

複素数平面

昨年学んだ通り、 $x^2 = -1$ の解の 1 つを i とし、実数 a, b を用いて $a + bi$ と表される数を複素数という。以前は、複素数の数としての性質について学んだが、ここでは複素数平面を用いて、複素数の幾何的な表現について学んでいく。これは、1811 年頃にガウスによって導入されたため、ガウス平面とも呼ばれる



Carolus Fridericus Gauss
(1777-1855)

§ 1 複素数平面

直交座標における点 (a, b) の位置に、複素数 $\alpha = a + bi$ を対応させた平面を**複素数平面**という。複素数平面上において、 x 軸を**実軸**、 y 軸を**虚軸**といい、複素数 α が表す点 A を $A(\alpha)$ とかく。また、点 A のことを点 α と呼ぶこともある。

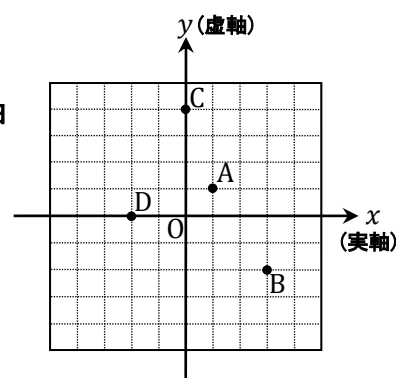
具体的には以下のように対応する。

$$\text{ex. } A(1 + i) \Rightarrow A(1, 1)$$

$$B(3 - 2i) \Rightarrow B(3, -2)$$

$$C(4i) \Rightarrow D(0, 4)$$

$$D(-2) \Rightarrow E(-2, 0)$$



○ 複素数の演算と複素数平面

ここでは、複素数の演算が、複素数平面上でどのような結果になるのかを見ていく。

① 実数倍

まず、複素数の実数倍について考えていく。

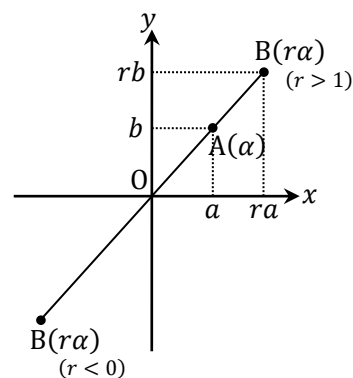
複素数 $\alpha = a + bi$ 、実数 r に対して、積 $r\alpha$ は

$$r\alpha = r(a + bi) = ra + rbi$$

となるが、これは直交座標における点 (ra, rb) に対応する。

ここで、 $A(\alpha)$ 、 $B(r\alpha)$ とおくと、点 B は、 O を中心に OA を r 倍に拡大または縮小した点を表している。なお、 $r < 0$ のとき、点 B は、 O を挟んで A と反対側になる。

このことを、ベクトルを用いて表すと、 $\overrightarrow{OB} = r\overrightarrow{OA}$ となる。



② 加法

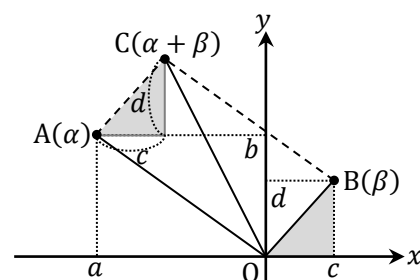
2 つの複素数 $\alpha = a + bi$ 、 $\beta = c + di$ に対して、和 $\alpha + \beta$ は

$$\alpha + \beta = a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$$

となるが、これは直交座標における点 $(a + c, b + d)$ に対応する。

ここで、 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 、 $C(\alpha + \beta)$ とおくと、点 C は、 OA 、 OB を 2 辺とする平行四辺形の頂点となる。

このことを、ベクトルを用いて表すと、 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ となる。



③ 減法

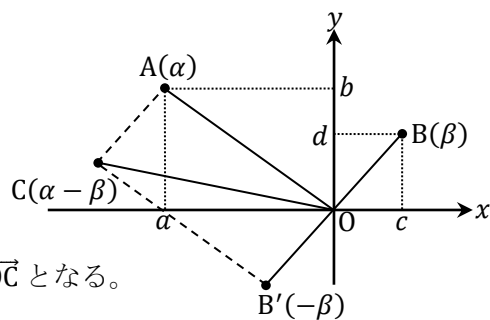
2つの複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ に対して, 差 $\alpha - \beta$ は

$$\alpha - \beta = a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

となるが, これは直交座標における点 $(a - c, b - d)$ に対応する。

ここで, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\alpha - \beta)$, $B'(-\beta)$ とおくと, 点 C は, OA , OB' を 2 辺とする平行四辺形の頂点となる。

このことを, ベクトルを用いて表すと, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC}$ となる。

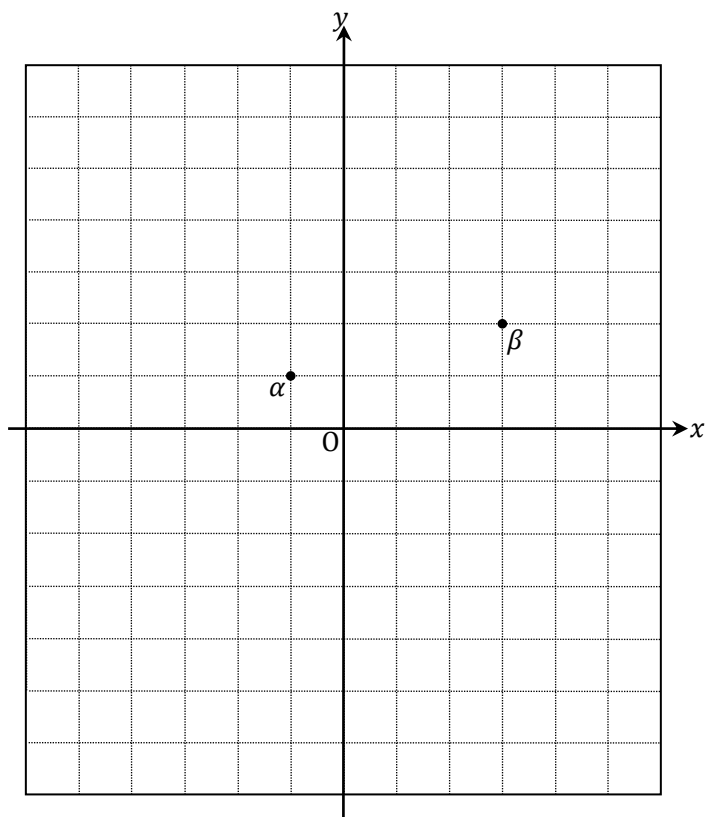


練習

複素数平面上において, 2点 α , β が右図のように与えられているとき, 次の点を図示してみよう。

(1) $\alpha + \beta$ (2) $\alpha - \beta$ (3) -2β

(4) $3\alpha + 2\beta$ (5) $-\alpha - \frac{2}{3}\beta$



○ 複素数の絶対値

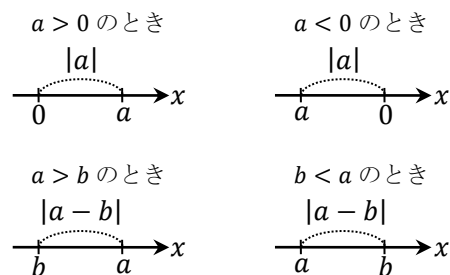
実数 a, b において, 絶対値 $|a|, |a - b|$ は

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}, \quad |a - b| = \begin{cases} a - b & (a - b \geq 0) \\ b - a & (a - b < 0) \end{cases}$$

