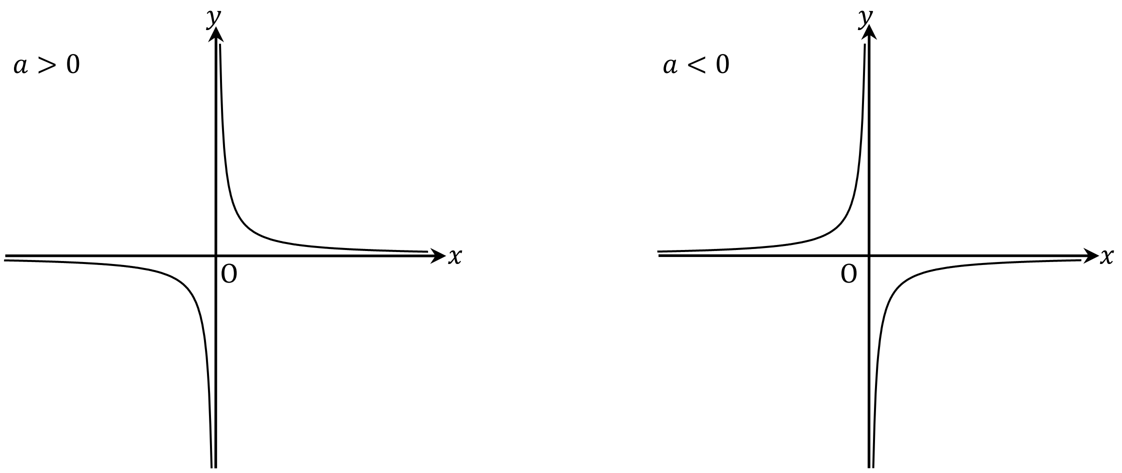
関　数

§1　分数関数

○　$y=\dfrac{a}{x}$ のグラフ

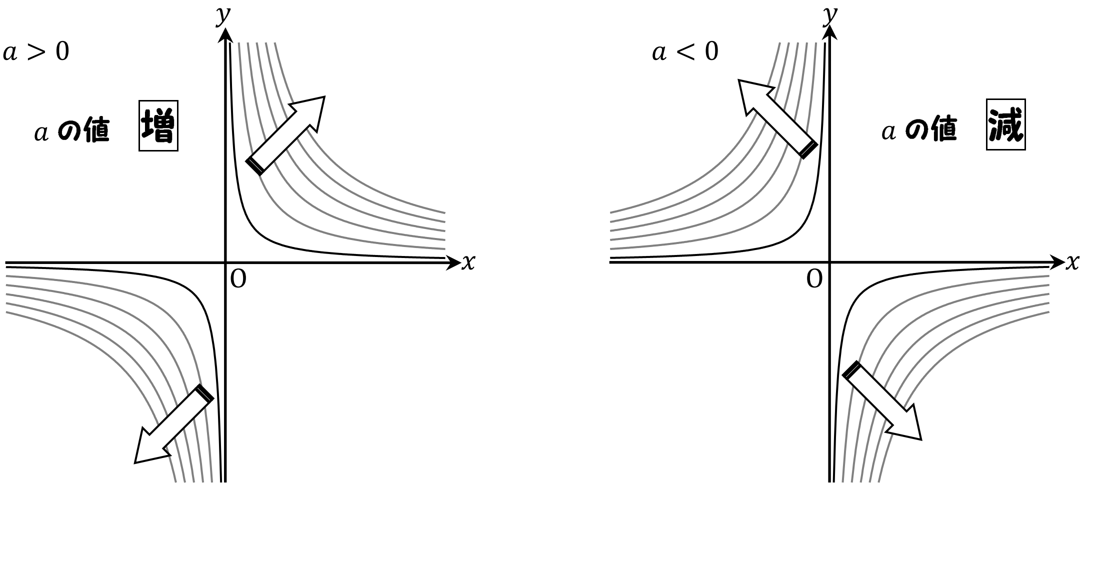
　これは中学校のときに学んだ反比例のグラフである。

　$a>0$ のときは第 1 象限，第 3 象限，$a<0$ のときは第 2 象限，第 4 象限にグラフが存在し，原点に関して対称なグラフになる。また，x 軸，y 軸はこのグラフの**漸近線**になっている。



　一般的にこのようなグラフを**双曲線**といい，このグラフのように漸近線が直角に交わる双曲線を**直角双曲線**という。

また，このグラフは a の値の変化により，次のように動く。



○ $y=\dfrac{a}{x-p}+q$ のグラフ

これは，関数 $y=\dfrac{a}{x}$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したグラフである。この平行移動によって，漸近線は $x=p$，$y=q$ になる。

