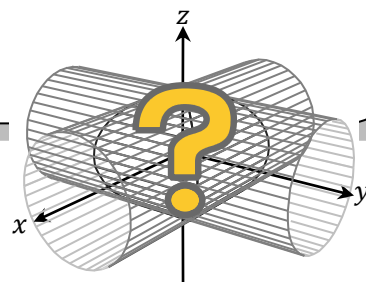
積分の準公式②
 $\int \{f(x)\}^n f'(x) dx$

いかがでしょうか？ 同じ体積でも、どのように断面積をとるかで難易度がだいぶ変わってきます。この問題では x 軸に垂直に切ると楽に解くことができ、 z 軸に垂直に切ると、置換積分を用いなくてはならずかなりやっかいです。

例題 57 2点 $P(x, 0)$ 、 $Q(x, \sin x)$ を結ぶ線分を 1 辺とする正三角形を、 x 軸に垂直な平面上に作る。P が x 軸上を原点 O から点 $(\pi, 0)$ まで動くとき、この正三角形が描く立体の体積を求めなさい。

練習 57 半径 a の半円の直径を AB 、中心を O とする。半円周上の点 P から AB に垂線 PQ を下ろし、線分 PQ を底辺とし、高さが線分 OQ の長さに等しい二等辺三角形 PQR を半円と垂直な平面上に作り、 P を弧 AB 上で動かす。この $\triangle PQR$ が描く立体の体積を求めなさい。

例 28 xyz 空間における 2 つの円柱の $x^2 + z^2 \leq 1$, $y^2 + z^2 \leq 1$ の共通部分の体積を求めなさい。

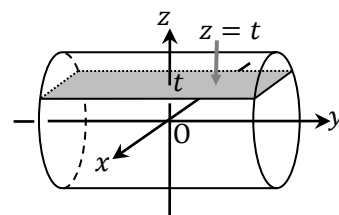


2 つの円柱の共通部分がいったいどのような図形になっているのか想像できる人は少ないでしょう。でも、心配はいりません。この問題は共通部分の立体の形状を聞かれているのではなく、体積を聞かれているのです。そして、**体積を求めるのに必要なものは断面積**です。つまり、この問題は『断面がどのような図形になっているのか?』

さえ分かれば十分なのです。

ここでは、 xy 平面に平行な平面 $z = t$ における断面を考えていきます。すると、**1 つの円柱の断面は長方形**になり、これが 2 つ重なっているので、**求める立体の断面は正方形**になるわけです。

では、解答を作ってみましょう。

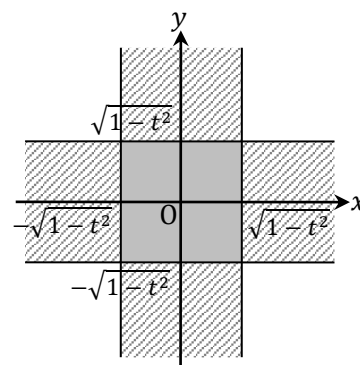


$x^2 + z^2 \leq 1$, $y^2 + z^2 \leq 1$ に $z = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) を代入すると、
 $x^2 + t^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 - t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{1 - t^2} \leq x \leq \sqrt{1 - t^2} \quad \dots \textcircled{1}$
 $y^2 + t^2 \leq 1 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 - t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{1 - t^2} \leq y \leq \sqrt{1 - t^2} \quad \dots \textcircled{2}$
 よって、 $z = t$ における立体の断面図は①、②の共通部分なので、1 辺の長さが、 $2\sqrt{1 - t^2}$ の正方形となる。よって断面積は、

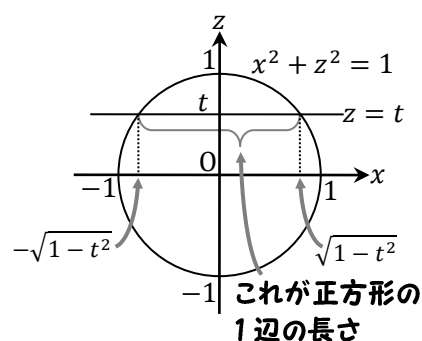
$$(2\sqrt{1 - t^2})^2 = 4(1 - t^2)$$

となる。これより、体積は

$$V = \int_{-1}^1 4(1 - t^2) dt = 4 \cdot \frac{1}{6} (1 + 1)^3 = \frac{16}{3}$$



断面に現れる正方形の 1 辺は、 xz 平面上の円 $x^2 + z^2 = 1$ の内部と直線 $z = t$ の共通部分となり、このことから 1 辺の長さが、 $2\sqrt{1 - t^2}$ と分かる。



例題 58 xyz 空間において、次の連立不等式が表す立体を考える。

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 1 \geq 0$$

- (1) この立体を平面 $z = t$ で切ったときの断面を xy 平面に図示し、この断層の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (2) この立体の体積 V を求めなさい。

練習 50 r を正の実数とする。 xyz 空間において連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad y^2 + z^2 \geq r^2, \quad z^2 + x^2 \leq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を、平面 $x = t$ ($0 \leq t \leq r$) による切り口を考えることにより求めなさい。