となるが, これは数直線上において, 2 点間の距離を表す。

つまり, $A(a), B(b)$ と定めると, $|a|$ は 2 点 O, A 間の距離,

$|a - b|$ は 2 点 A, B 間の距離を表す。



複素数の絶対値においても同様に考える。

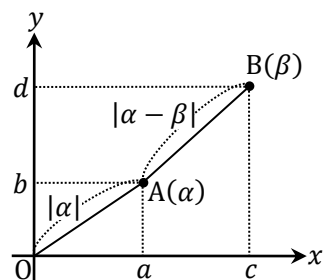
つまり, 複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ において, 絶対値 $|\alpha|, |\alpha - \beta|$ は複素数平面上において, 2 点間の距離を表す。つまり, $A(\alpha), B(\beta)$ と定めると, $|\alpha|$ は 2 点 O, A 間の距離, $|\alpha - \beta|$ は 2 点 A, B 間の距離を表す。

これより,

$$|\alpha| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\alpha - \beta| = |a + bi - (c + di)| = |a - c + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

となる。



例 1 $\alpha = 1 + i, \beta = 3 - i, \gamma = a + bi$ (a, b は実数) とする。複素数平面上に 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を, $\triangle ABC$ が正三角形になるようにとるとき, a, b の値を求めなさい。

$$AB = |\alpha - \beta| = |1 + i - (3 - i)| = |-2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = |\beta - \gamma| = |3 - i - (a + bi)| = |3 - a - (1 + b)i| = \sqrt{(3 - a)^2 + (1 + b)^2}$$

$$CA = |\gamma - \alpha| = |a + bi - (1 + i)| = |a - 1 + (b - 1)i| = \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 1)^2}$$

これより,

$$BC^2 = 8 \Leftrightarrow (3 - a)^2 + (1 + b)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a + 2b + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$CA^2 = 8 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b - 6 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

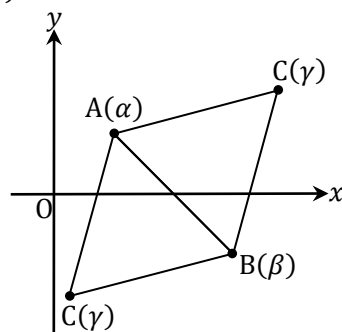
$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } -4a + 4b + 8 = 0 \Leftrightarrow b = a - 2$$

$$\textcircled{2} \text{ に代入すると, } a^2 + (a - 2)^2 - 2a - 2(a - 2) - 6 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \pm \sqrt{3}$$

このとき, $b = \pm\sqrt{3}$

以上より, $(a, b) = (2 \pm \sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$ (複号同順)



○ 共役な複素数

複素数 $\alpha = a + bi$ に対して, $\bar{\alpha} = a - bi$ を α に**共役な複素数**という。

以前にも学んだとおり, 共役な複素数には以下の性質が成り立っている。

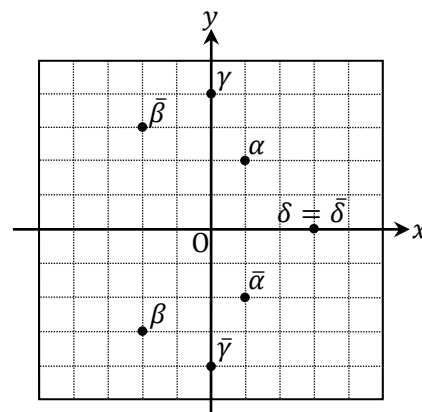
● 共役な複素数の性質① ●

複素数 α, β について, 次の性質が成り立つ。

$$(i) \quad \overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta} \quad (\text{複号同順}) \quad (ii) \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta} \quad (iii) \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

共役な複素数 $\bar{\alpha} = a - bi$ は直交座標における点 $(a, -b)$ に対応する。
つまり, 複素数平面上において, 点 α と点 $\bar{\alpha}$ は**実軸に関して対称**になっている。

$$\begin{aligned} \text{ex. } \alpha = 1 + 2i &\Rightarrow \bar{\alpha} = 1 - 2i \\ \beta = -2 - 3i &\Rightarrow \bar{\beta} = -2 + 3i \\ \gamma = 4i &\Rightarrow \bar{\gamma} = -4i \\ \delta = 3 &\Rightarrow \bar{\delta} = 3 \end{aligned}$$



このことから次のような性質があることが分かる。

● 共役な複素数の性質② ●

複素数 α について, 次の性質が成り立つ。

$$(iv) \quad \alpha \text{ が実数} \Leftrightarrow \bar{\alpha} = \alpha \quad (v) \quad \alpha \text{ が純虚数} \Leftrightarrow \bar{\alpha} = -\alpha \quad (\alpha \neq 0)$$

例 2 a, b, c, d は実数とする。複素数 α が 3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解であるとき, $\bar{\alpha}$ もこの方程式の解になることを示しなさい。

複素数 α が 3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解なので, $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$

両辺の共役な複素数を考えると, $\overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = \bar{0}$

(右辺) $= \bar{0} = 0$ ($\because$ 複素数の性質(iv))

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = \overline{a\alpha^3} + \overline{b\alpha^2} + \overline{c\alpha} + \bar{d} \quad (\because (i)) \\ &= \bar{a}\bar{\alpha}^3 + \bar{b}\bar{\alpha}^2 + \bar{c}\bar{\alpha} + \bar{d} \quad (\because (ii)) \\ &= a(\bar{\alpha})^3 + b(\bar{\alpha})^2 + c\bar{\alpha} + d \quad (\because (ii), (iv)) \end{aligned}$$

よって, $a(\bar{\alpha})^3 + b(\bar{\alpha})^2 + c\bar{\alpha} + d = 0$

以上より, $\bar{\alpha}$ は 3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解である。

複素数の性質(ii)より,

$$\overline{\alpha^2} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = (\bar{\alpha})^2$$

$$\overline{\alpha^3} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = (\bar{\alpha})^3$$

一般的に, $\overline{\alpha^n} = (\bar{\alpha})^n$

例 3 $\frac{z}{1+z^2}$ が実数であるような複素数 z の条件を求めなさい。

$$\frac{z}{1+z^2} \text{ が実数} \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2} \right) = \frac{z}{1+z^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = \frac{z}{1+z^2}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}z^2 - z\bar{z}^2 + \bar{z} - z = 0$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}(z - \bar{z}) - (z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z\bar{z} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ または } z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow z \text{ は実数 または } |z| = 1$$

$$z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$$

なお、『 $\frac{z}{1+z^2}$ が純虚数であるような複素数 z の条件』だったら、次のようになる。

$$\frac{z}{1+z^2} \text{ が純虚数} \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2} \right) = -\frac{z}{1+z^2} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = -\frac{z}{1+z^2}$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}z^2 + z\bar{z}^2 + \bar{z} + z = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + \bar{z})(z\bar{z} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\bar{z} \text{ または } z\bar{z} = -1 \Leftrightarrow z \text{ は純虚数}$$

また、共役な複素数には次のような性質もある。

共役な複素数の性質③

複素数 $\alpha = a + bi$ について、次の性質が成り立つ。

$$(vi) \quad (\alpha \text{ の実部}) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \quad (\alpha \text{ の虚部}) = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i} \quad (vii) \quad |\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$$

証明

$\alpha = a + bi$ (a, b は実数) とおくと、 $\bar{\alpha} = a - bi$

このとき、

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2a \Leftrightarrow a = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \Leftrightarrow (\alpha \text{ の実部}) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$$

$$\alpha - \bar{\alpha} = 2bi \Leftrightarrow b = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i} \Leftrightarrow (\alpha \text{ の虚部}) = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

$$\alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |\alpha|^2$$

例 4 複素数 α, β が $|\alpha| = 5, |\beta| = 8, |\alpha - \beta| = 7$ を満たすとき, $|2\alpha - \beta|$ の値を求めなさい。