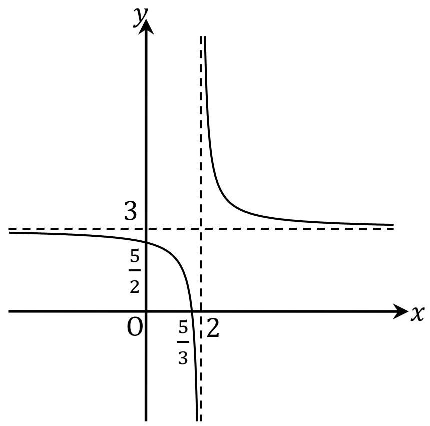
$y=f(x)$ を x 軸方向に a,y 軸方向に b 平行移動したグラフは
$y-b=f(x-a)$

例 1 $y=\dfrac{1}{x-2}+3$ の漸近線を求め，グラフをかきなさい。

これは，$y=\dfrac{1}{x}$ をx 軸方向に 2，y 軸方向に 3 平行移動したグラフなので，漸近線は $x=2$，$y=3$ となる。

x 切片は，$\dfrac{1}{x-2}+3=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-5}{x-2}=0$ よって，$x=\dfrac{5}{3}$

y 切片は，$y=-\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{5}{2}$ となる。



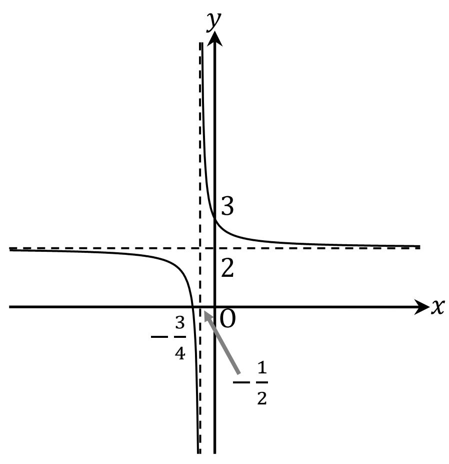
例 2 $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$ の漸近線を求め，グラフをかきなさい。

これは帯分数化することで，平行移動が見えてきます。

$$y=\frac{4x+3}{2x+1}=\frac{1}{2x+1}+2=\frac{1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}+2$$

よって，$y=\dfrac{1}{2x}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に 2 平行移動したグラフとなるので，漸近線は $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=2$ となる。

なお，x 切片は $-\dfrac{3}{4}$，y 切片は 3 となる。



例題 1(1)　関数 $y=\dfrac{3x}{x-2}$ のグラフをかきなさい。また，漸近線を求めなさい。

(2)　(1)において，定義域 $4 \leqq x \leqq 8$ のとき，値域を求めなさい。

練習 1(1)　次の関数のグラフをかきなさい。また，漸近線を求めなさい。

（ア）　$y=\dfrac{3x+5}{x+1}$　　（イ）　$y=\dfrac{-2x+5}{x-3}$　　（ウ）　$y=\dfrac{x-2}{2x+1}$

(2)　(1)の(ア)，(イ)の各関数において，定義域が $2 \leqq x \leqq 4$ のとき，値域を求めなさい。

例題 2(1)　関数 $y=\dfrac{3x+17}{x+4}$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{x+8}{x+3}$ のグラフをどのように平行移動したものですか。

(2)　関数 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ のグラフが，2 直線 $x=3$ と $y=1$ を漸近線とし，更に点$(2,\ 2)$ を通るとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

練習 2(1)　関数 $y=\dfrac{-6x+21}{2x-5}$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{8x+2}{2x-1}$ のグラフをどのように平行移動したものですか。

(2)　関数 $y=\dfrac{2x+c}{ax+b}$ のグラフが点$\left(-2,\ \dfrac{9}{5}\right)$ を通り，2 直線 $x=-\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$ を漸近線にもつとき，定数 a，b，c の値を求めなさい。

例 3 不等式 $\dfrac{x+3}{x-1} \geqq x$ を解きなさい。

まずは左辺の分母を払って，2 次不等式にします。

ただし，不等式なので，分母の正負で場合分けをしないといけません。

解①

（ⅰ） $x-1>0 \iff x>1$ のとき

$x+3 \geqq x(x-1) \iff x^2-2x-3 \leqq 0 \iff (x+1)(x-3) \leqq 0 \iff -1 \leqq x \leqq 3$