MEMO

§ 11 回転体の体積

○ x 軸回転

右図の斜線部分 S を x 軸の周りに回転させたときにできる立体の体積を考えよう。

回転体を x 軸に垂直な平面で切ると、断面は必ず円になる。

この円の半径は $f(x)$ なので、断面積を $S(x)$ とすると、

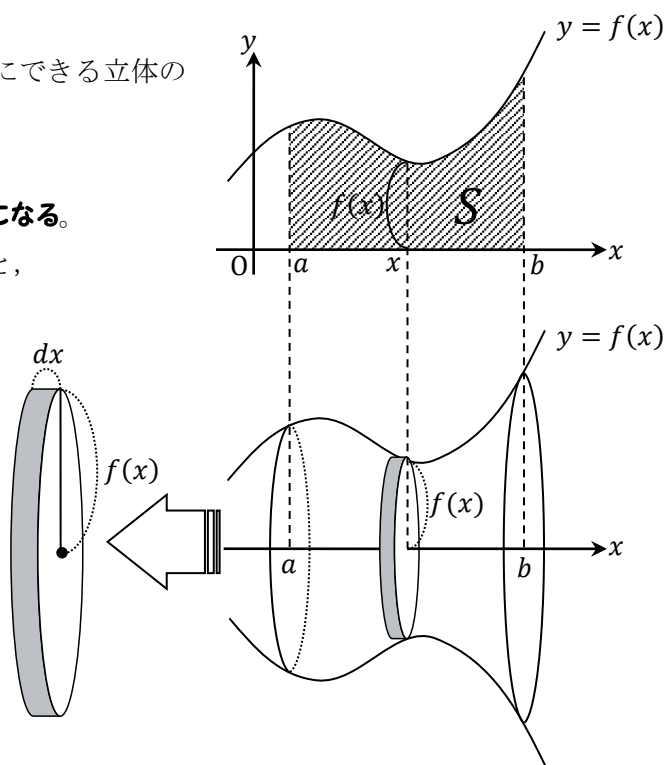
$$S(x) = \pi\{f(x)\}^2$$

となる。

よって、回転体の体積 V は

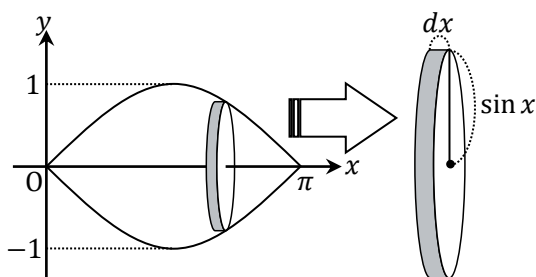
$$V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$$

となる。



例 29 曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$



2 曲線で囲まれた図形

右図のように 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ に囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させたときにできる立体の体積を考えよう。

先ほどと同様に x 軸に平行な平面で切ると、断面は必ず

同心円で囲まれた図形になっている。

小円の半径が $g(x)$, 大円の半径が $f(x)$ なので、断面積を $S(x)$ とすると、

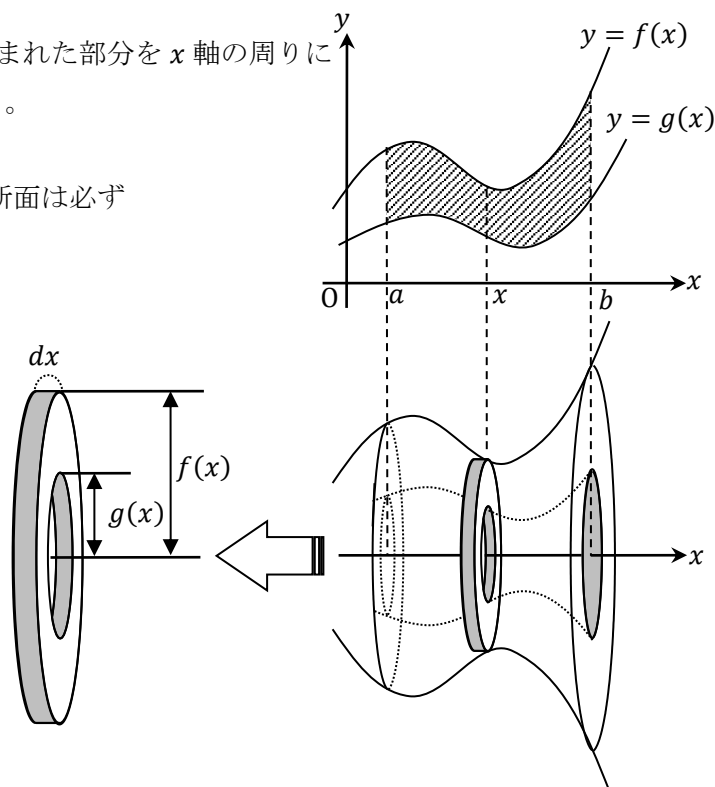
$$S(x) = \pi\{f(x)\}^2 - \pi\{g(x)\}^2$$

となる。

よって、この立体の体積 V は

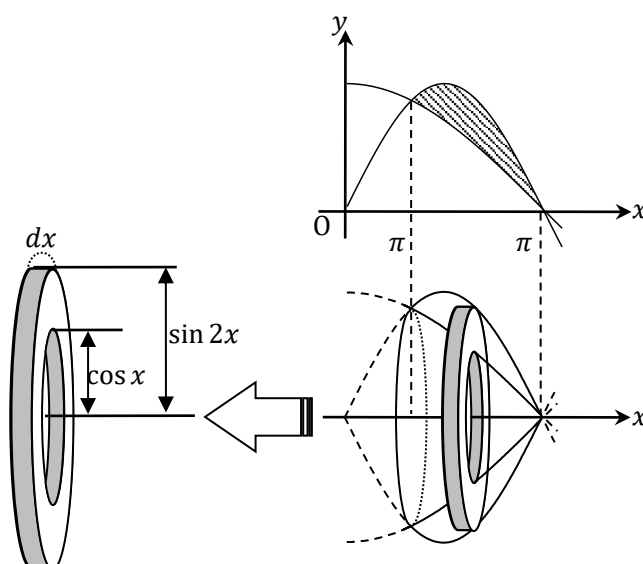
$$V = \pi \int_a^b [\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2] dx$$

となる。



例 30 2 曲線 $y = \sin 2x$, $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 2x - \cos^2 x) dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + \cos 2x) dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \left[\frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \pi \end{aligned}$$



例題 59 次の曲線や座標軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めなさい。

(1) $y = 1 - \sqrt{x}$, x 軸, y 軸

(2) $y = 1 + \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), x 軸

練習 59 次の曲線や直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。

(1) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, x 軸

(2) $y = \tan x$, $x = \frac{\pi}{4}$, x 軸

(3) $y = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1$, $x = 4$, x 軸

例題 60 次の図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めなさい。

(1) 放物線 $y = -x^2 + 4x$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形

(2) 円 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ の周および内部

練習 60 次の 2 曲線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めなさい。

(1) $y = x^2 - 2$, $y = 2x^2 - 3$

(2) $y = \sqrt{3}x^2$, $y = \sqrt{4 - x^2}$

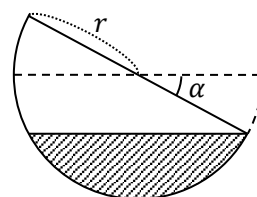
例題 61 放物線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = -x + 2$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めなさい。