複素数の和または差の絶対値が出てきたらとりあえず 2 乗します。ベクトルの絶対値と同じです。

解①

$$\begin{aligned}
 |\alpha - \beta|^2 &= (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) = (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) & |z|^2 = z\bar{z} \\
 &= \alpha\bar{\alpha} - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + \beta\bar{\beta} \\
 &= |\alpha|^2 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + |\beta|^2 \\
 &= 25 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + 64 \\
 |\alpha - \beta|^2 &= 49 \text{ より, } 25 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + 64 = 49 \Leftrightarrow \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 40 \\
 \text{このとき, } |2\alpha - \beta|^2 &= (2\alpha - \beta)(\overline{2\alpha - \beta}) = (2\alpha - \beta)(2\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\
 &= 4\alpha\bar{\alpha} - 2(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + \beta\bar{\beta} \\
 &= 4|\alpha|^2 - 2(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + |\beta|^2 \\
 &= 4 \cdot 25 - 2 \cdot 40 + 64 = 84
 \end{aligned}$$

これより, $|2\alpha - \beta| = 2\sqrt{21}$

与式を複素数平面上の 2 点間の距離と考えると, 図形的に解くことができます。

解②

$A(\alpha), B(\beta)$ とおくと, $OA = 5, OB = 8$
 また, $|\alpha - \beta| = 7$ より, $AB = 7$
 $A'(2\alpha)$ とおくと, $OA' = 10$
 また, $|2\alpha - \beta|$ は 2 点 A', B 間の距離となる。

$\triangle OAB$ において余弦定理より,

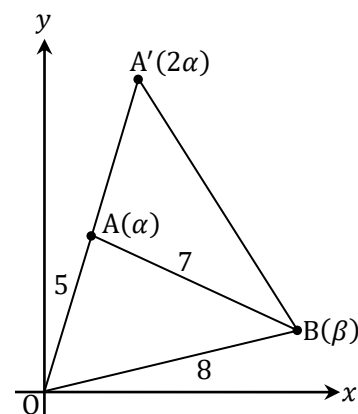
$$\cos \angle AOB = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$ より, $\angle AOB = 60^\circ$

$\triangle OA'B$ において余弦定理より,

$$A'B^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos 60^\circ = 100 + 64 - 80 = 84$$

$A'B > 0$ より, $A'B = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$



なお, この問題は中線定理を用いても解くことができる。

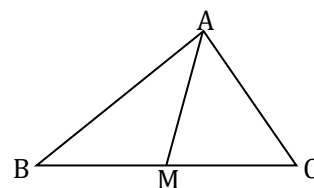
$\triangle OA'B$ において中線定理を用いると,

$$\begin{aligned}
 BA'^2 + BO^2 &= 2(BA^2 + OA^2) \Leftrightarrow BA'^2 + 64 = 2(49 + 25) \\
 &\Leftrightarrow BA'^2 = 84
 \end{aligned}$$

$BA' > 0$ より, $BA' = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

【中線定理】

$\triangle ABC$ において, M を BC の中点とすると, 以下の関係式が成り立つ。
 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$



§2 複素数の極形式

複素数平面上で、0 でない複素数 $z = a + bi$ の表す点を A とする。線分 OA の長さ(z の絶対値)を $r (= \sqrt{a^2 + b^2})$, 半直線 OA と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると,

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

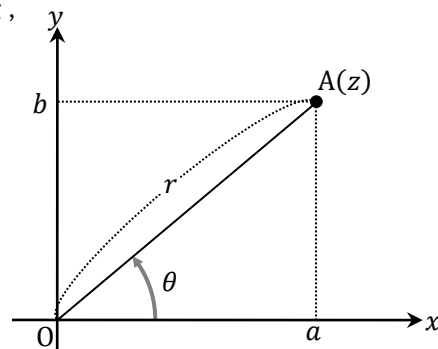
となるので、複素数 z は

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表すことができる。この表し方を複素数 z の**極形式**という。

角 θ を z の**偏角**(argument)といい、 $\arg z$ で表す。

なお、偏角 θ は反時計回りを正の角とする。



例5 次の複素数を極形式で表しなさい。ただし、偏角は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

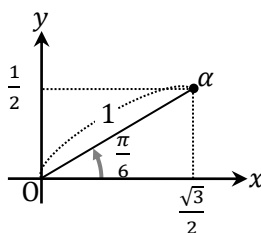
(2) $\beta = -1 + i$

(3) $\gamma = 1 - \sqrt{3}i$

(4) $\delta = i$

(1) $|\alpha| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$, 右図より $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{6}$

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

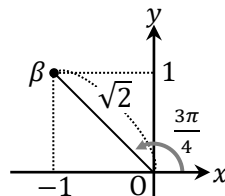


偏角に制限がなければ...

$$\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \quad (n \text{ は整数})$$

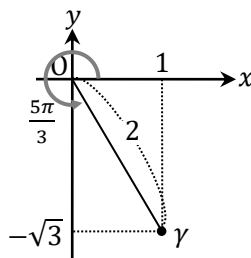
(2) $|\beta| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, 右図より $\arg(\beta) = \frac{3}{4}\pi$

$$\beta = -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$$



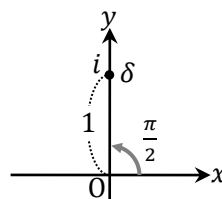
(3) $|\gamma| = \sqrt{1+3} = 2$, 右図より $\arg(\gamma) = \frac{5}{3}\pi$

$$\gamma = 1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)$$



(4) $|\delta| = 1$, 右図より $\arg(\delta) = \frac{\pi}{2}$

$$\delta = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$



○ 極形式と複素数の積・商

2つの複素数 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ の積と商について考えよう。
まずは積について考えていく。

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \end{aligned}$$

これより、次のことが分かる。

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

つまり、『**積の絶対値は、絶対値の積**』『**積の偏角は、偏角の和**』ということである。

商に関しても同様に考える。

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \{ \cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2) \}}{r_2(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \} \end{aligned}$$

加法定理

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \end{aligned}$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

これより、次のことが分かる。

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

つまり、『**商の絶対値は、絶対値の商**』『**商の偏角は、偏角の差**』ということである。

◆ 極形式と積・商 ◆

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき

(積) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

(商) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

例 6 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ の積を利用して, $\cos 75^\circ$, $\sin 75^\circ$ の値を求めなさい。

75° の三角関数の値は, 以前は加法定理を用いましたが, 複素数の積を用いても求められます。

$$\alpha\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i \quad \dots \textcircled{1}$$

また, $\alpha = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$, $\beta = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$ より,

$$\alpha\beta = (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \cos 75^\circ + i \sin 75^\circ \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より, } \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

○ 複素数平面上における積

ここでは、複素数の積・商が、複素数平面上でどのような変換になっているのか見ていこう。

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ とするとき、

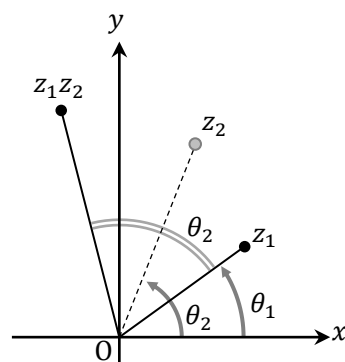
$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$ であった。

これを複素数平面上で考えると、点 $z_1 z_2$ は点 z_1 を

『角 θ_2 だけ**原点を中心に回転移動**し、 r_2 倍に**拡大(縮小)**した点』

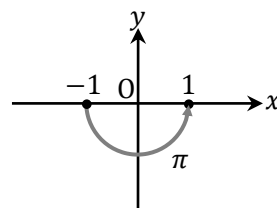
と見ることができる。

特に、点 $(\cos \theta + i \sin \theta)z$ は点 z を原点中心に角 θ だけ回転移動した点である。



ex.1 $-1 \times (-1) = 1$ を複素数平面上で考えると…

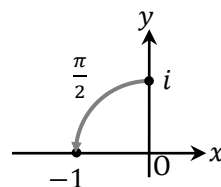
この計算は、 $-1 \times (\cos \pi + i \sin \pi)$ となるので、複素数平面上では、点 -1 を原点中心に π 回転した点となるので、点 1 が計算結果となる。



ex.2 $i \times i = -1$ を複素数平面上で考えると…

この計算は、 $i \times (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ となるので、複素数平面上では、

