数 列 の 極 限

§1　数列の収束・発散

　数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくしていくと a_n がある一定の値 α に近づくとき，
数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**といい，

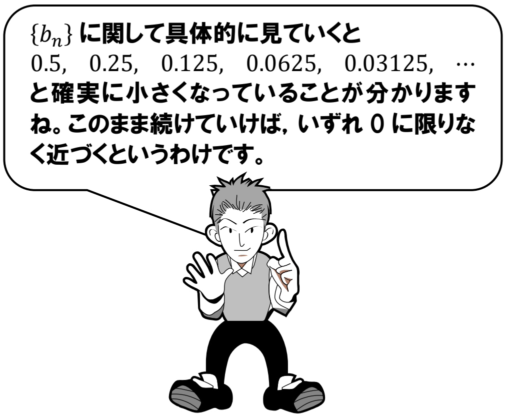
$$「\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha」 \qquad \text{または} \qquad 「n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha」$$

と表す。このときの α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**または**極限**という。
また，収束しないときは**発散する**という。

　いくつか具体例を見ていこう。
以下の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ は収束し，**極限値は 0** となる。つまり，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

と表すことができる。

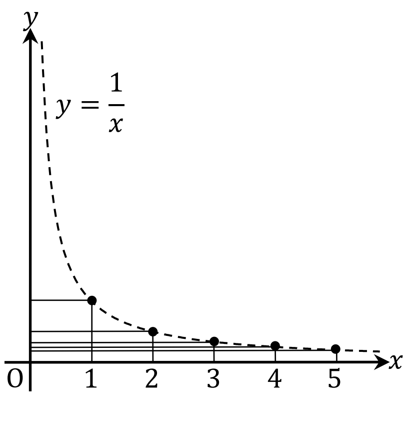


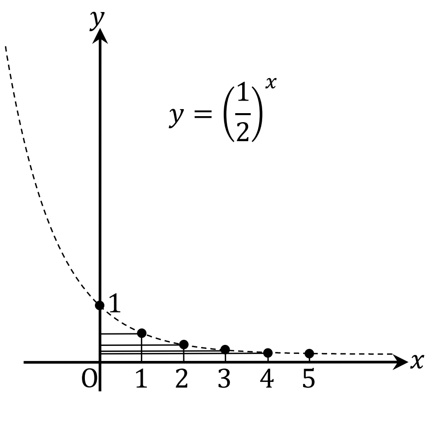
$$\{a_n\} = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}$$

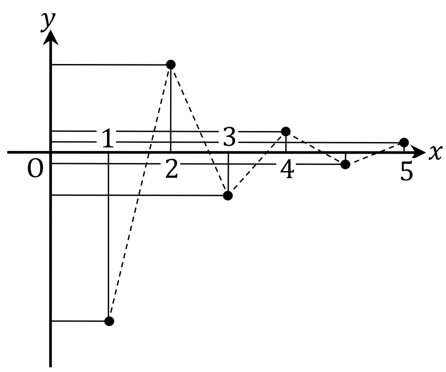
$$\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^4,\ \cdots,\ \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \cdots\right\}$$

$$\{c_n\} = \left\{-\frac{1}{2},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^4,\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ \cdots\right\}$$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束していく様子は，$y = \dfrac{1}{x}$，$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 上の点を見ていくことで分かる。
また，数列 $\{c_n\}$ に関しては正と負の値を繰り返し取りながら，徐々に 0 に近づいていることが分かる。







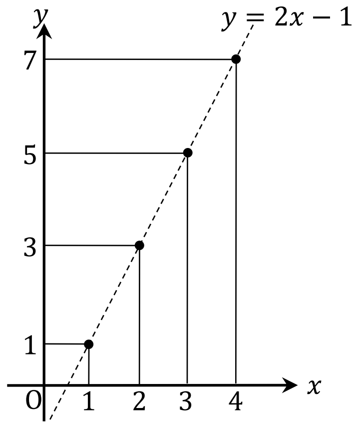
これに対し，以下の数列 $\{d_n\}$，$\{e_n\}$，$\{f_n\}$ は発散する。