練習 61 2 曲線 $y = \cos \frac{x}{2}$ ($0 \leq x \leq \pi$) と $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) を考える。

(1) 上の 2 曲線と直線 $x = \pi$ を描き、これらで囲まれる領域を斜線で図示しなさい。

(2) (1)で示した斜線部分の領域を x 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めなさい。

例題 62 水を満たした半径 r の半球形の容器がある。これを静かに角 α だけ傾けたとき、こぼれ出た水の量を r , α で表しなさい。(α は弧度法で表された角とする。)



練習 62 水を満たした半径 2 の半球形の容器がある。これを静かに角 α 傾けたとき、水面が h だけ下がり、こぼれ出た水の量と容器に残った水の量の比が 11:5 になった。 h と α の値を求めなさい。ただし、 α は弧度法で答えなさい。

パラメータで表される図形

まずはパラメータを用いて表された図形がどのような概形になるのかを調べます。

x 軸で回転させる場合、体積計算は今まで通り $\pi \int_a^b y^2 dx$ になります。

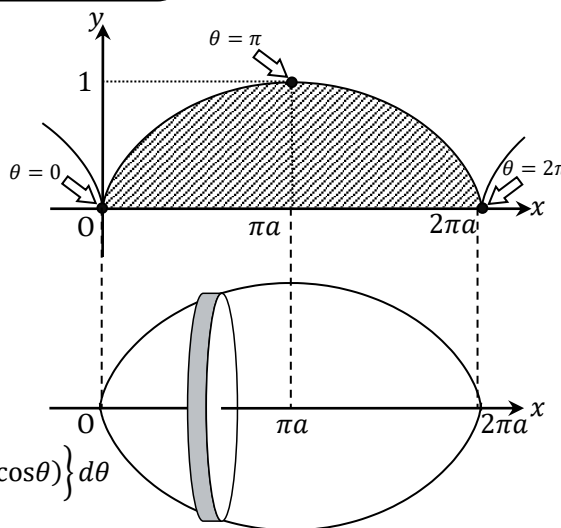
例 31 曲線 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$) および x 軸によって囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

例 25 より概形は右図。

これより、求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx &= \pi \int_0^{2\pi a} a^2(1 - \cos\theta)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \pi \int_0^{2\pi} a^3(1 - \cos\theta)^3 d\theta \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta) d\theta \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left\{ 1 - 3\cos\theta + \frac{3}{2}(1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta) \right\} d\theta \\ &= \frac{\pi a^3}{4} \int_0^{2\pi} (10 - 15\cos\theta + 6\cos 2\theta - \cos 3\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi a^3}{4} \left[10\theta - 15\sin\theta + 3\sin 2\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= 5\pi a^3 \end{aligned}$$

被積分関数が θ で表され、
積分変数が x なので、この
ままでは積分できません。こ
こでも、置換積分をして変
数をそろえます。



例題 03 曲線 $x = \tan\theta$, $y = \cos 2\theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) と x 軸で囲まれる部分を、 x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。

例題 03 曲線 $C: x = \cos t$, $y = 2\sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) がある。

- (1) 曲線 C と x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を求めなさい。
- (2) (1)で考えた図形を y 軸の周りに 1 回転させて得られる回転体の体積を求めなさい。

○ y 軸回転

ここでは右図の斜線部分 S を y 軸の周りに回転させたときにできる立体の体積を考えよう。

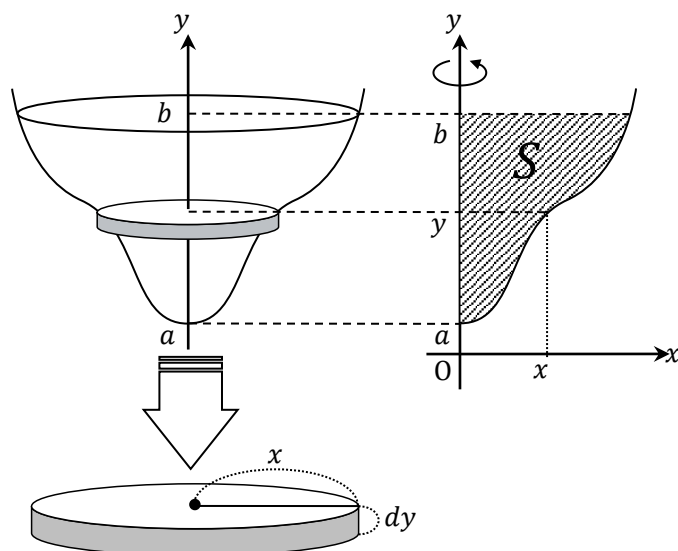
回転体を y 軸に垂直な平面で切ったときの断面は半径 x の円になるので、断面積を $S(y)$ とすると、

$$S(y) = \pi x^2$$

となるので、回転体の体積 V は

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy$$

である。

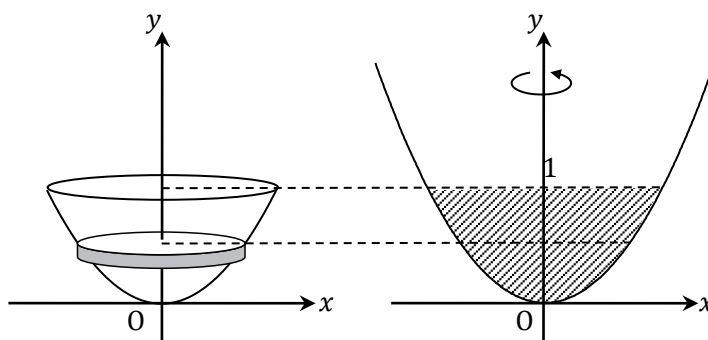


例 32 曲線 $y = x^2$, $y = 1$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

求める体積は、 $V = \int_0^1 \pi x^2 dy$

$x^2 = y$ より

$$V = \int_0^1 \pi y dy = \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



例 33 曲線 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)， x 軸， y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

y 軸回転させてできた立体の体積を求めるには、与えられた式を『 $x = \dots$ 』の形に変形する必要があります。しかし、この例の場合は変形するのは難しそうです。