$x>1$ より，$1<x \leqq 3$

（ⅱ） $x-1<0 \iff x<1$ のとき

$x+3 \leqq x(x-1) \iff (x+1)(x-3) \geqq 0 \iff x \leqq -1,\ x \geqq 3$

$x<1$ より，$x \leqq -1$

（ⅰ），（ⅱ）より，$x \leqq -1,\ 1<x \leqq 3$

次も，解①と同様に左辺の分母を払いますが，掛けるものを工夫すると場合分けが不要になります。

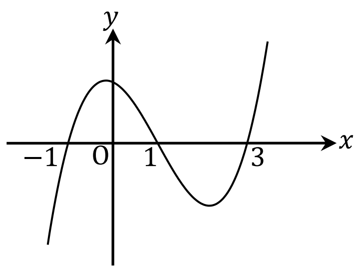
解②

両辺に $(x-1)^2$ を掛ける。$(x-1)^2>0$ より，

$(x+3)(x-1) \geqq x(x-1)^2 \iff (x-1)(x+1)(x-3) \leqq 0$

$\iff x \leqq -1,\ 1 \leqq x \leqq 3$

$x \neq 1$ より，$x \leqq -1,\ 1<x \leqq 3$



最後にグラフを用いて考えます。

解③

$y=\dfrac{x+3}{x-1}$ と $y=x$ のグラフの上下関係を用いて考える。

$y=\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+1$ より，

$y=\dfrac{x+3}{x-1}$ は $y=\dfrac{4}{x}$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 平行移動した

グラフとなる。これと，$y=x$ との交点の x 座標は，

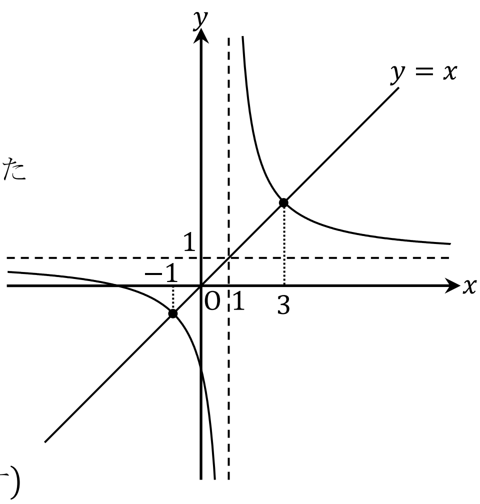
方程式 $\dfrac{x+3}{x-1}=x$ の解となる。両辺に $x-1$ を掛けると，

$(x+3)=x(x-1) \iff x^2-2x-3=0$

$\iff (x+1)(x-3)=0$

$\iff x=-1,\ 3$ (これは $x \neq 1$ を満たす)

グラフより，$x \leqq -1,\ 1<x \leqq 3$



例題 3 (1)　関数 $y=\dfrac{2}{x+3}$ のグラフと直線 $y=x+4$ の共有点の座標を求めなさい。

(2)　不等式 $\dfrac{2}{x+3}<x+4$ を解きなさい。

練習 3 (1)　関数 $y=\dfrac{4x-3}{x-2}$ のグラフと直線 $y=5x-6$ の共有点の座標を求めなさい。

(2)　不等式 $\dfrac{4x-3}{x-2}\geqq 5x-6$ を解きなさい。

例題 4　次の方程式，不等式を解きなさい。

(1)　$\dfrac{2}{x(x+2)}-\dfrac{x}{2(x+2)}=0$

(2)　$\dfrac{3-2x}{x-4}\leqq x$

練習 4　次の方程式，不等式を解きなさい。

(1)　$2-\dfrac{6}{x^2-9}=\dfrac{1}{x+3}$

(2)　$\dfrac{4x-7}{x-1}\leqq -2x+1$

例題 5　k は定数とする。方程式 $\dfrac{x-5}{x-2}=3x+k$ の実数解の個数を調べなさい。

練習 5　k は定数とする。方程式 $\dfrac{2x+9}{x+2}=-\dfrac{x}{5}+k$ の実数解の個数を調べなさい。

§2　無理関数

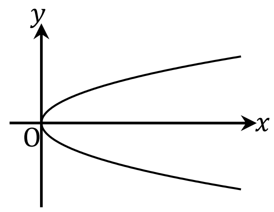
$y=\sqrt{f(x)}$ で表される関数を**無理関数**という。ここでは $f(x)$ が 1 次式の場合を考える。

○　$y=\pm\sqrt{x}$ のグラフ

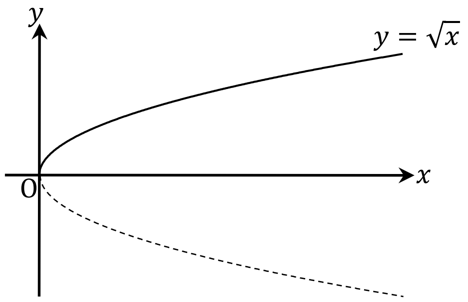
まず，$y=\pm\sqrt{x}$ の両辺を 2 乗する。

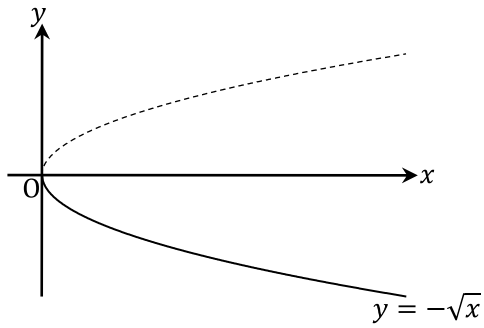
$$y=\pm\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^2=x$$

