

微 分 (数学Ⅲ)

§ 1 微分可能とは

関数 $f(x)$ が $x = a$ において**微分可能**であるとは、極限值

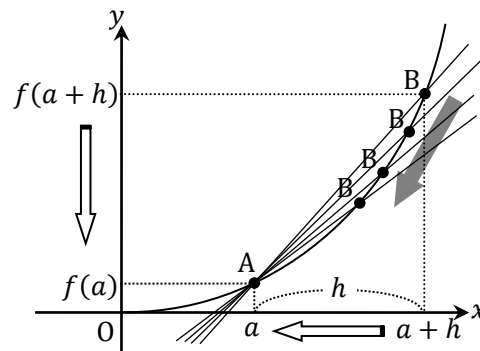
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在することをいう。

この存在する値のことを**微分係数**といい、 $f'(a)$ とかく。

これは、 $y = f(x)$ の $x = a$ における接線の傾きを表す。

また、 $f(x)$ がある区間 I の各点において微分可能であるとき $f(x)$ は『**区間 I において微分可能である**』という。



微分可能なグラフの例

$f(x) = x^3$ はグラフ上の任意の点に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2$$

となるので、この関数 $y = f(x)$ は全ての範囲において微分可能である。

微分不可能なグラフの例

関数 $f(x) = |x^2 - 4|$ は $x = 2$ において微分不可能となる。

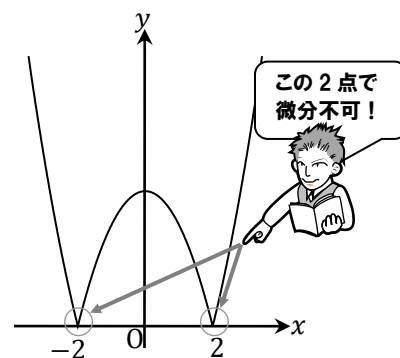
なぜなら、

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|(2+h)^2 - 4| - |2^2 - 4|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h^2 + 4h|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} (h + 4) = 4$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{|(2+h)^2 - 4| - |2^2 - 4|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h^2 + 4h|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \{-(h + 4)\} = -4$$

となり、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ が存在しないからである。

これは、 $x = -2$ においても同様のことが言える。



○ 微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるとは、

$$\text{『極限值 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ が存在する』}$$

ことであった。

今、 $x \rightarrow a$ のとき分母は 0 に収束するので、極限值が存在するためには、分子も 0 に収束する必要がある。

つまり、 $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能となるには、

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \cdots (*)$$

となる必要がある。

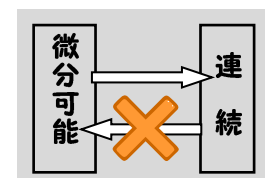
関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において連続であるとは
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
 が成り立つことをいう。

(*) の関係式は、 $y = f(x)$ が $x = a$ において連続であることを表しているの、
 微分可能と連続には次のような関係があることが分かる。

『関数 $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるためには、 $x = a$ において連続となる必要がある』

また、これは次のように言い換えることもできる。

『関数 $f(x)$ が $x = a$ において微分可能ならば、 $x = a$ において連続である』



なおこれは、一般的に**逆が成り立たない**。

実際、先ほどの $y = |x^2 - 4|$ は連続関数であるが、 $x = \pm 2$ において微分不可である。

例 1 関数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & (x \geq 1) \\ 3x + 2a + 1 & (x < 1) \end{cases}$ が $x = 1$ で微分可能となるように定数 a, b の値を求めなさい。

$x = 1$ で連続となる必要があるので、 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\text{つまり、} \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 2a + 4 = a + b$$

よって、 $b = a + 4 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{a(1+h)^2 + b(1+h) - (a+b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{ah^2 + 2ah + bh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} (ah + 2a + b) = 2a + b \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{3(1+h) + 2a + 1 - (a+b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{3(1+h) + 2a + 1 - (a + a + 4)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned}$$

$f'(1)$ が存在するためには、 $2a + b = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より、} a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{11}{3}$$

例題 1 次の関数は、[] で示された点において連続であるか、微分可能であるかを調べなさい。

(1) $f(x) = |x - a|$ (a は実数の定数) [$x = a$]

(2) $f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \geq 0) \\ x^2 + x & (x < 0) \end{cases}$ [$x = 0$]