このようなときの解法を 2 つ紹介しましょう。

置換積分を用いる方法

『 $x = \dots$ 』の形に変形できないのなら、積分変数の方を変えてしまおうという発想です。

求める体積は、 $V = \int_0^1 \pi x^2 dy$

$dy = -\sin x \, dx$ より、

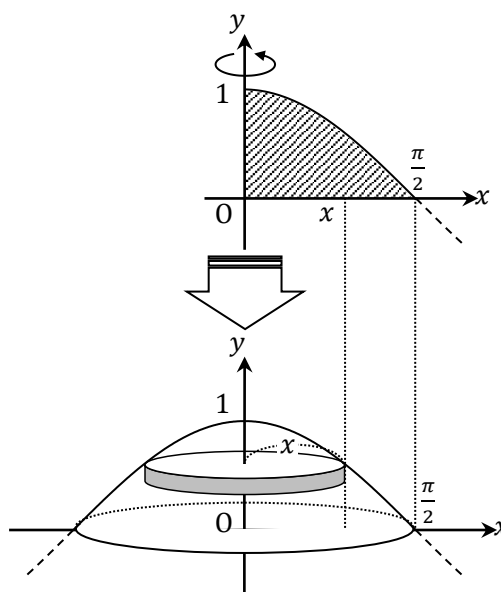
$$V = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi x^2 \cdot (-\sin x) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$$

$$= -\pi [x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$$

$$= 2\pi [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$= \pi^2 + 2\pi [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2 - 2\pi$$



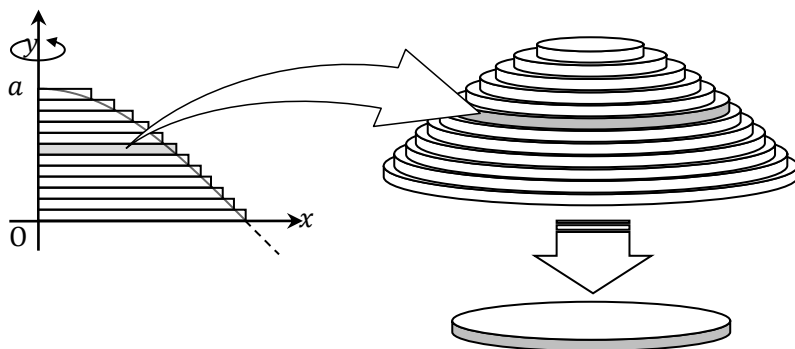
バウムクーヘン分割を用いる方法

これは主に、 y 軸回転のときに威力を発揮する方法です。

通常、回転体の体積は、

『**回転軸に垂直に分割**』

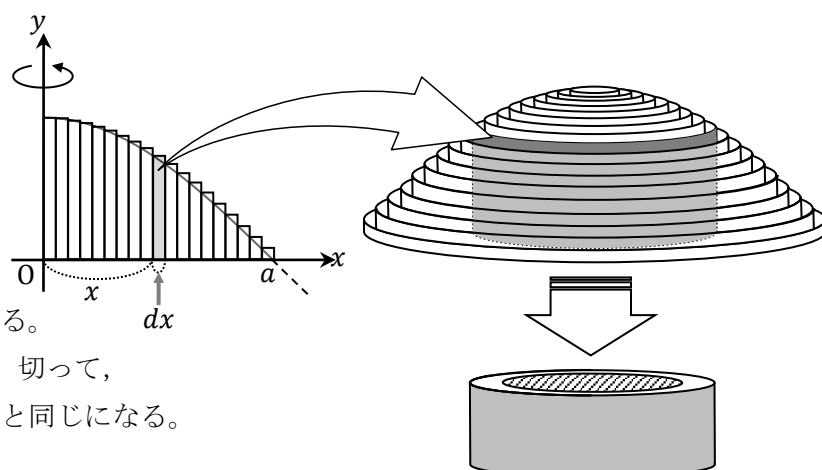
した長方形を回転させることで微小体積を考えた。



しかし、ここでは

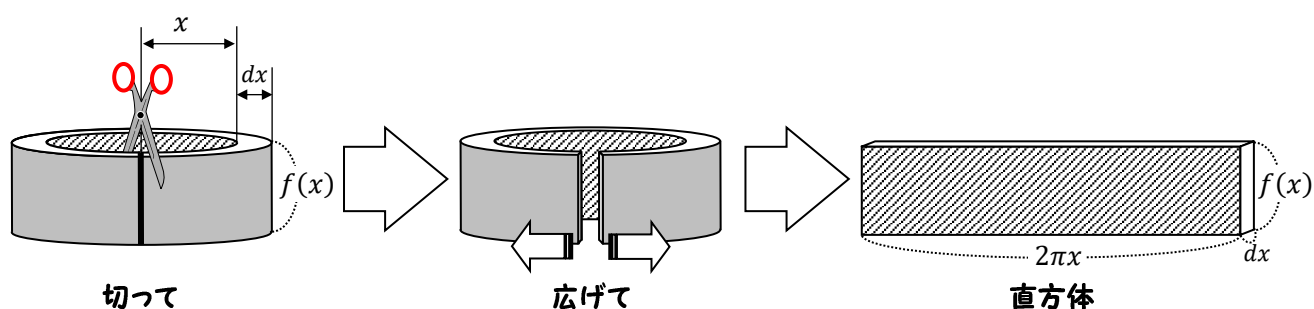
『**回転軸に平行に分割**』

した長方形を回転させることで微小体積を考える。つまりこの場合は、**円筒型**の体積を求めることになる。



この円筒型の微小体積は以下のように求める。

円筒の厚さが dx であることを考慮すると、切って、広げることで、直方体の体積を求めることと同じになる。



これより、微小体積は直方体の体積を考えればよいので、

$$2\pi x f(x) dx$$

となる。以上より、回転体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_0^a x f(x) dx$$