これは y についての 2 次関数になっているので，
右のようなグラフになる。



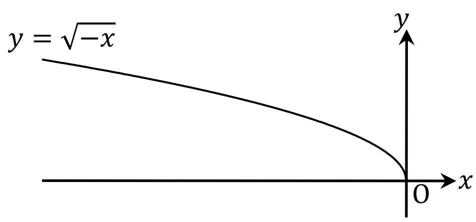
ここで，$\sqrt{\ \ }\geqq 0$ より，$y=\sqrt{x}\geqq 0$，$y=-\sqrt{x}\leqq 0$ となるのでグラフは以下のようになる。





○　$y=\sqrt{-x}$ のグラフ

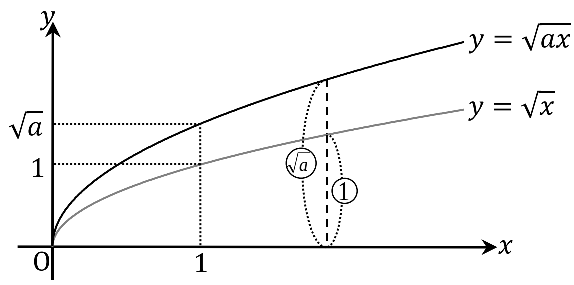
これは，$y=\sqrt{x}$ の x を $-x$ に変えた式なので，
$y=\sqrt{x}$ を y 軸に関して対称移動したグラフとなる。



○　$y=\sqrt{ax}$ のグラフ

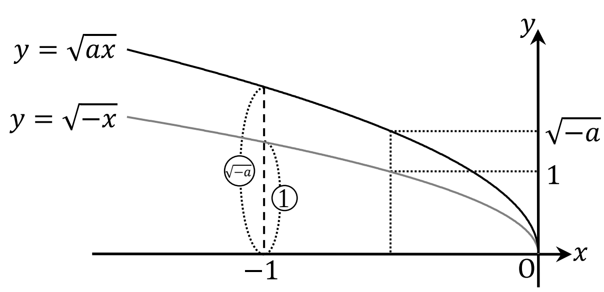
①　$a>0$ のとき

$y=\sqrt{ax}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$ より，$y=\sqrt{ax}$ のグラフは
$y=\sqrt{x}$ のグラフを，y 軸方向に $\sqrt{a}$ 倍したグラフ
である。

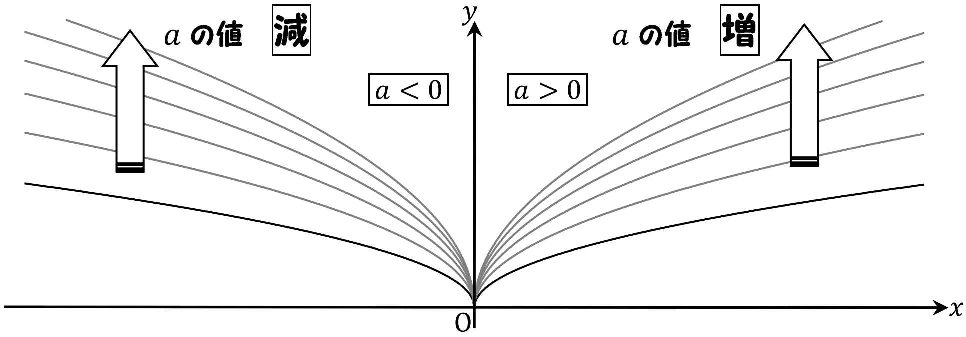


②　$a<0$ のとき

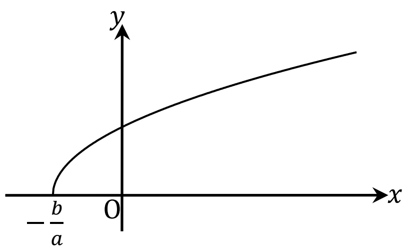
$y=\sqrt{ax}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-x}$ より，$y=\sqrt{ax}$ のグラフは
$y=\sqrt{-x}$ のグラフを，y 軸方向に $\sqrt{-a}$ 倍したグラフ
である。



このことから，このグラフは a の値の変化により，次のように動く。



○ $y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ



これは，

$$y=\sqrt{ax+b} \quad \Leftrightarrow \quad y=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}$$