練習 1 次の関数は、 $x = 0$ において連続であるか、微分可能であるかを調べなさい。

(1) $f(x) = |x| \sin x$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \frac{x}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} & (x \neq 0) \end{cases}$

例題 2 関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 2 & (x \geq 1) \\ x^3 + (1 - a)x^2 & (x < 1) \end{cases}$$

$f(x)$ が $x = 1$ で微分可能となるように、定数 a , b の値を定めなさい。

練習 2 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2} + 3 & (x \geq 2) \\ ax^2 + bx & (x < 2) \end{cases}$ で定義される関数 $f(x)$ が $x = 2$ で微分可能となるように、定数 a , b の値を定めなさい。

§2 積の微分・商の微分

数学Ⅱでも学んだとおり，導関数の定義は次のようになる。

⚽ 導関数の定義 ⚽

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

x の関数 $f(x)$ から $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を x で**微分する**という。

なお，導関数を表す記号は $f'(x)$ のほかに， y' ， $\frac{dy}{dx}$ ， $\frac{d}{dx}f(x)$ などの記号も使う。

ここからは，導関数の定義式を用いて，微分の公式を導いていく。

○ 積の微分

ここでは，積の形をした式 $f(x)g(x)$ の微分公式を求める。

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) - f(x)\{g(x) - g(x+h)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$



ここがポイント！同じ項を引いて，足しています。

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

よって， $\boxed{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

さらに，この結果を使うと 3 つの積の場合も公式を作ることができる。

$$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)\{g(x)h(x)\} + f(x)\{g(x)h(x)\}'$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)\{g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\}$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

よって， $\boxed{\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)}$

この公式の規則性が分かりますか？

それが分かれば，4 つ，5 つの積の公式も簡単に作れるはずですよ。

例 2 $y = (2x^3 + 1)(x^2 - 3)$ を微分しなさい。

この問題は展開して微分することも可能ですが、積の微分を用いれば、展開する手間を省くことができ、計算ミスも減ります。この公式は『**微分・そのまま・そのまま・微分**』と覚えておくとよいでしょう。

$$y' = \underbrace{6x^2}_{2x^3+1 \text{ の微分}} \cdot (x^2 - 3) + (2x^3 + 1) \cdot \underbrace{2x}_{x^2-3 \text{ の微分}} = 10x^4 - 18x^2 + 2x$$

○ 商の微分

ここでは、商の形をした式 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ の微分公式を求める。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x) - f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \left\{ g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

よって、 $\boxed{\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

例 3 $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ を微分しなさい。

$$y' = \frac{\underbrace{3x^2}_{x^3 \text{ の微分}} \cdot (x^2 + 1) - \underbrace{x^3}_{x^2+1 \text{ の微分}} \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$y = x^n$ (n は負の整数) の微分

数学Ⅱの微分において、微分公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ を習ったが、この場合、 n の範囲は**自然数**であった。
ここでは新たに、 n が**負の整数**のときの公式を、商の微分を利用してつくっていく。

$$n = -m \ (m > 0) \text{ とすると, } y = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

ここで、商の微分を使うと

$$y' = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

となる。このことから、微分公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ が、 n が自然数だけではなく、**負の整数**の場合でも成り立っていることが分かる。

例題 3 次の関数を微分しなさい。

$$\begin{array}{lll} (1) \ y = x^4 + 2x^3 - 3x & (2) \ y = (2x - 1)(x^2 - x + 3) & (3) \ y = \frac{2x - 3}{x^2 + 1} \\ (4) \ y = \frac{2x^3 + x - 1}{x^2} & (5) \ y = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3) & \end{array}$$

練習 8 次の関数を微分しなさい。

$$\begin{array}{lll} (1) \ y = 3x^5 - 2x^4 + 4x^2 - 2 & (2) \ y = (x^2 + 2x)(x^2 - x + 1) & (3) \ y = (x^3 + 3x)(x^2 - 2) \\ (4) \ y = (x + 3)(x^2 - 1)(-x + 2) & (5) \ y = \frac{1}{x^2 + x + 1} & (6) \ y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \\ (7) \ y = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{x^2} & (8) \ y = \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x^2 + 3} & \end{array}$$

§ 3 合成関数の微分

u の関数 $y = f(u)$ と, x の関数 $u = g(x)$ がともに微分可能であるとき, 合成関数 $y = f(g(x))$ の微分公式を作ります。

$$\begin{aligned}\{f(g(x))\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &\quad \text{微分の定義式 } g'(x)\end{aligned}$$