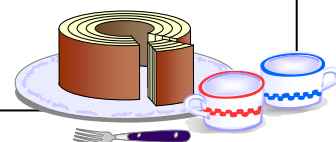
となる。

この考え方をを用いて、体積を求めると次のようになる。



微小体積の取り方がドイツの有名な菓子バウムクーヘンに似ていることからこの名前が付いています。なんともユニークなネーミングですね。

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = 2\pi [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\ &= \pi^2 + 2\pi [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2 - 2\pi \end{aligned}$$



例題 64 次の回転体の体積 V を求めなさい。

- (1) 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体
- (2) 曲線 $C: y = \log(x^2 + 1)$ ($0 \leq x \leq 1$) と直線 $y = \log 2$, および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体

練習 64 次の曲線や直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めなさい。

- (1) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ (2) $y = -x^4 + 2x^2$ ($x \geq 0$), x 軸
- (3) $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$), $y = -1$, y 軸

例題 65 関数 $f(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について, 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は, $V = 2\pi \int_0^\pi xf(x)dx$ で与えられることを示しなさい。

また, この体積を求めなさい。

練習 65 放物線 $y = 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

例題 66 曲線 $C: y = \log x$ に原点から接線 l を引く。曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた図形を D とするとき, 次の回転体の体積を求めなさい。

- (1) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V_x
- (2) D を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V_y

練習 66 a を正の定数とする。曲線 $C_1: y = \log x$ と曲線 $C_2: y = ax^2$ が共有点 T で共通の接線 l をもつとする。また, C_1 と l と x 軸によって囲まれる部分を S_1 とし, C_2 と l と x 軸によって囲まれる部分を S_2 とする。次のものを求めなさい。

- (1) a の値, および直線 l の方程式
- (2) S_1 を x 軸の周りに 1 回転させて得られる回転体の体積
- (3) S_2 を y 軸の周りに 1 回転させて得られる回転体の体積

§ 12 その他の体積

ここでは、有名な回転体の体積を紹介しておきましょう。

例 34 円 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

これは円環体(トーラス)と呼ばれる図形です。この体積はとても有名な求め方がありますが、まずは普通に計算して求めます。

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{1 - (x-2)^2}$$

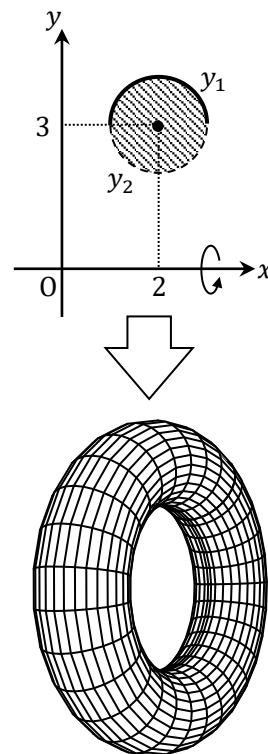
$y_1 = 3 + \sqrt{1 - (x-2)^2}$, $y_2 = 3 - \sqrt{1 - (x-2)^2}$ とすると、
求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 (y_1)^2 dx - \pi \int_1^3 (y_2)^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 \{(y_1)^2 - (y_2)^2\} dx \\ &= \pi \int_1^3 \left\{ \left(3 + \sqrt{1 - (x-2)^2} \right)^2 - \left(3 - \sqrt{1 - (x-2)^2} \right)^2 \right\} dx \\ &= 12\pi \int_1^3 \sqrt{1 - (x-2)^2} dx \end{aligned}$$

ここで、 $x-2 = \sin\theta$ とおくと、 $dx = \cos\theta d\theta$ より

$$\begin{aligned} V &= 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\theta} \cdot \cos\theta d\theta \\ &= 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2\theta}_{\text{偶関数}} d\theta \\ &= 24\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= 12\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 12\pi \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi^2 \end{aligned}$$

x	1	$\rightarrow$	3
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

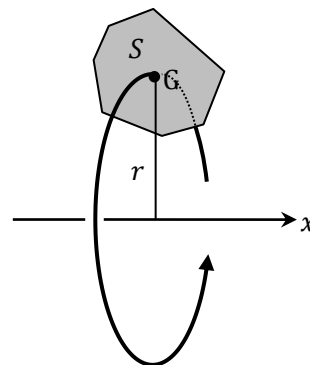


パップス・ギュルダンの定理

回転体の体積を求めるときに、この定理を知っていると計算がとても楽になることがあります。感覚的にも理解しやすい定理です。

⊕ パップス・ギュルダンの定理 ⊕

(回転体の体積 V) = (重心 G の移動距離) $\times$ (面積 S)
(つまり、右図においては $V = 2\pi rS$)



この定理を使うと体積 V は、 $V = 6\pi \times \pi = 6\pi^2$ となり、一瞬で解決です。

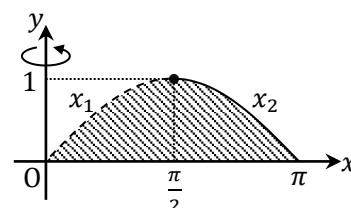
しかし、いくら便利だからと言って、この定理を**試験の答案で使うのは避けた方がよい**でしょう。証明が高校の数学ではできないというのが大きな理由です。以下のように検算に利用するぐらいにしておきましょう。

$y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V

(解答) 置換積分を用いて求積。

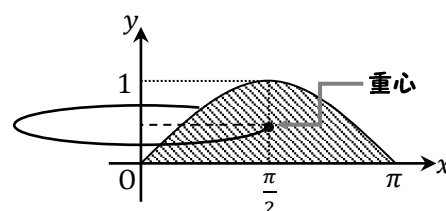
x を y の式で表したとき、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分を x_1 、 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ の部分を x_2 とすると、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x_2)^2 dy - \pi \int_0^1 (x_1)^2 dy = \pi \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{dy}{dx} dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{dy}{dx} dx \\ &= -\pi \int_0^{\pi} x^2 \frac{dy}{dx} dx \\ &= -\pi \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx \\ &= -\pi [x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x]_0^{\pi} = 2\pi^2 \end{aligned}$$