と変形することで，$y=\sqrt{ax}$ を x 軸方向に $-\frac{b}{a}$ 平行移動したグラフであることが分かる。

また定義域は，$ax+b \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqq -\frac{b}{a}$ となる。

例 4 $y=\sqrt{2x-6}-2$ の定義域を求め，グラフをかきなさい。

定義域は，$2x-6 \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqq 3$

$$y=\sqrt{2x-6}-2=\sqrt{2(x-3)}-2$$

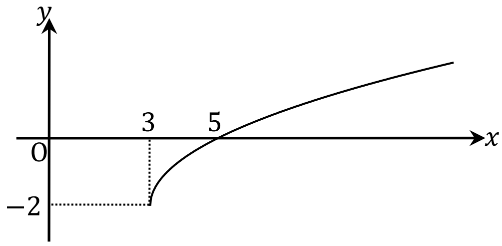
これより，求めるグラフは，$y=\sqrt{2x}$ を

x 軸方向に 3，y 軸方向に-2 平行移動したグラフとなる。

x 切片は，

$$\sqrt{2x-6}-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2x-6}=2$$

両辺 2 乗すると，$2x-6=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=5$



例 5 方程式 $\sqrt{x} = x - 2$ を解きなさい。

両辺を 2 乗すると，必要十分ではなくなるので注意が必要です。

$\sqrt{x} = x - 2$ …①

①の両辺を 2 乗すると，

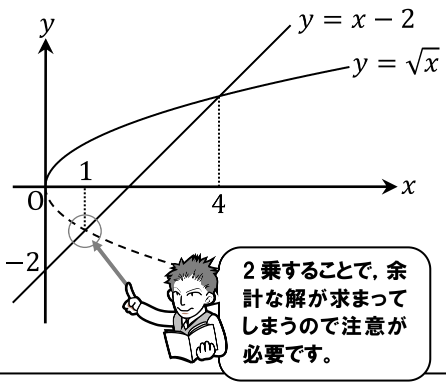
$x = x^2 - 4x + 4 \iff x^2 - 5x + 4 = 0$

$\iff (x-1)(x-4) = 0$

$\iff x = 1,\ 4$

平方根の中は 0 以上で，かつ①の右辺は 0 以上なので $x \geqq 2$

よって，$x = 4$



例 6 不等式 $\sqrt{x} > x - 2$ を解きなさい。

2 乗する前に，両辺の正負を調べないと，不等号の向きが決定できません。

解①

平方根の中は 0 以上なので，$x \geqq 0$ …①

（ⅰ） $x - 2 < 0$ のとき

$\sqrt{x} \geqq 0$ より，不等式は常に成り立つ。よって，$x < 2$ …②

（ⅱ） $x - 2 \geqq 0$ のとき

両辺正より 2 乗すると，

$x > x^2 - 4x + 4 \iff x^2 - 5x + 4 < 0$

$\iff (x-1)(x-4) < 0$

$\iff 1 < x < 4$

$x \geqq 2$ より，$2 \leqq x < 4$ …③

①，②，③より，$0 \leqq x < 4$

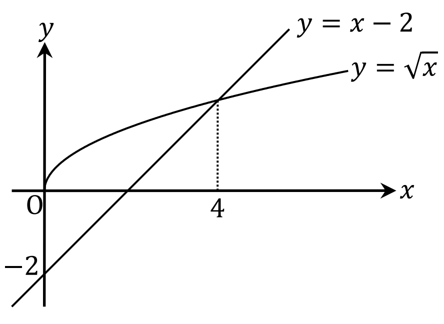
この問題の場合，グラフを用いると簡単に解決します。

解②

$y = \sqrt{x}$ と $y = x - 2$ のグラフの上下関係を用いる。

交点の x 座標は $x = 4$ なので，

求める範囲は，$0 \leqq x < 4$



例題 6 (1)　関数 $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフをかきなさい。また，この関数の定義域が $0\leqq x\leqq 3$ であるとき，値域を求めなさい。

(2)　関数 $y=\sqrt{4-x}$ が $a\leqq x\leqq b$ の範囲において，$1\leqq y\leqq 2$ の値をとるように，定数 a, b の値を定めなさい。

練習 6 (1)　次の関数のグラフをかきなさい。また，値域を求めなさい。

（ア）　$y=\sqrt{3x-4}$　　（イ）　$y=\sqrt{-2x+4}$ $(-2\leqq x\leqq 1)$　　（ウ）　$y=\sqrt{2-x}-1$

(2)　関数 $y=\sqrt{2x+4}$ $(a\leqq x\leqq b)$ の値域が $1\leqq y\leqq 3$ であるとき，定数 a, b の値を定めなさい。