点 i を原点中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転した点となるので、点 -1 が計算結果となる。



例7 $\alpha = 1 + i$, $\beta = 3 - i$, $\gamma = a + bi$ (a, b は実数) とする。複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を、 $\triangle ABC$ が正三角形になるようにとるとき、 a, b の値を求めなさい。

例1 では3辺の長さが等しいことを利用して解きましたが、ここでは角度に注目して解きます。

点 B を点 A 中心に $\pm \frac{\pi}{3}$ 回転させた点が点 C である。

点 A が原点に移るように、 $\triangle ABC$ を平行移動させる。

このとき、点 β が点 β' に、点 γ が点 γ' に移動したとすると、

$$\beta' = \beta - \alpha = 3 - i - (1 + i) = 2 - 2i$$

$$\gamma' = \gamma - \alpha = a + bi - (1 + i) = a - 1 + (b - 1)i \quad \dots \textcircled{1}$$

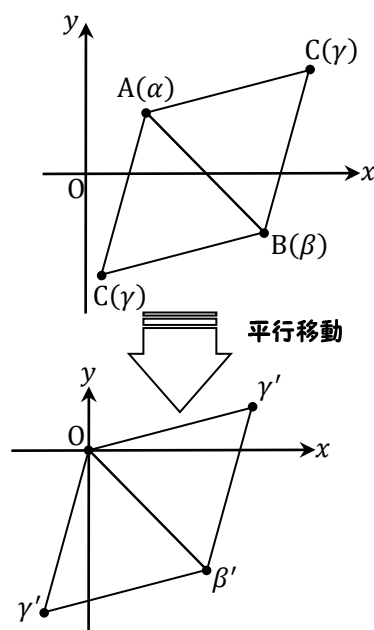
$$\gamma' = \left\{ \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \right\} \beta'$$

$$= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (2 - 2i)$$

$$= 1 \pm \sqrt{3} + (-1 \pm \sqrt{3})i \quad (\text{復号同順}) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より, } a - 1 = 1 \pm \sqrt{3}, \quad b - 1 = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{以上より, } (a, b) = (2 \pm \sqrt{3}, \pm \sqrt{3}) \quad (\text{復号同順})$$



複素数平面上における回転の中心は原点になります。一般の点を中心に回転させる場合は平行移動することが必要になります。

§3 ド・モアブルの定理

複素数の積の性質 $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ から, $z = \cos \theta + i \sin \theta$ の累乗は以下のようになる。

$$z^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$z^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

$$z^4 = (\cos \theta + i \sin \theta)^4 = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

⋮

これを繰り返していくと一般的には, 次の等式が成り立つことが予想できる。

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n \text{ は自然数})$$

証明 数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n = 1$ のときは明らかに成り立つ。

(ii) $n = k$ のとき成立すると仮定する。

このとき,

$$z^{k+1} = z \cdot z^k = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos k\theta + i \sin k\theta) = \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta$$

よって, $n = k+1$ のときも成立。

以上より, すべての自然数において, 成立する。

なお, この等式は $z^0 = 1 = \cos 0 \cdot \theta + i \sin 0 \cdot \theta$ より, $n = 0$ のときも成り立つ。

また, n を負の整数とすると, $n = -k$ (k は自然数) とおくと,

$$z^n = z^{-k} = \frac{1}{z^k} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{\cos k\theta + i \sin k\theta} = \cos(-k\theta) + i \sin(-k\theta) = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

となるので, 負の整数においても成立している。

以上より, 次の定理が成り立つ。



ド・モアブルの定理



整数 n に対して,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

例 8 次の複素数の値を求めなさい。

(1) $(1+i)^{20}$

(2) $\left(\frac{-2+2i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$

20 乗, 10 乗を展開するのはさすがに大変です。

しかし, ド・モアブルの定理を使うと簡単に計算することができます。

$$\begin{aligned} (1) \quad (1+i)^{20} &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^{20} \\ &= (\sqrt{2})^{20} \left\{ \cos \left(20 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(20 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= 2^{10} (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = -1024 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \left(\frac{-2+2i}{-1+\sqrt{3}i} \right)^{10} &= \left\{ \frac{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)}{2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)} \right\}^{10} \\
 &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right\}^{10} \\
 &= (\sqrt{2})^{10} \left\{ \cos \left(10 \cdot \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(10 \cdot \frac{\pi}{12} \right) \right\} \\
 &= 2^5 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \\
 &= 2^5 \cdot \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -16\sqrt{3} + 16i
 \end{aligned}$$

○ $z^n = \alpha$ の解

ここでは、方程式 $z^n = \alpha$ (n は自然数) の解法を考えていこう。

例 9 方程式 $z^3 = i$ を解きなさい。

まずは普通に因数分解をして解きます。

$$\begin{aligned}
 z^3 = i &\Leftrightarrow z^3 + i^3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z+i)(z^2 - iz - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow z = -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

次に複素数の極形式を用いて解きます。

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと、ド・モアブルの定理より、

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

与式の両辺を極形式で表すと、

$$z^3 = i \Leftrightarrow r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{これより, } \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \quad (n \text{ は整数})$$

r は実数より、 $r = 1$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より, } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{以上より, } z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i$$

ここがポイント！

$$\begin{aligned}
 r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) &= r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2n\pi \end{cases} \quad (n \text{ は整数})
 \end{aligned}$$

偏角の「 $+2n\pi$ 」を忘れないように！



例 10 方程式 $z^4 = -8(1 + \sqrt{3}i)$ を解きなさい。

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) とおき、ド・モアブルの定理より、

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

与式の両辺を極形式で表すと、

$$z^4 = -8(1 + \sqrt{3}i) \Leftrightarrow r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 16\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$$

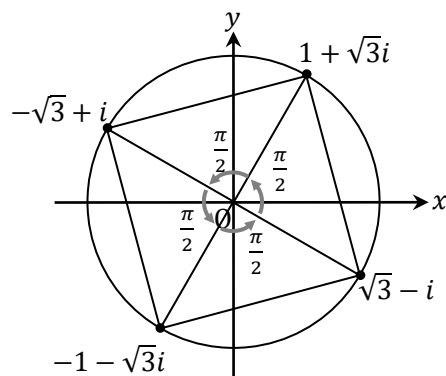
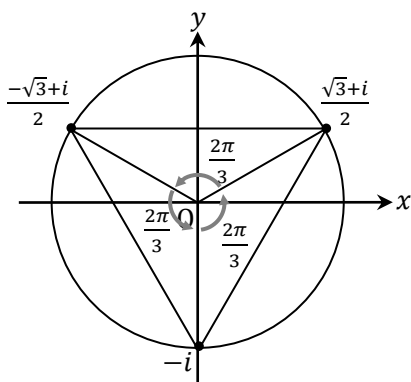
これより、
$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2} \quad (n \text{ は整数})$$

$r > 0$ より、 $r = 2$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$

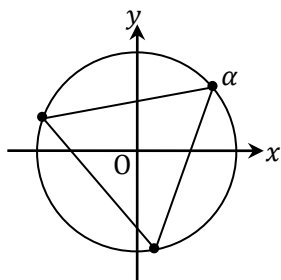
以上より、 $z = 1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} + i, -1 - \sqrt{3}i, \sqrt{3} - i$

ここで、方程式 $z^3 = i$ …①, $z^4 = -8(1 + \sqrt{3}i)$ …② の解を複素数平面上に図示すると、①は正三角形となり、②は正方形となる。