分子, 分母に
同じものをか
ける。

ここで, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}$ について考える。

$g(x) = u$, $g(x+h) = v$ とおくと, $h \rightarrow 0 \Rightarrow v \rightarrow u$ となるので,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \lim_{v \rightarrow u} \frac{f(v) - f(u)}{v - u} = f'(u) = f'(g(x))$$

これより, $\boxed{\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$ となる。

また, $y = f(u)$, $u = g(x)$ なので, $f'(g(x)) = f'(u) = \frac{dy}{du}$, $g'(x) = \frac{du}{dx}$ と表すことができる。

これより,

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

と表すこともできる。

例 4 $y = (x^2 + 3x)^3$ を微分しなさい。

まず, 外側を微分し, それ
から中の微分をします。

$$\boxed{}' \cdot \boxed{}'$$

$y = u^3$, $u = x^2 + 3x$ とおくと,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot (2x + 3) = 3(x^2 + 3x)^2(2x + 3)$$



○ 逆関数の微分

微分可能な関数 $y = f(x)$ の逆関数が存在するときそれを $x = f^{-1}(y)$ と表した。
ここではその逆関数の微分について考えよう。

まず, $x = f^{-1}(y) = g(y)$ とおくと, $x = g(f(x))$ となる。ここで, 両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}g(f(x)) \Leftrightarrow 1 = g'(f(x))f'(x)$$

合成関数の微分

ここで, $f(x) = y$ であるから, 次のような関係が成立する。

$$1 = g'(f(x))f'(x) \Leftrightarrow 1 = g'(y)f'(x) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{g'(y)}}$$

また, $y = f(x)$, $x = g(y)$ なので, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, $g'(y) = \frac{dx}{dy}$ と表すことができる。

$$\text{これより, } f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}} \text{ と表すこともできる。}$$

例 5 $y = \sqrt{x}$ を微分しなさい。

両辺を 2 乗すると, $x = y^2$

$$\frac{dx}{dy} = 2y \text{ より, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$y = x^n$ (n は有理数) の微分

p.6 では n の範囲を負の整数まで拡張した。ここでは n が**有理数**のときを考える。

$$n = \frac{q}{p} \text{ (} p, q \text{ 整数, } p \neq 0 \text{)} \text{ とし, 両辺 } p \text{ 乗すると, } y^p = \left(x^{\frac{q}{p}}\right)^p \Leftrightarrow y^p = x^q$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}y^p = \frac{d}{dx}x^q \Leftrightarrow py^{p-1} \cdot y' = qx^{q-1} \Leftrightarrow y' = \frac{q}{p} \cdot \frac{x^{q-1}}{y^{p-1}} = \frac{q}{p} \cdot \frac{x^{q-1}}{x^{\frac{q}{p}(p-1)}} = \frac{q}{p} x^{\frac{q}{p}-1} = nx^{n-1}$$

合成関数の微分

これより, 微分公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ が, n が**有理数**であっても成立していることが分かる。

これを用いると上の**例 5**は, $y = x^{\frac{1}{2}}$ の微分になるので,

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

と計算することができる。

○ 陰関数の微分

$y = f(x)$ のような形をしている関数を**陽関数**, $f(x, y) = 0$ のような形をしているものを**陰関数**という。

$y = 2x + 1$, $y = x^2$ などは陽関数で, $x^2 + y^2 = 1$, $xy = 1$ などは陰関数である。

ここでは, 陰関数の微分を具体的に見てみよう。

例 6 $x^2 + y^2 = 1$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ を求めなさい。

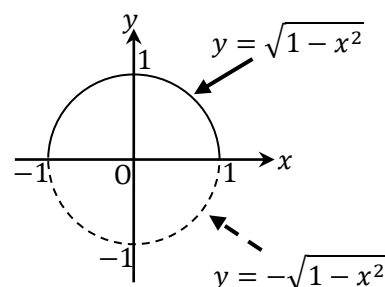
まずは, 「 $y = \dots$ 」の形に直してから微分します。

解① $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$

ここで合成関数の微分を使うと,

$y = \pm u^{\frac{1}{2}}$ と $u = 1 - x^2$
の合成関数の微分

$$y' = \pm \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{dy}{du}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\frac{du}{dx}} = \mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{復号同順})$$