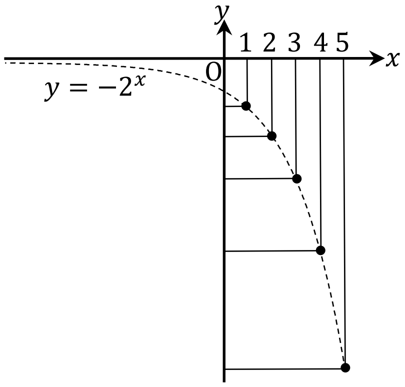
$\{d_n\} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots\}$

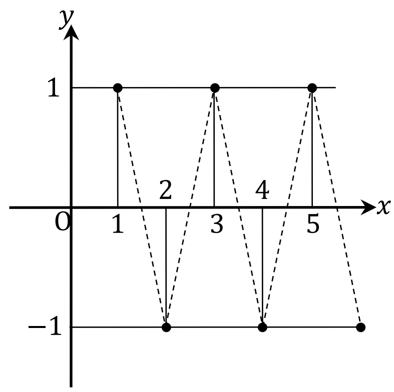
$\{e_n\} = \{-2,\ -2^2,\ -2^3,\ -2^4,\ \cdots,\ -2^n,\ \cdots\}$

$\{f_n\} = \{1,\ -1,\ (-1)^2,\ (-1)^3,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots\}$

数列 $\{d_n\}$，$\{e_n\}$ に関しては，先程と同様にグラフ上の点を考えることで発散していく様子が分かる。
また，数列 $\{f_n\}$ に関しては，1 と -1 の値を交互に取るだけなので，明らかにどの値にも収束しない。







　このとき，数列 $\{d_n\}$ は**『正の無限大に発散する』**，または，数列 $\{d_n\}$ の極限は**『正の無限大』**であるという。数列 $\{e_n\}$ に関しても同様で，**『負の無限大に発散する』**，または，数列 $\{e_n\}$ の極限は**『負の無限大』**であるという。記号では

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} e_n = -\infty$$

と表す。また，数列 $\{f_n\}$ のようなときは**『振動する』**といい，この場合，**『極限は存在しない』**という。

以上のことをまとめると次のことが分かる。

重要な極限

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$　　② $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (-1 < r < 1) \\ 1 & (r = 1) \\ \infty & (r > 1) \\ \text{振動する} & (r \leqq -1) \end{cases}$

○　極限の性質

収束する極限の性質として，以下のようなものがある。

極限の性質

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b = \beta$ のとき

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ （k は定数）　② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ （復号同順）

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha\beta$　④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$　$(\beta \neq 0)$

○　不定形

極限 $\lim_{n\to\infty}(n^2+3n)$ について考えてみよう。これは，

$$n\to\infty \text{ のとき}\quad n^2\to\infty,\quad 3n\to\infty$$

となり，**限りなく大きいもの同士をたす**ので，$\lim_{n\to\infty}(n^2+3n)=\infty$となる。

同様に，極限 $\lim_{n\to\infty}(n+1)(n+2)$ は**限りなく大きいもの同士をかける**ことになるので，

やはり $\lim_{n\to\infty}(n+1)(n+2)=\infty$ となる。

　このように，$n\to\infty$ の結果，$\infty+\infty$，$\infty\times\infty$ となるものに関してはすぐに極限を判断できる。
しかし，以下の 例 1，例 2 では $n\to\infty$ とすると，

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty$$

となってしまい，すぐには極限の判断がつかない。このような形を**不定形**と言う。
ここでは，このようなタイプへの対処法を見ていこう。

例 1　次の極限を求めなさい。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2+1}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2}{n^2+1}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n+3^n}$

　これらはすべて，$n\to\infty$ のとき $\frac{\infty}{\infty}$ となります。限りなく大きいもの同士の割り算となりますが，

足し算と掛け算とは違い，分子，分母の大きさの程度により極限は異なります。

(1)　n^2で分子，分母を割る。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

(2)　n^2で分子，分母を割る。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{1+\frac{1}{n^2}}=\infty$$

$$\frac{3n+2}{1+\frac{1}{n^2}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\infty}{1}$$

(3)　3^nで分子，分母を割る。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

　これを見ても分かる通り，基本的には**分母の最高次の項(もっとも大きい項)**で分子，分母を割ることにより，
不定形から抜け出すことができる。

例 2 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n-n^2)$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