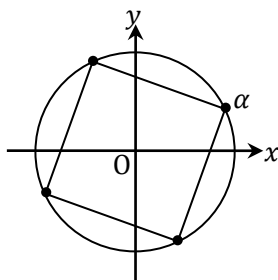


一般的に、方程式 $z^n = \alpha^n$ (n は自然数) の解を複素数平面上に表すと、点 α を 1 つの頂点とする正 n 角形が現れる。

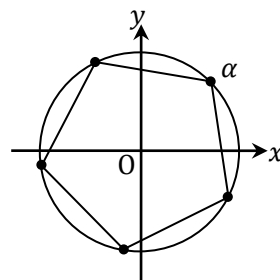
$z^3 = \alpha^3$ の解



$z^4 = \alpha^4$ の解



$z^5 = \alpha^5$ の解



§4 複素数平面と図形

○ 内分点・外分点

座標平面上において、2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ とするとき、線分 AB を $m:n$ に内分する点 P , 外分する点 Q の座標は以下のように表すことができた。

$$P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right), Q\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}\right)$$

これより、複素数平面上において、複素数 $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ を表す点をそれぞれ A , B とすると、線分 AB を $m:n$ に内分する点 P , 外分する点 Q は

$$P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n} + \frac{ny_1 + my_2}{m+n}i\right), Q\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n} + \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}i\right)$$

と表すことができる。つまり、2点 $A(z_1)$, $B(z_2)$ を端点とする線分 AB を $m:n$ に

内分する点は $\frac{nz_1 + mz_2}{m+n}$, 外分する点は $\frac{-nz_1 + mz_2}{m-n}$ となる。

なお、線分 AB の中点は $\frac{z_1 + z_2}{2}$ と表せる。

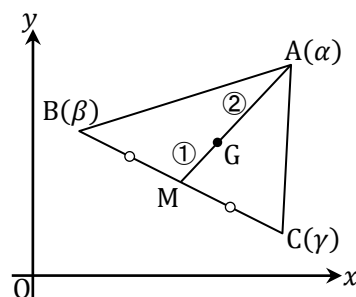
例 11 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G を表す複素数を求めなさい。

BC の中点を M とすると、 $M\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)$

$AG : GM = 2 : 1$ より、 G を表す複素数は

$$\frac{1 \cdot \alpha + 2 \cdot \frac{\beta + \gamma}{2}}{2 + 1} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

よって、 $G\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$

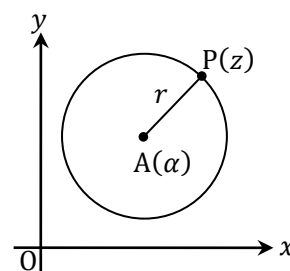


○ 円の方程式

複素数平面上において、点 $A(\alpha)$ を中心とする半径 r の円の方程式は、円周上の任意の点を $P(z)$ とすると、常に $AP = r$ が成り立つので、

$$|z - \alpha| = r$$

となる。



例 12 次の方程式を満たす点 z 全体は、どのような図形を描きますか。

(1) $|z + 2i| = 2$ (2) $|z|^2 - (1 - i)z - (1 + i)\bar{z} + 1 = 0$ (3) $|z - 2i| = 2|z + i|$

解①

(1) $|z + 2i| = 2 \Leftrightarrow |z - (-2i)| = 2$

よって、点 $-2i$ を中心とする、半径 2 の円。

(2) $|z|^2 - (1 - i)z - (1 + i)\bar{z} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - (1 - i)z - (1 + i)\bar{z} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \{z - (1 + i)\}\{\bar{z} - (1 - i)\} - (1 + i)(1 - i) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \{z - (1 + i)\}\overline{\{z - (1 + i)\}} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow |z - (1 + i)|^2 = 1 \Leftrightarrow |z - (1 + i)| = 1$$

以上より、点 $1 + i$ を中心とする、半径 1 の円。

(3) 両辺を 2 乗すると、

$$|z - 2i|^2 = 4|z + i|^2 \Leftrightarrow (z - 2i)\overline{(z - 2i)} = 4(z + i)\overline{(z + i)}$$

$$\Leftrightarrow (z - 2i)(\bar{z} + 2i) = 4(z + i)(\bar{z} - i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4 = 4(z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 2iz + 2i\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + 2i)(\bar{z} - 2i) = 4$$

$$\Leftrightarrow (z + 2i)\overline{(z + 2i)} = 4 \Leftrightarrow |z + 2i|^2 = 4 \Leftrightarrow |z + 2i| = 2$$

よって、点 $-2i$ を中心とする、半径 2 の円。

$$\begin{aligned} xy - ax - by &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - b)(y - a) &= ab \end{aligned}$$

$z = x + yi$ とおくと、 x, y のみの関係式で表すことができるので大変便利です。

解②

(2) $z = x + yi$ (x, y は実数)とおくと、

$$|z|^2 - (1 - i)z - (1 + i)\bar{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow |x + yi|^2 - (1 - i)(x + yi) - (1 + i)(x - yi) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + xi - yi - y - x - xi + yi - y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

よって、点 $1 + i$ を中心とする、半径 1 の円。

なお(3)は、 $|z - 2i|$ は点 z と点 $2i$ の距離を表し、 $|z + i|$ は点 z と点 $-i$ との距離を表す。

つまり、 $P(z)$, $A(2i)$, $B(-i)$ とすると、

$$|z - 2i| = 2|z + i| \Leftrightarrow AP = 2BP \Leftrightarrow AP : BP = 2 : 1$$

これを満たす点 P の軌跡は、「図形と方程式」で学んだように、**アポロニウスの円**となる。

アポロニウスの円は、線分 AB の内分点、外分点を直径とする円である。

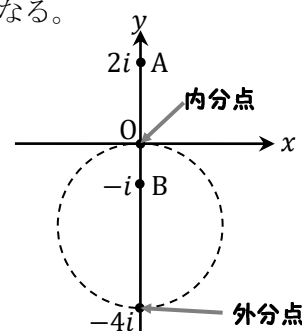
$$\begin{array}{ll} \text{内分点} & \frac{1 \cdot 2i + 2 \cdot (-i)}{2 + 1} = 0 \\ \text{外分点} & \frac{-1 \cdot 2i + 2 \cdot (-i)}{2 - 1} = -4i \end{array}$$

より、求める軌跡は点 0 、点 $-4i$ を直径の両端とする円となる。

一般的に、 $m|z - \alpha| = n|z - \beta|$ を満たす点 z の軌跡は以下ようになる。

$m \neq n$ のとき $\Rightarrow$ **アポロニウスの円**

$m = n$ のとき $\Rightarrow$ **垂直二等分線**



例 13 点 z が単位円周上を動くとき、 $w = i(z + 2i)$ で表される点 w は、どのような図形を描きますか。

点 z は $|z| = 1$ を満たしています。まずは与式を z について解くことから始めましょう。

解①

$$w = i(z + 2i) \Leftrightarrow z = \frac{w + 2}{i} \text{ より,}$$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{w + 2}{i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|w + 2|}{|i|} = 1 \Leftrightarrow |w + 2| = 1 \quad \left[\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right]$$

よって、点 w は、点 -2 を中心とする半径 1 の円を描く。

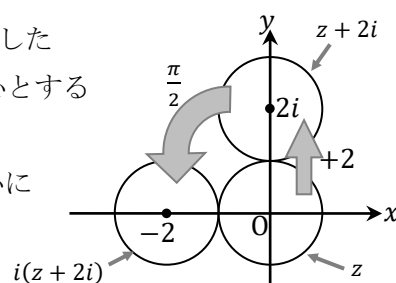
式の意味を考えることで解くこともできます。和差は平行移動、積は回転です。

解②

点 $z + 2i$ が描く図形は、点 z が描く図形を虚軸方向に 2 平行移動した図形である。点 z が単位円周上を動くので、点 $z + 2i$ は点 $2i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