(確認) パップス・ギュルダンの定理を用いて確認。

$$V = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi} \sin x dx = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [-\cos x]_0^{\pi} = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi^2$$



○ 斜方回転

例 35 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x$ で囲まれた部分を直線 $y = 2x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

今までは x 軸, y 軸に関しての回転でしたが, 今回は斜めの直線に関しての回転ということで少々面倒そうです。しかし, 回転体における原則

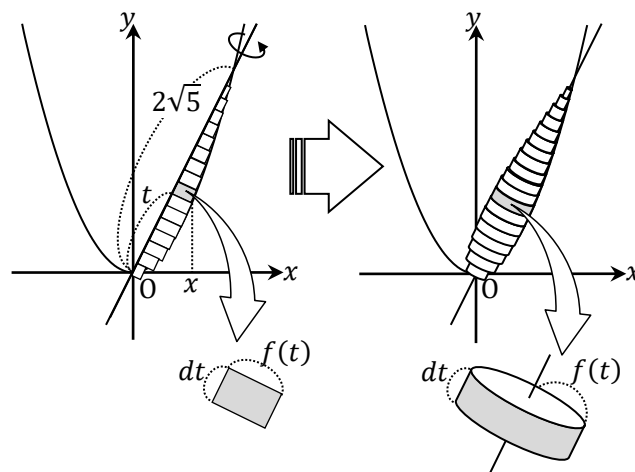
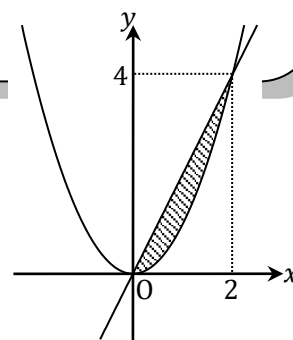
『**回転軸に対して垂直に切断**』

は変わりません。

右図のように, 放物線と直線で囲まれた部分を長方形に分割し, これを回転することで微小体積を考えます。このとき, 原点から t 離れた位置にある長方形の横の長さを $f(t)$ としましょう。すると, 微小体積が $\pi\{f(t)\}^2 dt$ となるので, 体積は

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{5}} \{f(t)\}^2 dt$$

となります。



曲線 $y = x^2$ 上に点 $P(x, x^2)$ をとり, 点 P から直線 $y = 2x$ 上に下ろした垂線の足を H とする。

また, $OH = t$ とおくと, 求める体積は

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{5}} (PH)^2 dt \quad \dots (*)$$

と表すことができる。

点と直線の距離の公式から

$$PH = \frac{|2x - x^2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2x - x^2}{\sqrt{5}} \quad (0 \leq x \leq 2 \text{ より } 2x - x^2 \geq 0)$$

また, $\triangle OPH$ において, 三平方の定理より

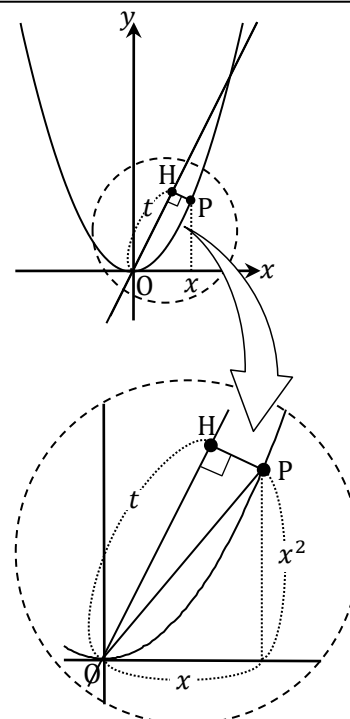
$$OP^2 = OH^2 + PH^2 \Leftrightarrow x^2 + x^4 = t^2 + \frac{(2x - x^2)^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{x^2(2x+1)^2}{5}$$

$$x(2x+1) \geq 0 \text{ より, } t = \frac{x(2x+1)}{\sqrt{5}} = \frac{2x^2 + x}{\sqrt{5}}$$

$$\text{よって, } dt = \frac{4x+1}{\sqrt{5}} dx$$

この PH を t の式で表すことができれば, $(*)$ より, 体積が求まります。



この式から PH を t の式で表すことは難しそうです。そこではここでは, 積分変数の方を変えます。置換積分です。

t	$0 \rightarrow 2\sqrt{5}$
x	$0 \rightarrow 2$

以上より，求める体積は

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{2\sqrt{5}} (\text{PH})^2 dt = \pi \int_0^2 \left(\frac{2x - x^2}{\sqrt{5}} \right)^2 \cdot \frac{4x + 1}{\sqrt{5}} dx \\
 &= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \int_0^2 (4x^5 - 15x^4 + 12x^3 + 4x^2) dx \\
 &= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \left[\frac{2}{3}x^6 - 3x^5 + 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 \\
 &= \frac{16\sqrt{5}\pi}{75}
 \end{aligned}$$

例題 67 不等式 $x^2 - x \leq y \leq x$ で表される座標平面上の領域を，直線 $y = x$ の周りに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めなさい。

練習 67 次の図形を直線 $y = x$ の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めなさい。

- (1) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形
- (2) 曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と 2 直線 $y = x$, $x + y = \pi$ で囲まれた図形

例題 68 a, b を正の実数とする。座標空間内の 2 点 $A(0, a, 0)$, $B(1, 0, b)$ を通る直線を l とし，直線 l を x 軸の周りに 1 回転して得られる図形を M とする。

- (1) x 座標の値が t であるような直線 l 上の点 P の座標を求めなさい。
- (2) 図形 M と 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ で囲まれた立体の体積を求めなさい。