これらはともに，$n\to\infty$ のとき，$\infty-\infty$ となります。
この場合も先ほどと同様に，前の数と後の数の大きさの程度により極限は異なってきます。

(1) 最高次の項のn^2をくくり出します

$$\lim_{n\to\infty}(2n-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{2}{n}-1\right)=-\infty$$

$$n^2\left(\frac{2}{n}-1\right)\xrightarrow{n\to\infty}\infty\times(-1)$$

(2) $\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ を掛けることで，分子の有理化を行います。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

不定形はこれ以外にも

$$\infty\times 0,\quad 1^\infty,\quad \frac{0}{0}$$

などがある。不定形に出会った場合は，与えられた式に応じて，そこから抜けだす工夫が必要になる。

例題 1 (1) 次の数列の極限を求めなさい。

（ア） $1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{4^2},\ \cdots$ （イ） $\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \sqrt{11},\ \cdots$

(2) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

（ア） $1-\frac{1}{2n^3}$ （イ） $3n-n^3$ （ウ） $\frac{2n^2-3}{n^2+1}$

練習 1 (1) 数列 $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$ の極限を調べなさい。

(2) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

（ア） $\sqrt{4n-2}$ （イ） $\frac{n}{1-n^2}$ （ウ） $n^4+(-n)^3$ （エ） $\frac{3n^2+n+1}{n+1}-3n$

例題 2 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}$ (3) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$

(4) $\log_2\sqrt[n]{3}$ (5) $\cos n\pi$

練習 2 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\dfrac{2n+3}{\sqrt{3n^2+n}+n}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$　　(3) $n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$

(4) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$　　(5) $\log_3 \dfrac{\sqrt[n]{7}}{5^n}$　　(6) $\sin\dfrac{n\pi}{2}$　　(7) $\tan n\pi$

例題 3 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3+7+11+\ \cdots\ +(4n-1)}{3+5+7+\ \cdots\ +(2n+1)}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_3(1^2+2^2+\ \cdots\ +n^2)-\log_3 n^3\}$

練習 3 次の極限を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\ \cdots\ +(2n)^2}{1^2+2^2+\ \cdots\ +n^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_2(1^3+2^3+\ \cdots\ +n^3)-\log_2(n^4+1)\}$

例題 4 (1) 数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=-6$ を満たすとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\boxed{}$ である。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2-n}\right)=5$ であるとき，定数 a の値を求めなさい。

練習 4 (1) 次の関係を満たす数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めなさい。

(ア) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=1$　　(イ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3}{2a_n+1}=2$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3}\right)=3$ が成り立つとき，定数 a の値を求めなさい。

例題 5 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $2\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$　　(2) $5^n-(-4)^n$　　(3) $\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^n}$　　(4) $\dfrac{r^n}{2+r^{n+1}}$ $(r>-1)$

練習 5 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めなさい。

(1) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　　(2) 3^n-2^n　　(3) $\dfrac{3^n-1}{2^n+1}$

(4) $\dfrac{2^n+1}{(-3)^n-2^n}$　　(5) $\dfrac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+1}$ (r は実数)

例題 6　数列 $\left\{\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^n\right\}$ が収束するように，実数 x の値の範囲を定めなさい。また，そのときの数列のそのときの極限値を求めなさい。

練習 6　次の数列が収束するように，実数 x の値の範囲を定めなさい。また，そのときの数列の極限値を求めなさい。

(1)　$\left\{\left(\dfrac{2}{3}x\right)^n\right\}$　　(2)　$\{(x^2-4x)^n\}$　　(3)　$\left\{\left(\dfrac{x^2+2x-5}{x^2-x+2}\right)^n\right\}$

例題 7　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$　　(2)　$a_1=5$，$a_{n+1}=2a_n-4$

練習 7　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めなさい。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+2$　　(2)　$a_1=1$，$2a_{n+1}=6-a_n$

例題 8　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めなさい。

$$a_1=0,\quad a_2=1,\quad a_{n+2}=\frac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

練習 8　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めなさい。

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad 4a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