また、点 $i(z + 2i)$ が描く図形は、点 $z + 2i$ が描く図形を原点中心に 90° 回転した図形である。

よって、点 w は、点 -2 を中心とする半径 1 の円を描く。



例 14 点 z が、実軸に垂直で点 1 を通る直線上を動くとき、 $w = \frac{1}{z}$ で表される点 w は、どのような図形を描きますか。

直線上の点 z は実部が常に 1 になるので、 $\frac{z + \bar{z}}{2} = 1$ を満たします。

方針は上の例と同じで、まず z について解いていきます。

$$w \neq 0 \text{ より, } w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$$

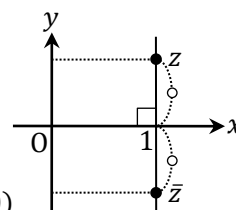
$$\text{これより, } \frac{z + \bar{z}}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) = 1 \Leftrightarrow w + \bar{w} = 2w\bar{w} \quad (w \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(w - \frac{1}{2} \right) \left(\bar{w} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \quad (w \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left| w - \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \quad (w \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad (w \neq 0)$$

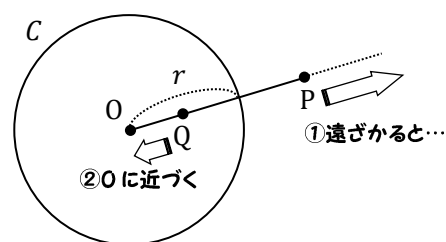
よって、点 w は点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を描く。ただし、原点 0 を除く。



「反転」とは？

平面上に中心 O 、半径 r の円 C がある。このとき、ある点 P を以下の条件(i), (ii)を満たす点 Q に移す操作を考える。

- (i) P, Q は O を始点とする半直線上の点
(ii) $OP \cdot OQ = r^2$



この操作を円 C に関する**反転**という。 $OP \cdot OQ$ の値が常に一定であるので、 OP の値が大きくなれば、 OQ の値は小さくなる。つまり、この操作により、 P が中心 O から遠ざかると、点 Q は中心 O に近づく。

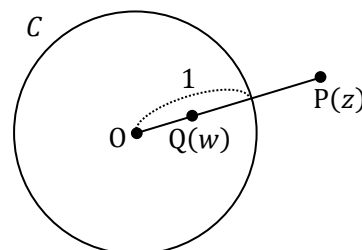
ここでは、 $r = 1$ として、複素数平面上における反転を考えていこう。

$P(z), Q(w)$ とおくと、条件(i)より、 $w = kz$ ($k > 0$) ...①

また、条件(ii)より、 $|z||w| = 1$

$$\text{これより、} |z||w| = 1 \Leftrightarrow |z||kz| = 1 \Leftrightarrow k|z|^2 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{|z|^2}$$

$$\text{これを①に代入すると、} w = \frac{1}{|z|^2} z = \frac{1}{z\bar{z}} z = \frac{1}{\bar{z}}$$

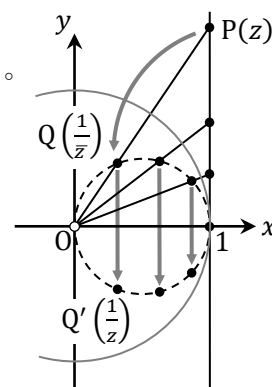


つまり、複素数平面上において、円 $|z| = 1$ に関して点 z を反転すると、点 $\frac{1}{\bar{z}}$ となる。

このことから、**例 14** における変換 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ は、以下のような変換をしていることが分かる。

例 14 の場合は $\frac{1}{z}$ と $\frac{1}{\bar{z}}$ の描く図形は同じ)

$$z \xrightarrow[\text{反転}]{\text{円 } |z|=1 \text{ に関して}} \frac{1}{\bar{z}} \xrightarrow[\text{対称移動}]{\text{実軸に関して}} \frac{1}{z}$$

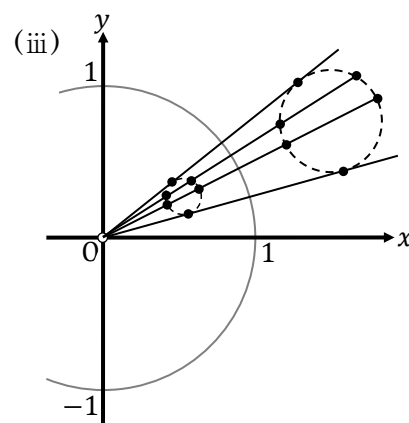
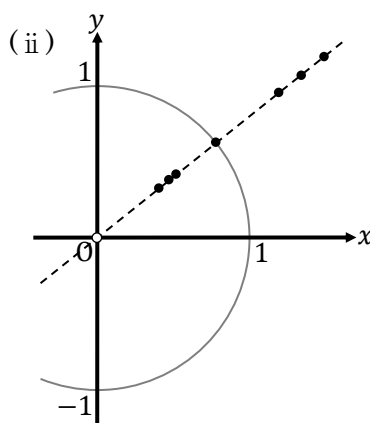
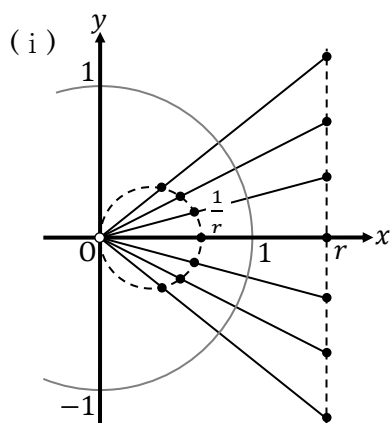


一般的に中心 O の円 C に関しての反転には次のような性質がある。

- (i) 点 O を通る円 $\xleftrightarrow{\text{反転}}$ 点 O を通らない直線

(ii) 点 O を通る直線 $\xleftrightarrow{\text{反転}}$ 点 O を通る直線 (自分自身に写る)

(iii) 点 O を通らない円 $\xleftrightarrow{\text{反転}}$ 点 O を通らない円



○ 半直線のなす角

3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を複素数平面上の異なる3点とする。

このとき、半直線 AB から半直線 AC までの回転角 $\angle BAC$ を考える。

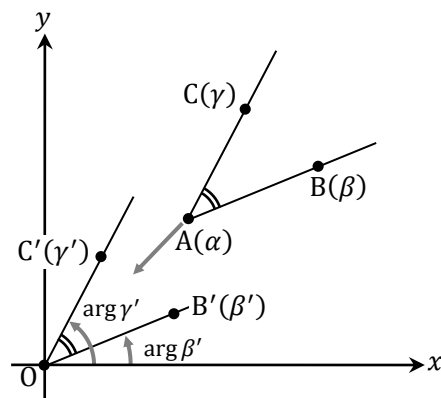
点 A が点 O に移るように、半直線 AB , AC を平行移動したとき、

点 B が移る点を $B'(\beta')$, 点 C が移る点を $C'(\gamma')$ とすると、

$\beta' = \beta - \alpha$, $\gamma' = \gamma - \alpha$ より、

$$\angle BAC = \angle B'OC' = \arg \gamma' - \arg \beta' = \arg \frac{\gamma'}{\beta'} = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

と表すことができる。



半直線のなす角

3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して、

$$\angle BAC = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

なお、3点 A , B , C が一直線上に並ぶとき、

$$\angle BAC = 0, \pi \Leftrightarrow \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 0, \pi \Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ は実数}$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= r(\cos 0 + i \sin 0) = r \\ \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} &= r(\cos \pi + i \sin \pi) = -r \end{aligned}$$

となり、2直線 AB , AC が垂直に交わる時、

$$\angle BAC = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ は純虚数}$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = r \left\{ \cos \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \pm ri$$