次に, 「 $y = \dots$ 」の形に直さないで直接微分します。

解② 両辺を x で微分する。

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \underbrace{\frac{d}{dx}y^2}_{\text{合成関数の微分}} = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow 2x + 2y \cdot y' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

解② の y に $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ を代入すれば **解①** と同じ結果になることが分かる。

例題 4 次の関数を微分しなさい。

$$(1) \ y = (x^2 + 1)^3 \quad (2) \ y = \frac{1}{(2x-3)^2} \quad (3) \ y = (3x+1)^2(x-2)^3 \quad (4) \ y = \frac{x-1}{(x^2+1)^2}$$

練習 4 次の関数を微分しなさい。

$$\begin{array}{lll} (1) \ y = (x-3)^3 & (2) \ y = (x^2-2)^2 & (3) \ y = (x^2+1)^2(x-3)^3 \\ (4) \ y = \frac{1}{(x^2-2)^3} & (5) \ y = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 & (6) \ y = \frac{(2x-1)^3}{(x^2+1)^2} \end{array}$$

例題 5 (1) $y = x^3$ の逆関数の導関数を求めなさい。

(2) $y = x^3 + 3x$ の逆関数を $g(x)$ とするとき、微分係数 $g'(0)$ を求めなさい。

(3) 次の関数を微分しなさい。

(ア) $y = \sqrt[4]{x^3}$

(イ) $y = \sqrt{x^2 + 3}$

練習 5 (1) $y = \frac{1}{x^3}$ の逆関数の導関数を求めなさい。

(2) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x = \frac{1}{65}$ における微分係数を求めなさい。

(3) 次の関数を微分しなさい。

(ア) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(イ) $y = \sqrt{4 - x^2}$

(ウ) $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

例題 6 方程式 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を x と y を用いて表しなさい。

練習 6 次の方程式で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を x と y を用いて表しなさい。

(1) $y^2 = x$

(2) $x^2 - y^2 = 4$

(3) $(x+1)^2 + y^2 = 9$

(4) $3xy - 2x + 5y = 0$

§4 パラメータ表示された関数の微分

時刻 t のときの位置が $(f(t), g(t))$ であるような曲線を考える。

ここでは、 $x = f(t)$, $y = g(t)$ がともに微分可能であるとき、

$\frac{dy}{dx}$ を t の式で表してみよう。ただし、 $f'(t) \neq 0$ とする。

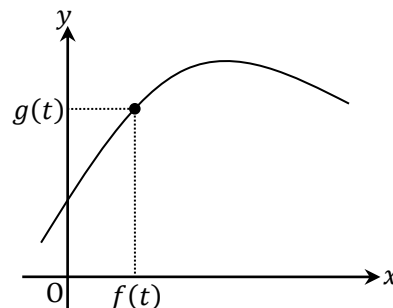
$$x = f(t) \Leftrightarrow t = f^{-1}(x) \text{ より, } y = g(f^{-1}(x))$$

これより、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} g(f^{-1}(x)) = g'(f^{-1}(x)) \cdot \{f^{-1}(x)\}' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

合成関数の微分

また、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ より、 $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$ となる。



例7 $x = 2t - 1$, $y = 3 - 4t^2$ のとき、 $\frac{dy}{dx}$ を求めなさい。

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = -8t \text{ となるから, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-8t}{2} = -4t$$

この場合、2式より t を消去すると $y = -x^2 - 2x + 2$ となるので、 $\frac{dy}{dx} = -2x - 2$ とすることもできる。

例題7 x の関数 y が、 t , θ を媒介変数として、次の式で表されるとき、導関数 $\frac{dy}{dx}$ を t と θ の関数として表しなさい。ただし、(2)の a は正の定数とする。

$$(1) \begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

練習7 x の関数 y が、 t , θ を媒介変数として、次の式で表されるとき、導関数 $\frac{dy}{dx}$ を t と θ の関数として表しなさい。

$$(1) \begin{cases} x = 2t^3 + 1 \\ y = t^2 + t \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = t^2 + 2 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x = 3 \cos^3 \theta \\ y = 2 \sin^3 \theta \end{cases}$$

dy, dx の記号について

微分の公式は全て dy, dx の記号を用いて以下のように表すことができた。

(合成関数の微分)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(逆関数の微分)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