例題 9　数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}$ によって定められるとき，

(1)　$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくとき，b_{n+1}，b_n の関係式を求めなさい。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めなさい。

練習 9　数列 $\{a_n\}$ が $a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}$ によって定められるとき，

(1)　$b_n=a_n-4$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表しなさい。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めなさい。

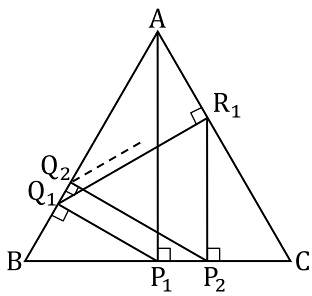
例題 10　$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{4}x_n+\dfrac{4}{5}y_n$，$y_{n+1}=\dfrac{3}{4}x_n+\dfrac{1}{5}y_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たす平面上の点列 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ がある。点列 P_1，P_2，$\cdots$ はある定点に限りなく近づくことを証明しなさい。

練習 10　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+8b_n$，$b_{n+1}=2a_n+b_n$ で定めるとき

(1)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2b_n}$ を求めなさい。

例題 11　図のような 1 辺の長さ a の正三角形 ABC において，頂点 A から BC に下ろした垂線の足を P_1 とする。P_1 から辺 AB に下ろした垂線の足を Q_1，Q_1 から辺 CA への垂線の足を R_1，R_1 から辺 BC への垂線の足を P_2 とする。このような操作を繰り返すと，辺 BC 上に点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n，$\cdots$ が定まる。このとき，P_n の極限の位置を求めなさい。



練習 11　1 辺の長さが 1 である正方形 ABCD の辺 AB 上に B 以外の点 P_1 をとり，辺 AB 上に点列 P_2，P_3，$\cdots$ を次のように定める。

$0^\circ<\theta<45^\circ$ とし，$n=1,\ 2,\ 3\ \cdots$ に対し，点 P_n から出発して，辺 BC 上に点 Q_n を $\angle\mathrm{BP}_n\mathrm{Q}_n=\theta$ となるようにとり，辺 CD 上に点 R_n を $\angle\mathrm{CQ}_n\mathrm{R}_n=\theta$ となるようにとり，辺 DA 上に点 S_n を $\angle\mathrm{DR}_n\mathrm{S}_n=\theta$ となるようにとり，辺 ABに点 P_{n+1} を $\angle\mathrm{AS}_n\mathrm{P}_{n+1}=\theta$ となるようにとる。また，$x_n=\mathrm{AP}_n$，$a=\tan\theta$ とする。

(1)　x_{n+1} を x_n，a で表しなさい。　　(2)　x_n を n，x_1，a で表しなさい。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めなさい。

例題 12　赤玉と白玉が $p:q$ の割合で入れてある袋がある。ただし，$p+q=1$，$0<p<1$ とする。この袋から玉を 1 個取り出してもとに戻す試行を n 回繰り返すとき，赤玉が奇数回取り出される確率を P_n とする。

(1)　P_{n+1} を P_n，p で表しなさい。　(2)　P_n を p，n で表しなさい。　(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n$ を求めなさい。

練習 12　ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている。立方体の底面の 4 辺のうち 1 辺を等しい確率で選んで，この辺を軸にしてこの立方体を横に倒す操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とする。ただし，最初印のついた面は上面にあるとする。

(1)　a_2 を求めなさい。　(2)　a_{n+1} を a_n で表しなさい。　(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めなさい。

○　極限値の大小

ここでは大小関係を利用して，極限を定める方法を学んでいく。

極限値の大小

① $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

$a_n \leqq b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leqq \beta$

② $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ のとき

$a_n \leqq c_n \leqq b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

特に②は**はさみうちの原理**という名前がついており，極限値を決定する際に度々登場するとても重要な原理である。これは数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が同じ極限値を持つのだから，それに挟まれている $\{c_n\}$ も同じ極限値を持たざるを得ないということを言っている。