となる。

一直線上, 垂直条件

3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して、

3点 A , B , C が一直線上に並ぶ $\Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は実数

2直線 AB , AC が垂直に交わる $\Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は純虚数

なお、右図のような異なる4点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$ において、2直線 AB , CD のなす角 θ は次のように考えるとよい。

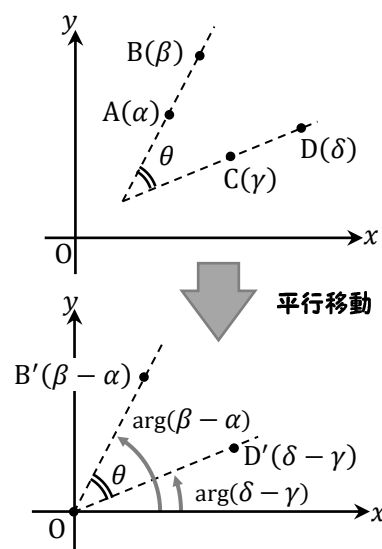
① 2点 A , C が原点と一致するように4点を平行移動。

② 3点 O , $B'(\beta - \alpha)$, $D'(\delta - \gamma)$ において、 $\angle B'OD'$ を求める。

これより、

$$\theta = \arg(\beta - \alpha) - \arg(\delta - \gamma) = \arg \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma}$$

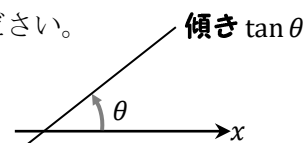
となる。



例 15 座標平面上に 3 点 $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(2, 3)$ をとるとき, $\angle BAC$ の大きさを求めなさい。

色々な方法が考えられます。座標平面上における角度の扱いを確認してください。

まずは, 直線の傾きが $\tan \theta$ で表されることを用いて解いてみます。



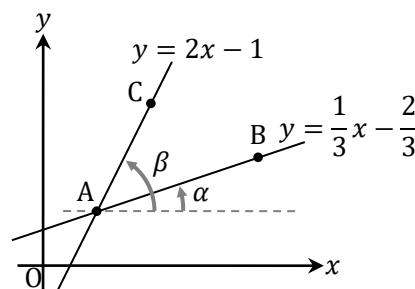
解①

直線 AB , AC と x 軸の正の向きとのなす角を, それぞれ α , β とすると,

$$\tan \alpha = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}, \quad \tan \beta = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

$$\text{よって, } \tan \angle BAC = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

$$0 < \angle BAC < \pi \text{ より, } \angle BAC = \frac{\pi}{4}$$



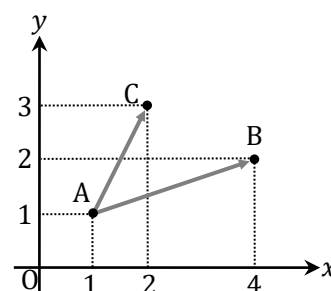
次に, ベクトルの内積を用いた解法です。

解②

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3+2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 < \angle BAC < \pi \text{ より, } \angle BAC = \frac{\pi}{4}$$



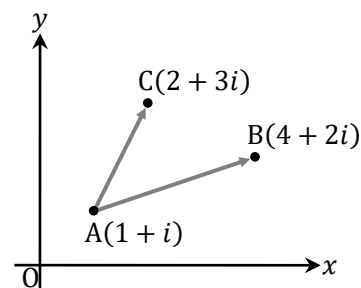
最後に, 複素数平面を用いた解法になります。

解③

$A(1+i)$, $B(4+2i)$, $C(2+3i)$ とすると,

$$\angle BAC = \arg \frac{2+3i - (1+i)}{4+2i - (1+i)} = \arg \frac{1+2i}{3+i} = \arg \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \arg \frac{1+i}{2}$$

$$\frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ より, } \angle BAC = \frac{\pi}{4}$$



ここで学んだことは, 角度を扱う新しい手法になる。座標平面上において角度の扱う方法は限られているので, 問題に応じて使い分けられるように整理しておくとい良いでしょう。

座標平面上において角度を扱う方法

- (i) (傾き) = $\tan \theta$ を使う
- (ii) ベクトルの内積を使う
- (iii) 複素数平面上で, $\arg \theta$ を使う

例 16 複素数平面上に異なる 4 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$ がある。2 点 A , B は単位円上にあり、点 D は $\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma})$ を満たす。このとき、次のことを示しなさい。

(1) 3 点 A , B , D は同一直線上

(2) $AB \perp CD$

$$(1) \quad 3 \text{ 点 } A(\alpha), B(\beta), D(\delta) \text{ が同一直線上} \Leftrightarrow \frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ は実数} \Leftrightarrow \frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha} = \overline{\left(\frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha}\right)} \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、① を示せばよい。

$$\frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}) - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{-\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}}{2(\beta - \alpha)}$$

$$\text{これより, } \overline{\left(\frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha}\right)} = \overline{\left(\frac{-\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}}{2(\beta - \alpha)}\right)} = \frac{-\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}{2(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$2 \text{ 点 } A, B \text{ は単位円周上より, } \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$$

点 z が単位円周上

$$|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$\textcircled{2} = \frac{-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \bar{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}\bar{\gamma}}{2\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{-\beta + \alpha + \alpha\beta\bar{\gamma} - \gamma}{2(\alpha - \beta)} = \frac{-\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}}{2(\beta - \alpha)} = \frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha}$$

よって、 $\frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha} = \overline{\left(\frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha}\right)}$ となり、題意は成り立つ。

$$(2) \quad AB \perp CD \Leftrightarrow \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ は純虚数} \Leftrightarrow \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} = -\overline{\left(\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}\right)} \quad \dots \textcircled{3}$$

よって、③ を示せばよい。

$$\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}) - \gamma}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha + \beta - \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}}{2(\beta - \alpha)}$$

$$\text{これより, } \overline{\left(\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}\right)} = \overline{\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}}{2(\beta - \alpha)}\right)} = \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{\gamma} - \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}{2(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} \quad \dots \textcircled{4}$$

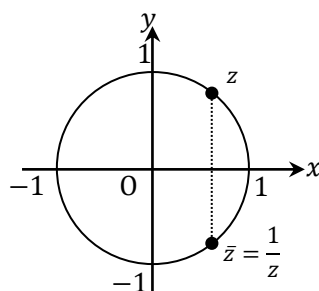
$$2 \text{ 点 } A, B \text{ は単位円周上より, } \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$$

$$\textcircled{4} = \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \bar{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}\bar{\gamma}}{2\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\beta + \alpha - \alpha\beta\bar{\gamma} - \gamma}{2(\alpha - \beta)} = -\frac{\alpha + \beta - \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}}{2(\beta - \alpha)} = -\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}$$

よって、 $\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} = -\overline{\left(\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}\right)}$ となり、題意は成り立つ。

点 z が単位円周上にあるとき、 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ が成り立ちます。

とてもよく出てくる式なので、使えるようにしておきましょう。



例 17 複素数平面上の異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が正三角形を作るための必要十分条件は,
 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$
 であることを示しなさい。

解①

$\triangle ABC$ が正三角形になるための必要十分条件は, $AB = AC$ かつ $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ となる。

$$AB = AC \text{ かつ } \angle BAC = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 1 \text{ かつ } \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

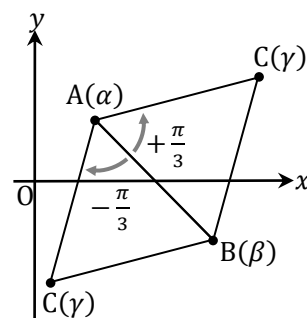
$$\Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 - \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\gamma - \alpha)^2 - (\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) + (\beta - \alpha)^2 = 0$$