練習 68 xyz 空間において，2 点 $P(1, 0, 1)$, $Q(-1, 1, 0)$ を考える。線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体を S とする。立体 S と，2 つの平面 $x = 1$ および $x = -1$ で囲まれる立体の体積を求めなさい。

§ 13 曲線の長さ

ここでは、関数 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における曲線の長さ s を考える。

まず、曲線上に点 $A_k(x_k, f(x_k))$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) をとる。

各点を結んでできた折れ線の長さの総和を L_n とすると

$$L_n = \sum_{k=1}^n A_{k-1}A_k$$

と表せる。右図からも分かる通り、分割を細かくしていくと、折れ線の長さの和は曲線の長さ s に近づいていく。つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = s$$

となる。それでは、このことを具体的に数式で表してみよう。

まず、線分 $A_{k-1}A_k$ の長さは次のように表せる。

$$\begin{aligned} A_{k-1}A_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{1 + \left\{ \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right\}^2} \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sqrt{1 + \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\}^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

ここで、 $n \rightarrow \infty$ とすると、 $\Delta x \rightarrow dx$ 、 $\Delta y \rightarrow dy$ となるので、

$$ds = \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} dx$$

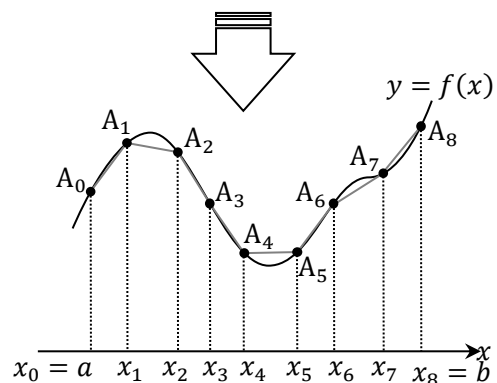
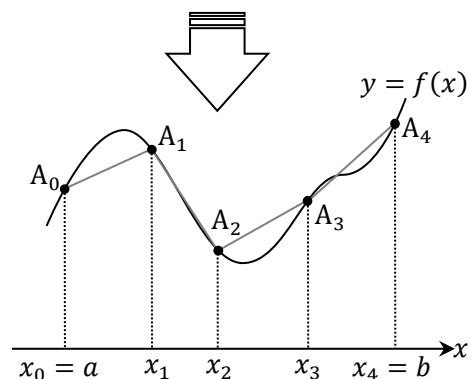
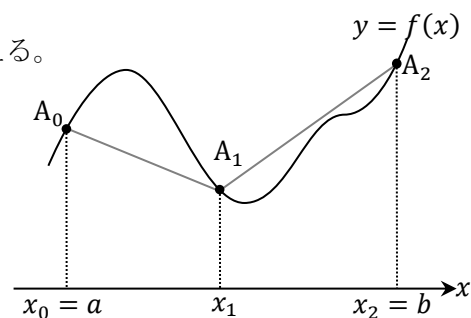
が得られる。ここで、 ds は曲線上の微小な長さを表している。

これを a から b まで積分すると、曲線の長さ s が得られる。

つまり、

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。



◆ 曲線の長さ① ◆

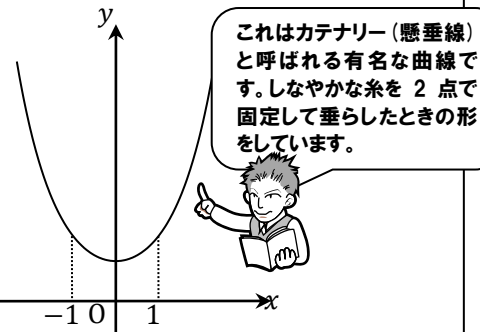
関数 $y = f(x)$ の $a \leq x \leq b$ における曲線の長さは、次の式で表せる。

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

例 36 曲線 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の $-1 \leq x \leq 1$ における曲線の長さを求めなさい。

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ より, 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2} dx &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) dx \quad (\because e^x + e^{-x} > 0) \\ &= \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx = [e^x - e^{-x}]_0^1 = e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$



○ パラメータで表された曲線の長さ

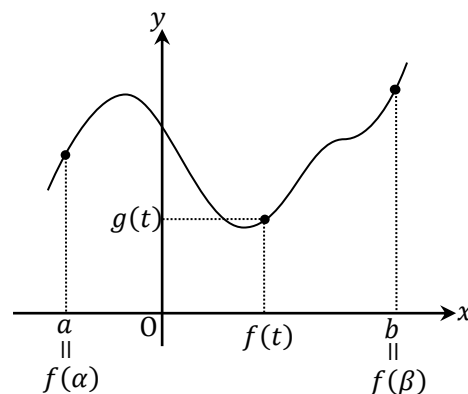
関数 $y = F(x)$ がパラメータ t を用いて, $x = f(t)$, $y = g(t)$ と表されていたとする。このとき, $a \leq x \leq b$ における曲線の長さは置換積分法を用いることで, t の式に直すことができる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \quad dx = f'(t)dt$$

また, $a = f(\alpha)$, $b = f(\beta)$ とすると

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left\{ \frac{g'(t)}{f'(t)} \right\}^2} f'(t) dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

となる。

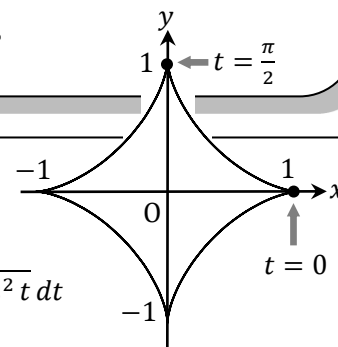


🌀 曲線の長さ② 🌀

$x = f(t)$, $y = g(t)$ で表される曲線の $\alpha \leq t \leq \beta$ における曲線の長さは, 次の式で表せる。

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

例 37 曲線 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における曲線の長さを求めなさい。



$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$ より, 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t dt \quad (\because \cos t \sin t > 0) \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3}{4} [\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