(パラメータの微分)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

これらの公式は一見覚えづらい形になっているが、実はよく見ると、ただの分数の計算になっていることが分かる。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a}{b}} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{c}{b}} \end{aligned}$$

$\frac{dy}{dx}$ は本来、「ディー・ワイ、ディー・エックス」と読むが、実際は「ディー・エックス分のディー・ワイ」という分数の意味

が込められている。このことから、今まで学んだ微分公式はわざわざ暗記しなくても、分数と同様に式変形することで、自然と出てくることが分かる。

§ 5 三角関数の微分

ここでは、三角関数の微分公式を作る。

まずは $\sin x$ の微分から考えていく。

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sin x \cdot \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right\} = \cos x
 \end{aligned}$$

加法定理

$$\begin{aligned}
 \sin(x+h) \\
 &= \sin x \cos h + \cos x \sin h
 \end{aligned}$$

三角関数の極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

この結果を使うと残りの三角関数の微分は以下ようになる。

$$(\cos x)' = \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right\}' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \underbrace{(-1)}_{\frac{\pi}{2} - x \text{ の微分}} = -\sin x$$

合成関数の微分

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

商の微分

● 三角関数の微分 ●

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

例 8 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \sin(2x - 1)$

(2) $y = \cos^2(3x + 2)$

(3) $y = \frac{1}{\tan(1-x)}$

どのような関数の合成関数になっているのかを見極めることがポイントです。

$$(1) \quad y' = \underbrace{\cos(2x-1)}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{2}_{\frac{du}{dx}} = 2 \cos(2x-1)$$

$y = \sin u$ と $u = 2x - 1$
の合成関数の微分

$$(2) \quad y' = \underbrace{2 \cos(3x+2)}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{\{-\sin(3x+2)\}}_{\frac{du}{dt}} \cdot \underbrace{3}_{\frac{dt}{dx}} = -6 \sin(3x+2) \cos(3x+2) = -3 \sin(6x+4)$$

$y = u^2$ と $u = \cos t$ と $t = 3x + 2$
の合成関数の微分

$$(3) \quad y' = \underbrace{-\{\tan(1-x)\}^{-2}}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2(1-x)}}_{\frac{du}{dt}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{\tan^2(1-x) \cos^2(1-x)} = \frac{1}{\sin^2(1-x)}$$

$y = u^{-1}$ と $u = \tan t$ と $t = 1 - x$
の合成関数の微分

例題 8 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \cos(2x + 3)$

(2) $y = \frac{1}{\tan x}$

(3) $y = \frac{\cos x}{3 + \sin x}$

練習 8 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \sin 2x$

(2) $y = \cos x^2$

(3) $y = \tan^2 x$

(4) $y = \sin^3(2x + 1)$

(5) $y = \cos x \sin^2 x$

(6) $y = \tan(\sin x)$

(7) $y = \frac{\tan x}{x}$

(8) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

例題 9 関数 $f(x)$ は微分可能で、 $f'(0) = \alpha$ とする。次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(\sin x)}{x}$

練習 9 関数 $f(x)$ は微分可能であるとする。

(1) 極限値 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{\sin h}$ を $f'(x)$ を用いて表しなさい。

(2) $f'(0) = 2$ であるとき、極限値 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(-x)}{x}$ を求めなさい。

§ 6 指数関数の微分

ここでは、指数関数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) の微分公式を作る。
 まずは微分の定義式を用いると、

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

となる。するとここでは、極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ の値が問題になるが、これは、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = f'(0)$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

となるので、 $f'(x) = a^x \times f'(0)$ と表すことができる。

ここで、 $f'(0) = 1$ となる指数関数を考えると、

$$(a^x)' = a^x$$

となり、**導関数と、もとの関数が一致し**、何かと便利である。

このような指数関数の底のことを e と定義しよう。

つまり、 e とは

$$(e^x)' = e^x, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

を満たす数である。

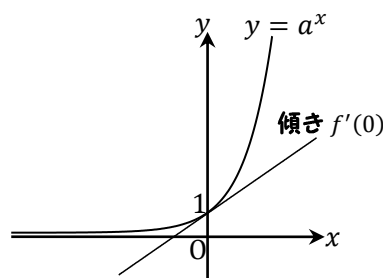
実際、 e は $e = 2.718281828459045 \dots$ となる無理数で**ネイピア数**とよばれている。