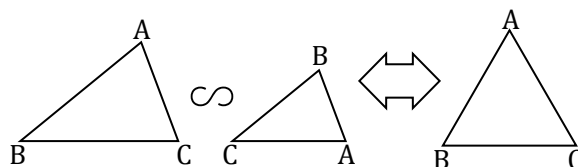
$$\Leftrightarrow \gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2 - \gamma\beta + \gamma\alpha + \alpha\beta - \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$$



よって, 成立する。

正三角形の条件を, 相似条件に置き換えることができると, 比較的計算が楽になります。



解②

$$\triangle ABC \text{ が正三角形} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle BCA$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{BA}, \angle BAC = \angle CBA$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \right| = \left| \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} \right|, \arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \arg \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$$

$$\Leftrightarrow -(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$$

$$\Leftrightarrow -\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = \gamma^2 - \gamma\alpha - \beta\gamma + \alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$$

← 2 辺の比とその間の角が等しい

← 「絶対値が等しい」かつ「偏角が等しい」
 $\Leftrightarrow$ 複素数が等しい

なお, この式の両辺を 2 倍して変形すると, 以下のようにきれいにまとめることができます。

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 0$$

○ 直線に関する対称移動

例 18 直線 $l: y = 2x$ に関して点 $P(3, 1)$ と対称な点 Q の座標を求めなさい。

まずは以前「図形と方程式」で学んだ方法を用います。

解①

$Q(a, b)$ とおくと、2 点 P, Q の中点の座標は、 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

これが $y = 2x$ 上にあるので、 $\frac{b+1}{2} = 2 \cdot \frac{a+3}{2} \Leftrightarrow b = 2a + 5 \dots ①$

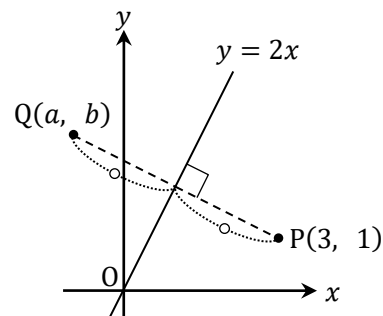
また、直線 PQ の傾きは、 $\frac{b-1}{a-3}$

直線 PQ と $y = 2x$ は直交するので、 $\frac{b-1}{a-3} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow a + 2b = 5 \dots ②$

①、②より、 b を消去すると、 $a + 2(2a + 5) = 5 \Leftrightarrow a = -1$

このとき、 $b = 3$

よって、 $Q(-1, 3)$



解①と同じ方針ですが、今度は複素数平面上を用いて解きます。

解②

$Q(a + bi)$ (a, b は実数) とおく。また、直線 l 上の点を $R(2 + 4i)$ とおく。

$\alpha = 3 + i, \beta = a + bi, \gamma = 2 + 4i$ とおくと、

2点 P, Q の中点が l 上にあるので、

$\frac{\frac{\alpha + \beta}{2} - 0}{\gamma - 0} = \frac{\alpha + \beta}{2\gamma} = \frac{3 + a + (1 + b)i}{4(1 + 2i)}$ が実数となる。

よって、

$$\begin{aligned} \frac{3 + a + (1 + b)i}{4(1 + 2i)} &= \overline{\left(\frac{3 + a + (1 + b)i}{4(1 + 2i)}\right)} \Leftrightarrow \frac{3 + a + (1 + b)i}{4(1 + 2i)} = \frac{3 + a - (1 + b)i}{4(1 - 2i)} \\ &\Leftrightarrow 5 + a + 2b + (b - 2a - 5)i = 5 + a + 2b + (5 + 2a - b)i \\ &\Leftrightarrow b - 2a - 5 = 0 \dots ① \end{aligned}$$

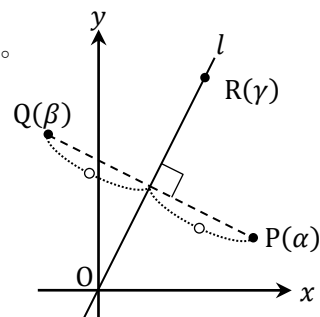
また、 $PQ \perp OR$ なので、 $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - 0} = \frac{a - 3 + (b - 1)i}{2(1 + 2i)}$ が純虚数となる。

よって、

$$\begin{aligned} \frac{a - 3 + (b - 1)i}{2(1 + 2i)} &= -\overline{\left(\frac{a - 3 + (b - 1)i}{2(1 + 2i)}\right)} \Leftrightarrow \frac{a - 3 + (b - 1)i}{2(1 + 2i)} = -\frac{a - 3 - (b - 1)i}{2(1 - 2i)} \\ &\Leftrightarrow a + 2b - 5 + (b - 2a + 5)i = 5 - a - 2b + (b - 2a + 5)i \\ &\Leftrightarrow a + 2b - 5 = 0 \dots ② \end{aligned}$$

①、②より、 $a = -1, b = 3$

よって、 $Q(-1, 3)$



次に複素数平面の回転を用いて求めます。

解③

直線 l と x 軸の正の向きのなす角を α とすると, $\tan \alpha = 2$

$$\text{よって, } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

複素数平面上の点 $3+i$ が表す点を $P(z)$ とする。

点 P を原点中心に $-\alpha$ 回転させた点を $P_1(z_1)$ とすると,

$$z_1 = z\{\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)\}$$

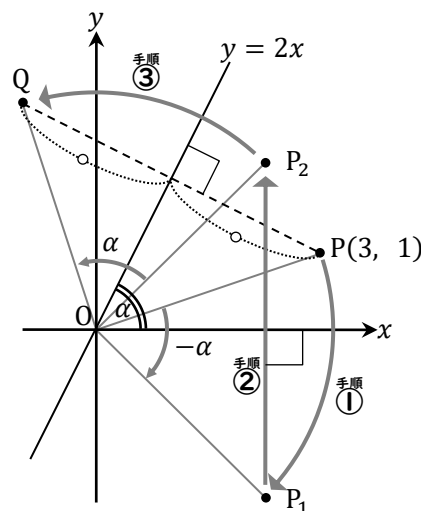
点 P_1 を x 軸に関して対称移動した点を $P_2(z_2)$ とすると,

$$\begin{aligned} z_2 = \bar{z}_1 &= \overline{z\{\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)\}} \\ &= \bar{z}\{\cos(-\alpha) - i \sin(-\alpha)\} \\ &= \bar{z}(\cos \alpha + i \sin \alpha) \end{aligned}$$

点 P_2 を原点中心に α 回転させた点が点 Q となるので,

$$\begin{aligned} \bar{z}(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) &= \bar{z}(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \quad \cdots (*) \\ &= (3-i)(2\cos^2 \alpha - 1 + 2i \sin \alpha \cos \alpha) \\ &= (3-i)\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) \\ &= -1 + 3i \end{aligned}$$

よって, 点 Q の座標は $(-1, 3)$



$y = 2x$ を x 軸に変換するところがポイントです。
 x 軸に関しての対称移動ならば簡単に求められますね。



(*) 式を見ても分かるとおり, 複素数平面上における直線に関する対称移動は次のようになることが分かる。

直線に関する対称移動

原点を通る直線 l と x 軸の正の向きのなす角を α とする。

直線 l に関して, 点 $P(z)$ と対称な点を $Q(w)$ とすると,

$$w = \bar{z}(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$$

が成り立つ。

また, 点 $\bar{z}(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$ は点 z を以下のように変換していると見る事ができる。

$$z \xrightarrow[\text{対称移動}]{\text{実軸に関して}} \bar{z} \xrightarrow[\text{+2}\alpha \text{ 回転}]{\text{原点中心に}} \bar{z}(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$$

つまり, 直線 l に関する対称移動は

実軸に関して対称移動してから, 原点中心に $+2\alpha$ 回転

しても求めることができる。