例題 7　$y=\sqrt{2x-3}$　…①と $y=x-3$　…②について

(1)　2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めなさい。

(2)　不等式 $\sqrt{2x-3}>x-3$ を満たす x の値の範囲を求めなさい。

練習 7 (1)　直線 $y=8x-2$ と関数 $y=\sqrt{16x-1}$ のグラフの共有点の座標を求めなさい。

(2)　次の不等式を満たす x の値の範囲を求めなさい。

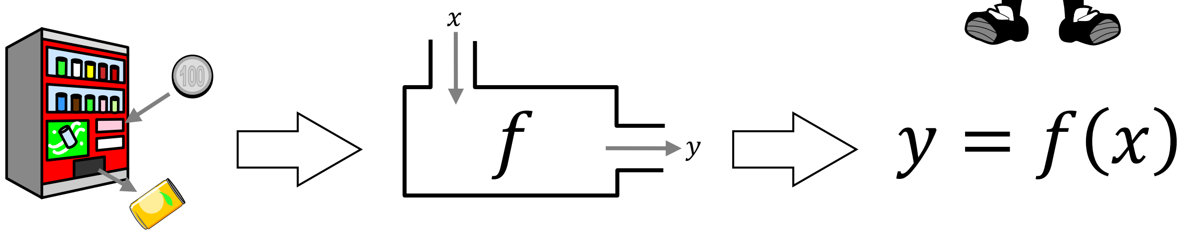
（ア）　$\sqrt{3-x}>x-1$　　（イ）　$x+2\leqq\sqrt{4x+9}$　　（ウ）　$\sqrt{x}+x<6$

例題 8　方程式 $2\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}x+k$ の実数解の個数を，定数 k の値によって調べなさい。

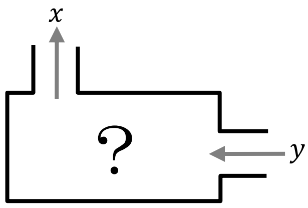
練習 8　方程式 $\sqrt{2x+1}=x+k$ の実数解の個数を，定数 k の値によって調べなさい。

§3　逆関数と合成関数

x の値をひとつ決めるとそれに応じて，y の値が規則 f によって**ただひとつ**定められるとき，**『y は x の関数である』**といい，この規則 f のことを**関数**という。このとき，x，y の関係を $y=f(x)$ と表す。



○　逆関数



$y=f(x)$ は，ある値 x を y に移す関数である。
ここでは，ある値 y を x に移すような**逆向きの変換**を考える。

例えば，関数 $y=2x+3$ を考えると，この関数によって次のような変換が起こる。

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 5 \\ 2 & \longrightarrow & 7 \\ 3 & \longrightarrow & 9 \\ & \vdots & \end{array}$$

ここでは，逆向きの変換を考えるので，次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longleftarrow & 5 \\ 2 & \longleftarrow & 7 \\ 3 & \longleftarrow & 9 \\ & \vdots & \end{array}$$

これは，**「y から x への対応」**となるので，$y=2x+3$ を x について解いて

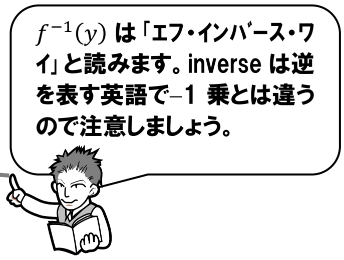
$$x=\frac{y-3}{2}$$

これが逆向きの変換を表す式となる。

一般的に関数 $y=f(x)$ を x について解いた式が，y についての関数になっているとき，この式を

$$x=f^{-1}(y)$$

と表し，$y=f(x)$ の**逆関数**という。



普通，関数は従属変数をy，独立変数を x で表すので $y=2x+3$ の逆関数は次のように表す。

$$y=f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$$

逆関数の求め方

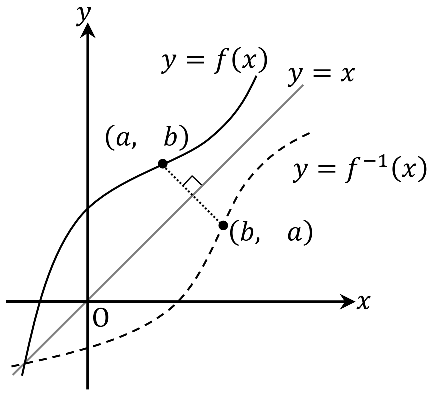
① $y=f(x)$ を x について解く　$x=f^{-1}(y)$

② x と y を入れ替える　$y=f^{-1}(x)$

○　逆関数のグラフ

関数 $y=f(x)$ 上に任意の点 $(a,\ b)$ をとると，$b=f(a)$ が成立して

いる。これを a について解くと $a=f^{-1}(b)$ となるが，これは関数 $y=f^{-1}(x)$ 上に点 $(b,\ a)$ があることを意味している。