このネイピア数を用いると、一般の指数関数の微分は次のようになる。

$$(a^x)' = \left\{ (e^{\log_e a})^x \right\}' = \underbrace{(e^{x \log_e a})'}_{\text{合成関数の微分}} = \underbrace{(e^{x \log_e a})}_{x \log_e a \text{ の微分}} \cdot \log_e a = a^x \log_e a$$

$$M = a^{\log_a M}$$

底が e の対数は**自然対数**と呼ばれ、普通は**底を省略**し「 $\log a$ 」と表す。



🌀 指数関数の微分 🌀

$$(e^x)' = e^x \text{ (} e \text{ はネイピア数)}, \quad (a^x)' = a^x \log a$$

§ 7 対数関数の微分

ここでは、対数関数の微分公式を作る。

まずは、先ほど出てきた e の定義式 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ を変形し、 e を再定義するところから始める。

$$e^h - 1 = x \text{ とおくと, } e^h = 1 + x \Leftrightarrow h = \log(1 + x)$$

また、 $h \rightarrow 0$ のとき、 $x \rightarrow 0$ となるので、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log(1 + x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \end{aligned}$$

と変形することができる。

また、 $x = \frac{1}{t}$ とおくと、 $x \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow \pm\infty$ であるから、 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ と表すこともできる。

❶ e の定義式 ❷

ネイピア数 e の次の式で定義される。

$$\textcircled{1} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad \textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \textcircled{3} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

これを用いると、底が e の対数関数 $y = \log x$ の微分の公式は次のようになる。

まずは微分の定義式より

$$(\log x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x + h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log \frac{x + h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

ここで、 $\frac{h}{x} = t$ とおくと、 $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ であるから

$$(\log x)' = \lim_{t \rightarrow 0} \log(1 + t)^{\frac{1}{xt}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log(1 + t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{e \text{ の定義式を使う}}$

さらに、一般の対数関数の微分は次のようになる。

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x \log a}$$

底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

❶ 対数関数の微分 ❷

対数関数の微分は以下のようになる。

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

例 9 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = 2^{2x+1}$ (2) $y = e^{-x} \sin x$ (3) $y = \log_2 |x-1|$ (4) $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(1) $y' = \underbrace{2^{2x+1}}_{\frac{dy}{du}} \log 2 \cdot \underbrace{2}_{\frac{du}{dx}} = 2^{2x+2} \log 2$

$y = 2^u$ と $u = 2x + 1$
の合成関数の微分

(2) $y' = \underbrace{-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x}_{\text{積の微分}} = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

$y = e^{-x}$ の微分
→ $y = e^u$ と $u = -x$ の合成関数とみる

(3)(i) $x > 1$ のとき

$y = \log_2(x-1)$ より, $y' = \frac{1}{(x-1)\log 2} \cdot 1 = \frac{1}{(x-1)\log 2}$

$y = \log_2 u$ と $u = x-1$
の合成関数の微分

(ii) $x < 1$ のとき

$y = \log_2(-x+1)$ より, $y' = \frac{1}{(-x+1)\log 2} \cdot (-1) = \frac{1}{(x-1)\log 2}$

$y = \log_2 u$ と $u = -x+1$
の合成関数の微分

(i), (ii)より, $y' = \frac{1}{(x-1)\log 2}$

(4) $y' = \underbrace{\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}}_{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)}_{\frac{du}{dx}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$y = \log u$ と $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$
の合成関数の微分

例題 10 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \log(x^2 + 1)$ (2) $y = \log_2 |2x|$ (3) $y = \log |\tan x|$
(4) $y = e^{2x}$ (5) $y = 2^{-3x}$ (6) $y = e^x \sin x$

練習 10 次の関数を微分しなさい。ただし, $a > 0$, $a \neq 1$ とする。

(1) $y = \log 3x$ (2) $y = \log_{10}(-4x)$ (3) $y = \log|x^2 - 1|$ (4) $y = (\log x)^3$
(5) $y = \log_2 |\cos x|$ (6) $y = \log(\log x)$ (7) $y = \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ (8) $y = e^{6x}$
(9) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (10) $y = a^{-2x+1}$ (11) $y = e^x \cos x$