例 3　$r > 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ となることを証明しなさい。

p.2 の『重要な極限』で見たように，明らかなことではありますが，ここでは厳密に証明をしていきます。

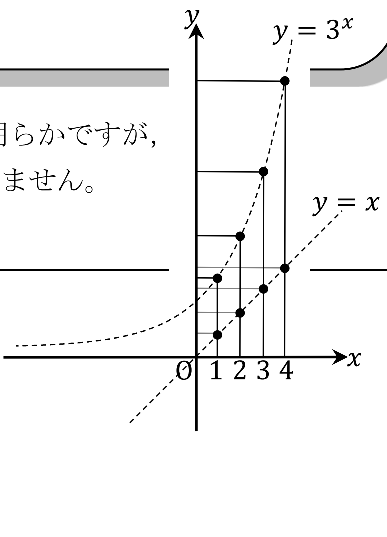
$r = 1 + h\ \ (h > 0)$ とおくと，$r^n = (1+h)^n$

二項定理より，$(1+h)^n = 1 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + \ \cdots\ + {}_n\mathrm{C}_{n-1} h^{n-1} + h^n = 1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2} h^2 + \ \cdots$

よって，$r^n = (1+h)^n > 1 + nh$

$\lim_{n\to\infty}(1 + nh) = \infty$ より，$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ となる。　**極限値の大小①を利用**

例 4　極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^n}$ を求めなさい。



3^n の方が n よりはやく大きくなるので，極限値が 0 になるのはほぼ明らかですが，厳密には $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，この式のままでは極限が求まったとは言えません。
ここでは「はさみうちの原理」を利用します。

$$\begin{aligned}
3^n = (1+2)^n &= 1 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 2 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 2^2 + \ \cdots\ + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot 2^{n-1} + 2^n \\
&= 1 + 2n + 2n(n-1) + \ \cdots\ + n \cdot 2^{n-1} + 2^n \\
&> 1 + 2n + 2n(n-1) \\
&> 2n^2
\end{aligned}$$

よって，$0 < \dfrac{1}{3^n} < \dfrac{1}{2n^2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \dfrac{n}{3^n} < \dfrac{1}{2n}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$ であるから，はさみうちの原理より，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^n} = 0$

例題 13 (1)　極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\cos n\pi}{n}$ を求めなさい。

(2)　$a_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\ \cdots\ +\dfrac{1}{n^2+n}$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めなさい。

練習 13　次の極限を求めなさい。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sin\dfrac{n\pi}{2}$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\ \cdots\ +\dfrac{1}{(2n)^2}\right\}$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ \cdots\ +\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

例題 14　n は $n\geqq 3$ の整数とする。

(1)　不等式 $2^n>\dfrac{1}{6}n^3$ が成り立つことを，二項定理を用いて示しなさい。

(2)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$ の値を求めなさい。

練習 14　n を正の整数とする。

(1)　不等式 $(1+x)^n\geqq 1+nx+\dfrac{1}{2}n(n-1)x^2$ を用いて $\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)^n>n$ が成り立つことを示しなさい。

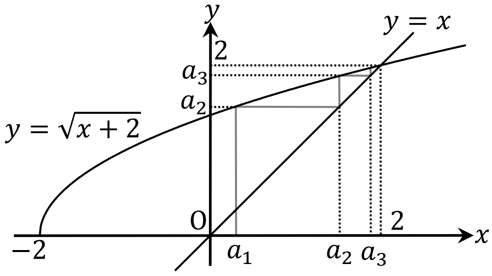
(2)　(1)で示した不等式を用いて，$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}$ の値を求めなさい。

例 5 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = a \ (0 < a < 2)$，$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすものとする。

与えられた漸化式の一般項を求めるのは少し難しそうですが，ここで聞かれているのはあくまでも極限なので，必ずしも一般項を求める必要はありません。

実は，この数列の極限は，$y = \sqrt{x+2}$ と $y = x$ の交点を調べることで(右図)，$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ となることが簡単に予想できます。あとはそれを示せばよいだけです。

ここでもはさみうちの原理を用いてみましょう。



$0 < a_k < 2$ と仮定すると，$2 < a_k + 2 < 4 \iff \sqrt{2} < \sqrt{a_k + 2} < 2$

よって，$0 < a_{k+1} < 2$ が成り立つ。

$0 < a_1 < 2$ より，$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ により帰納的に定義される数列 $\{a_n\}$ は