$(a,\ b)$ と $(b,\ a)$ は $y=x$ に関して対称な点なので

『$y=f(x)$ **と** $y=f^{-1}(x)$ **は** $y=x$ **に関して対称**』

なグラフとなる。

例 7　関数 $y=x^2-4x+3$ $(x\geqq 2)$ の逆関数を求め，そのグラフをかきなさい。

x について解くと，

$$y=x^2-4x+3 \iff x^2-4x+3-y=0$$
$$\iff x=2\pm\sqrt{y+1}$$

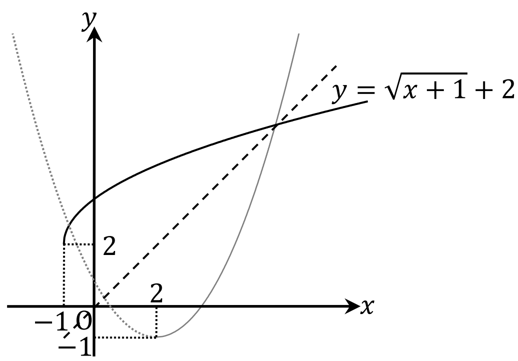
$x\geqq 2$ より，$x=2+\sqrt{y+1}$

よって，求める逆関数は x と y を入れ替えて

$$y=\sqrt{x+1}+2$$

となる。

また，これよりグラフは右図となる。



なお，逆関数を求める際に，x と y を入れ替えるので，

『$f(x)$ の定義域　⇔　$f^{-1}(x)$ の値域』

という関係が成り立つ。

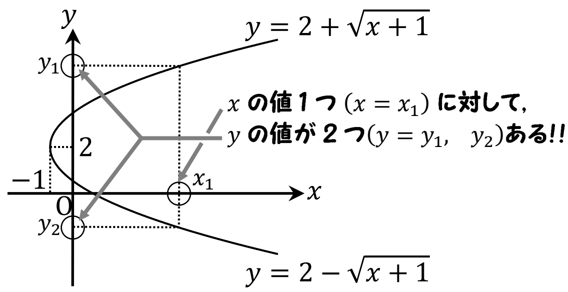
ちなみに，上の例において，定義域 $x \geqq 2$ を外すと逆関数は存在しない。

『関数 $y = x^2 - 4x + 3$ の逆関数は存在しない』

なぜなら，定義域がないと逆関数は $y = 2 \pm \sqrt{x+1}$ となってしまい，これは関数の定義に反する(下図参照)。

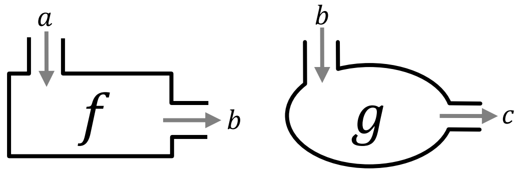
結局，逆関数は全ての関数に対して存在するわけではなく，存在するには次のような条件が必要になる。

> **$y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ が存在するには $y = f(x)$ が単調増加または単調減少でなくてはならない。**

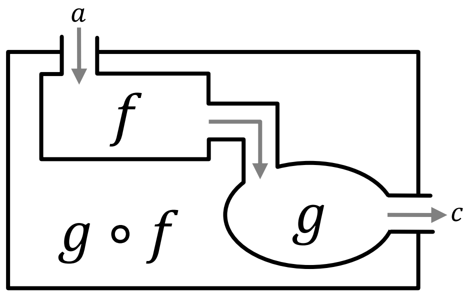


○ 合成関数

2 つの関数 $y = f(x)$，$y = g(x)$ において，ある値 a を関数 f によって b に移し，今度は b を関数 g によって c に移すような連続的な変換を考える。



このとき，$b = f(a)$，$c = g(b)$ より，$c = g\big(f(a)\big)$ となる。ここで，$y = g\big(f(x)\big)$ は a の値を 1 つ決めると，それに応じて，c の値が 1 つ決まるので関数の関係にある。この $y = f(x)$，$y = g(x)$ によって新たに作られた関数$y = g\big(f(x)\big)$ を**合成関数**という。合成関数は $(g \circ f)(x)$ または $g \circ f$ とも表す。



例 8　$f(x) = 2x + 3$，$g(x) = x^2 + 1$ のとき，合成関数 $(g \circ f)(x)$，$(f \circ g)(x)$ を求めなさい。

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$
$$= g(2x+3) = (2x+3)^2 + 1 = 4x^2 + 12x + 10$$
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$
$$= f(x^2+1) = 2(x^2+1) + 3 = 2x^2 + 5$$