○ 対数微分法

ここでは対数を利用した微分の方法を紹介しましょう。

例 10 関数 $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{3x+1}}$ を微分しなさい。

まずは商の微分を用いて、微分します。

解①

$$y' = \frac{2x \cdot \sqrt[3]{3x+1} - x^2 \cdot \frac{1}{3}(3x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3}{(\sqrt[3]{3x+1})^2} = \frac{2x \cdot \sqrt[3]{3x+1} - \frac{x^2}{(\sqrt[3]{3x+1})^2}}{(\sqrt[3]{3x+1})^2} = \frac{2x(3x+1) - x^2}{(\sqrt[3]{3x+1})^4} = \frac{5x^2 + 2x}{(\sqrt[3]{3x+1})^4}$$

次に、対数微分法を用いて計算します。まず、与式の両辺に自然対数をとりますが、

真数は正でなくてはならないので、両辺に絶対値をつけてから対数をとるところがポイントです。

解② まず、両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = \log \left| \frac{x^2}{\sqrt[3]{3x+1}} \right| \Leftrightarrow \log|y| = 2\log|x| - \frac{1}{3}\log|3x+1|$$

ここで、両辺を x で微分する。

$$\frac{d}{dx} \log|y| = \frac{d}{dx} \left(2\log|x| - \frac{1}{3}\log|3x+1| \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3x+1} \Leftrightarrow y' = \frac{5x+2}{x(3x+1)} y$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{3x+1}} \text{ より, } y' = \frac{5x+2}{x(3x+1)} \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{3x+1}} = \frac{5x^2+2x}{(\sqrt[3]{3x+1})^4}$$

$\log|x|$ の微分

・ $x > 0$ のとき

$$(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

・ $x < 0$ のとき

$$(\log|x|)' = \{\log(-x)\}' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

よって、 $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$

いかがでしょうか？ 両辺に対数をとることで、指数が前に出てくるので、少し計算が楽になるわけです。

$y = x^\alpha$ (α は実数) の微分

今まで、このタイプの微分は、指数のとりうる値の範囲が、①自然数、②負の整数(p.6)、③有理数(p.8)の3つの場合で同じ結果になることを見てきた。ここでは、対数微分法を利用して、指数の範囲を**実数**まで拡張する。

両辺の絶対値の自然対数をとると、 $\log|y| = \log|x^\alpha| \Leftrightarrow \log|y| = \alpha \log|x|$

両辺を x で微分すると、 $\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{\alpha}{x} \cdot y$

$$y = x^\alpha \text{ より, } y' = \frac{\alpha}{x} \cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

以上より、 α が実数の場合においても、次の公式が成り立つことが分かる。

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

例題 11 次の関数を微分しなさい。

$$(1) \quad y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}}$$

$$(2) \quad y = x^x \quad (x > 0)$$

練習 11 次の関数を微分しなさい。

$$(1) \quad y = x^{2x} \quad (x > 0)$$

$$(2) \quad y = x^{\log x}$$

$$(3) \quad y = (x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4$$

$$(4) \quad y = \frac{(x+1)^3}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$(5) \quad y = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$$

$$(6) \quad y = (x+2)\sqrt{\frac{(x+3)^3}{x^2+1}}$$

例題 12 次の極限を求めなさい。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^x$$

練習 12 次の極限を求めなさい。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

例題 13 次の極限を求めなさい。ただし、 α は定数とする。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x \sin x - \alpha \sin \alpha}{\sin(x - \alpha)}$$

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(h+1)^2} - e^{h^2+1}}{h}$$

練習 13 次の極限を求めなさい。ただし、 a は定数とする。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{x}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \log \frac{x^x}{a^a} \quad (a > 0)$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a+x} - e^a}{x}$$

例 12 $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ のとき, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を θ の式で表しなさい。

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$ を用いることで, $\frac{dy}{dx}$ は求まります。これは, $\frac{d}{dx}y = \frac{\frac{d}{d\theta}y}{\frac{dx}{d\theta}}$...(*) と見ることもできます。

$\frac{d^2y}{dx^2}$ は $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ なので, (*) 式の y を $\frac{dy}{dx}$ に変えて, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}$ となります。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3 \sin^2 \theta \cos \theta}{3 \cos^2 \theta (-\sin \theta)} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}(-\tan \theta)}{3 \cos^2 \theta (-\sin \theta)} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 \theta}}{-3 \sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{3 \sin \theta \cos^4 \theta}$$

例 13 $x^2 + y^2 = 1$ のとき, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めなさい。