曲線の長さの公式は『微小な長さ』 ds , dx , dy に注目することで, 簡単に作ることができる。

まず, 微小な長さ ds は三平方の定理から

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

となる。これより, ds と dx の関係は

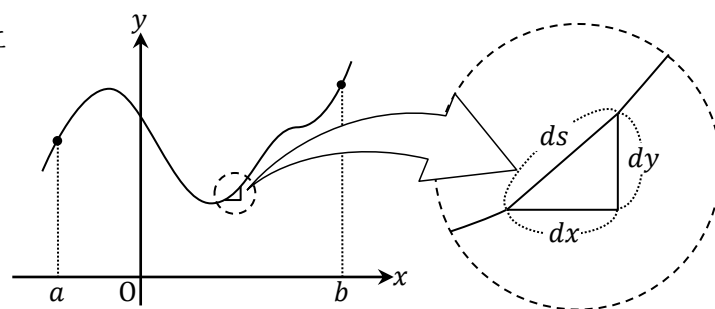
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left\{ \frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2} \right\} (dx)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

となり, ここから曲線の長さの公式①が導かれる。

同様に, ds と dt の関係は

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left\{ \frac{(dx)^2}{(dt)^2} + \frac{(dy)^2}{(dt)^2} \right\} (dt)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt$$

となり, ここから曲線の長さの公式②が導かれる。



いかがでしょうか。このように捉えておくと, 忘れてしまったときでも, すぐに導けるので便利ですね。



例題 69 次の曲線の長さを求めなさい。(1)では $a > 0$ とする。

(1) アステロイド $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

(2) $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($\sqrt{2} \leq x \leq 4$)

練習 69 次の曲線の長さを求めなさい。

(1) $x = 2t - 1, y = e^t + e^{-t}$ ($0 \leq t \leq 1$)

(2) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi$)

(3) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ ($1 \leq x \leq 2$)

(4) $y = \log(\sin x)$ ($\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)

例題 70 円 $C: x^2 + y^2 = 9$ の内側を半径 1 の円 D が滑らずに転がる。時刻 t において、 D は点 $(3 \cos t, 3 \sin t)$ で C に接している。

(1) 時刻 $t = 0$ において、点 $(3, 0)$ にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x(t), y(t))$ を求めなさい。

ただし、 $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ とする。

(2) (1)の範囲で点 P の描く曲線の長さを求めなさい。

練習 70 $a > 0$ とする。長さ $2\pi a$ のひもが一方の端を半径 a の円周上の点 A に固定して、その円にまきつけてある。このひもを引っ張りながら円からはずしていくとき、ひもの他方の P が描く曲線の長さを求めなさい。

○ 道のり

平面上を移動する点 P の時刻 t における位置 $P(f(t), g(t))$ をとする。このとき、時刻 $t = \alpha$ から $t = \beta$ までに点 P が動いた道のり

は、 $\alpha \leq t \leq \beta$ における曲線 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ の長さと等しいので、

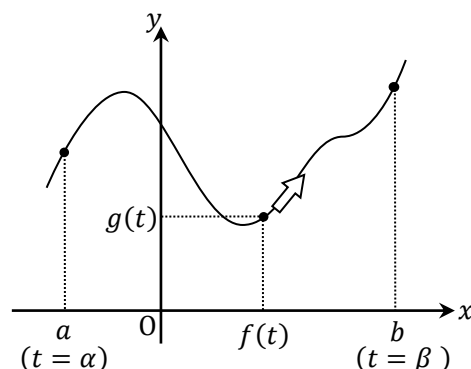
$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

となる。微分のところで学んだように点 P の速度ベクトル $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

となるので、点 P が動いた道のりは次のようにあらわすことができる。

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{v}| dt$$



例題 71 (1) 数直線上を点 1 から出発して t 秒後の速度 v が $v = t(t-1)(t-2)$ で運動する点 P がある。出発してから 3 秒後の P の位置は であり、 P が動いた道のりは である。

(2) 重力の加速度を g とする。 t 秒後の加速度 $\frac{1}{1+t}$ をもつロケットを、初速度 v_0 で地上から真上に打ち上げた。 t 秒後のロケットの速度と高さを求めなさい。

練習 71 (1) x 軸上を動く 2 点 P, Q が同時に原点を出発して、 t 秒後の速度はそれぞれ $\sin \pi t, 2 \sin \pi t$ (/s) である。

(ア) $t = 3$ における P の座標を求めなさい。

(イ) $t = 0$ から $t = 3$ までに P が動いた道のりを求めなさい。

(ウ) 出発後初めて 2 点 P, Q が重なるのは何秒後か。また、このときまでの Q の道のりを求めなさい。

(2) x 軸上を動く点の加速度が時刻 t の関数 $6(2t^2 - 2t + 1)$ であり、 $t = 0$ のとき点 1, 速度 -1 である。 $t = 1$ のときの点の位置を求めなさい。

例題 72 時刻 t における動点 P の座標が $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t$ で与えられている。 $t = 1$ から $t = 2$ までに P が動いた道のりを求めなさい。

練習 72 時刻 t における座標が次の式で与えられる点が動く道のりを求めなさい。

(1) $x = t^2, y = t^3$ ($0 \leq t \leq 1$)

(2) $x = t^2 - \sin t^2, y = 1 - \cos t^2$ ($0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$)

例題 73 曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸の周りに 1 回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h 、体積を V とする。 V の変化率 $\frac{dV}{dt}$ は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる。

- (1) 水深 h の変化率 $\frac{dh}{dt}$ を h を用いて表しなさい。
- (2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めなさい。

例題 78 半径 1 の円筒形水槽の底に設けた断面積 a の穴から流出する単位時間当たりの水量は、水深が h のとき、 $ca\sqrt{2gh}$ で示される。ただし、 g は重力の加速度、 c は流量係数という。 a および g 、 c は、水深 h の変化には影響を受けない定数とする。なお、水深は鉛直方向に上向きを正とする。この水槽について

- (1) 水深が $\frac{1}{2}H$ になったときに水面が低下する速さは である。
- (2) 水深が H から $\frac{1}{2}H$ になるまでに要する時間は である。