この例からも分かるとおり，一般的に$(g \circ f)(x)$と$(f \circ g)(x)$ は異なる。

なお，合成関数は $(g \circ f)(x)$ は，$f(x)$ の値域が，$g(x)$ の定義域に含まれているときのみ存在する。
例えば，$f(x) = 2x + 3$，$g(x) = \sqrt{x-1}$ とすると，常に $(g \circ f)(x)$ が存在するわけではない。
$g(x)$ の定義域が $x \geqq 1$ なので，$f(x)$ の値域が $y \geqq 1$ のときのみ合成関数が存在する。
つまり，$f(x)$ の定義域を $x \geqq -1$ とすると，合成関数が存在する。

例題 9　次の関数の逆関数を求めなさい。また，そのグラフをかきなさい。

(1)　$y=\dfrac{3}{x}+2\ \ (x>0)$　　(2)　$y=\sqrt{-2x+4}$　　(3)　$y=2^x+1$

練習 9　次の関数の逆関数を求めなさい。また，そのグラフをかきなさい。

(1)　$y=-2x+1$　　(2)　$y=\dfrac{x-2}{x-3}$　　(3)　$y=-\dfrac{1}{2}(x^2-1)\ \ (x\geqq 0)$

(4)　$y=-\sqrt{2x-5}$　　(5)　$y=\log_3(x+2)\ \ (1\leqq x\leqq 7)$

例題 10　a，b は定数で $ab\neq 1$ とする。関数 $y=\dfrac{bx+1}{x+a}$ …① の逆関数が，もとの関数と一致するための条件を求めなさい。

練習 10 (1)　$a\neq 0$ とする。関数 $f(x)=2ax-5a^2$ について，$f^{-1}(x)$ と $f(x)$ が一致するような定数 a の値を求めなさい。

(2)　関数 $y=\dfrac{ax+b}{x+2}$　$(b\neq 2a)$のグラフは点 $(1,\ 1)$ を通り，また，この関数の逆関数はもとの関数と一致する。定数 a，b の値を求めなさい。

例題 11　$f(x)=x^2-2x+k\ \ (x\geqq 1)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めなさい。

練習 11　$a>0$ とし，$f(x)=\sqrt{ax-2}-1\ \ \left(x\geqq\dfrac{2}{a}\right)$ とする。関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるとき，a の値の範囲を求めなさい。

例題 12 (1)　$f(x)=x+2$,　$g(x)=2x-1$,　$h(x)=-x^2$ とするとき，

（ア）　$(g\circ f)(x)$,　$(f\circ g)(x)$ を求めなさい。　　（イ）　$\big(h\circ(g\circ f)\big)(x)=\big((h\circ g)\circ f\big)(x)$ を示しなさい。

(2)　2 つの関数 $f(x)=x^2-2x+3$,　$g(x)=\dfrac{1}{x}$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$ の値域を求めなさい。

練習 12 (1)　$f(x)=x-1$,　$g(x)=-2x+3$,　$h(x)=2x^2+1$ とするとき，次のものを求めなさい。

（ア）　$(f\circ g)(x)$　　（イ）　$(g\circ f)(x)$　　（ウ）　$(g\circ g)(x)$

（エ）　$\big((h\circ g)\circ f\big)(x)$　　（オ）　$\big(f\circ(g\circ h)\big)(x)$

(2)　関数 $f(x)=x^2-2x$,　$g(x)=-x^2+4x$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$ の定義域と値域を求めなさい。

例題 13　a, b, c, k は実数の定数で，$a \neq 0$, $k \neq 0$ とする。2 つの関数 $f(x) = ax^3 + bx + c$, $g(x) = 2x^2 + k$ に対して，合成関数に関する等式 $g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big)$ がすべての x について成り立つとする。このとき，a, b, c, k の値を求めなさい。

練習 13　3 次関数 $f(x) = x^3 + bx + c$ に対し，$g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big)$ を満たすような 1 次関数 $g(x)$ をすべて求めなさい。

例題 14　$x \neq 1$, $x \neq 2$ のとき，関数 $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ について，$f_2(x) = f\big(f(x)\big)$, $f_3(x) = f\big(f_2(x)\big)$, $\cdots$, $f_n(x) = f\big(f_{n-1}(x)\big)$ $[n \geqq 3]$ とする。このとき，$f_2(x)$, $f_3(x)$ を計算し，$f_n(x)$ $[n \geqq 2]$ を求めなさい。

練習 14　x の関数 $f(x) = ax + 1$ $(0 < a < 1)$ に対し，$f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f\big(f_1(x)\big)$, $f_3(x) = f\big(f_2(x)\big)$, $\cdots$, $f_n(x) = f\big(f_{n-1}(x)\big)$ $[n \geqq 2]$ とする。このとき，$f_n(x)$ を求めなさい。