例 6 では, $\frac{dy}{dx}$ を求めましたが, それをさらに x で微分します。

まずは, 「 $y = \dots$ 」の形に直してから微分します。

解①

例 6 より, $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

よって, $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = \pm \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

~~~~~  
商の微分

次に, 「 $y = \dots$ 」の形に直さないで直接微分します。

**解②**

**例 6** より,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

よって,  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{1 \cdot y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \quad (\because x^2 + y^2 = 1)$

~~~~~  
商の微分

こちらも**例 6**と同様に, **解②**の y に $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ を代入すれば**解①**と同じ結果になることが分かる。

例題 14 (1) 次の関数の第 2 次導関数, 第 3 次導関数を求めなさい。

(ア) $y = x^4 - 2x^3 + 3x - 1$ (イ) $y = \sin 2x$ (ウ) $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(2) $y = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y = g(x)$ とする。 $g''(1)$ の値を求めなさい。

練習 14 (1) 次の関数の第 2 次導関数, 第 3 次導関数を求めなさい。

(ア) $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ (イ) $y = \sqrt[3]{x}$ (ウ) $y = \log(x^2 + 1)$

(エ) $y = xe^{2x}$ (オ) $y = e^x \cos x$

(2) $y = \cos x$ ($\pi < x < 2\pi$) の逆関数を $y = g(x)$ とするとき, $g'(x)$, $g''(x)$ をそれぞれ x の式で表しなさい。

例題 15 方程式 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ で定められる x の関数 y について, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を x と y を用いて表しなさい。

練習 16 次の方程式で定められる x の関数 y について, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を x と y を用いて表しなさい。

(1) $y^2 = x$ (2) $x^2 - y^2 = 4$ (3) $(x+1)^2 + y^2 = 9$ (4) $3xy - 2x + 5y = 0$

例題 16 (1) $y = \log(1 + \cos x)^2$ のとき, 等式 $y'' + 2e^{-\frac{y}{2}}$ を証明しなさい。

(2) $y = e^{2x} \sin x$ に対して, $y'' = ay' + by$ となるような定数 a, b の値を求めなさい。

練習 16 (1) $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ のとき, 等式 $(x^2 + 1)y'' + xy' = 0$ を証明しなさい。

(2) $y = e^{2x} + e^x$ が $y'' + ay' + by = 0$ を満たすとき, 定数 a, b の値を求めなさい。

例題 17 n を自然数とする。

(1) $y = \sin 2x$ のとき, $y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$ であることを証明しなさい。

(2) $y = x^n$ の第 n 次導関数を求めなさい。

練習 17 n を自然数とする。次の関数の第 n 次導関数を求めなさい。

(1) $y = \log x$

(2) $y = \cos x$

例題 18 関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) について, 等式

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^{(n)}(x) - n^2f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n \text{ は自然数})$$

が成り立つことを証明しなさい。ただし, $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする。

練習 18 関数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ について, 等式

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0 \quad (n \geq 2)$$

が成り立つことを証明しなさい。ただし, $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする。

例題 19 (1) $\cos x = k \cos y$ ($0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, k は $k > 1$ の定数) が成り立つとき, $\frac{dy}{dx}$ を x の式で表しなさい。

(2) サイクロイド $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ について, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表しなさい。

練習 19 (1) $x \tan y = 1$ ($x > 0$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$) が成り立つとき, $\frac{dy}{dx}$ を x の式で表しなさい。

(2) $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ ($a > 0$, $b > 0$) のとき, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を θ の式で表しなさい。

(3) $x = 2 - (3 + t)e^{-t}$, $y = \frac{2-t}{2+t}e^{2t}$ ($t > -2$) のとき, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の式で表しなさい。

例題 20 関数 $f(x)$ は微分可能で, $f'(0) = a$ とする。

(1) 任意の実数 x , y に対して, 等式 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ が成り立つとき, $f(0)$, $f'(x)$ を求めなさい。

(2) 任意の実数 x , y に対して, 等式 $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(x) > 0$ が成り立つとき, $f(0)$ を求めなさい。また, $f'(x)$ を a , $f(x)$ で表しなさい。

練習 20 関数 $f(x)$ は微分可能で, $f'(0) = a$ とする。任意の実数 x , y , p ($p \neq 0$) に対して, 等式 $f(x+py) = f(x) + pf(y)$ が成り立つとき $f'(x)$, $f(x)$ を順に求めなさい。