$0 < a_n < 2 \quad \cdots$① を満たす。

このとき，

$$2 - a_{n+1} = 2 - \sqrt{a_n + 2} = \frac{4 - (a_n + 2)}{2 + \sqrt{a_n + 2}}$$

$$= \frac{2 - a_n}{2 + \sqrt{a_n + 2}} < \frac{1}{2}(2 - a_n) \quad \left(\frac{1}{2 + \sqrt{a_n + 2}} < \frac{1}{2} \text{ より}\right)$$

これより，

$$2 - a_n < \frac{1}{2}(2 - a_{n-1})$$

$2 - a_{n-1} < \frac{1}{2}(2 - a_{n-2})$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^2 (2 - a_{n-2})$$

$2 - a_{n-2} < \frac{1}{2}(2 - a_{n-3})$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^3 (2 - a_{n-3})$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^4 (2 - a_{n-4}) < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - a_1) \quad \cdots②$$

①，②より，$0 < 2 - a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - a)$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - a) = 0$ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} (2 - a_n) = 0$

よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

例題 15　数列 $\{a_n\}$ は $0 < a_1 < 3$，$a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n}$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとき，

(1)　$0 < a_n < 3$ を証明しなさい。

(2)　$3 - a_{n+1} < \dfrac{1}{3}(3 - a_n)$ を証明しなさい。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めなさい。

練習 15　$a_1 = 2$，$n \geqq 2$ のとき $a_n = \dfrac{3}{2}\sqrt{a_{n-1}} - \dfrac{1}{2}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n > 1$ であることを証明しなさい。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めなさい。

§2　無限級数

無限数列 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots\}$ が与えられたとき，その数列の和

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$$

を**無限級数**または**級数**という。これがある値 S に近づくとき，無限級数は S に**収束**するといい，S を無限級数の**和**という。収束しないときは**発散**するという。

無限級数の収束，発散を調べるには，第 n 項までの和を S_n (これを**部分和**という)を求め，数列 $\{S_n\}$ の収束，発散するかを考えていけばよい。

例 6　無限級数 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ の和を求めなさい。

第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$ **部分分数分解**

$$= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) = \underbrace{1-\frac{1}{n+1}}_{\text{これが部分和}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$

例題 16　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots$

練習 16　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\dfrac{1}{10\cdot 13}+\cdots$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

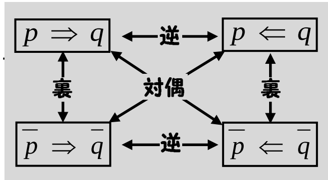
(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

級数の収束・発散について

無限数列の極限と級数の収束，発散には次のような関係がある。

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束する $\Longrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ② $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が発散する

①，②は対偶の関係になっているので，①の証明をすれば十分である。



証明

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$ とすると，

$a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

①，②はともに**逆は成り立たない**。実際，無限級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ \cdots \ + \frac{1}{n} + \ \cdots$$

は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ となるが，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \ \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ \cdots = \infty$$

となり，いくらでも大きくなることが分かる。

例 7 無限級数 $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{7} + \ \cdots$ が発散することを示しなさい。

この級数の第 n 項を a_n とおくと，$a_n = \dfrac{n}{2n-1}$ となる。

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$

となるので，この級数は発散する。

例題 17 次の無限級数は発散をすることを示しなさい。

(1) $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{7}{4}+\frac{10}{5}+\cdots$

(2) $\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\cdots$

練習 17 次の無限級数は発散することを示しなさい。

(1) $1-2+3-4+5-\cdots$

(2) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots$

(3) $\sin^2\frac{\pi}{2}+\sin^2\pi+\sin^2\frac{3}{2}\pi+\sin^2 2\pi+\cdots$

○　無限等比級数

　無限等比数列 $\{a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ \cdots\}$ の和について考えていこう。
$r \neq 1$ のとき，第 n 項までの部分和 S_n は，

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ \cdots\ + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

となる。これは $-1 < r < 1$ のときのみ，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ より収束する。

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (-1 < r < 1) \\ 1 & (r = 1) \\ \infty & (r > 1) \\ \textbf{存在しない} & (r \leqq -1) \end{cases}$$

また，$r = 1$ のときは $S_n = an$ となるので，発散する。

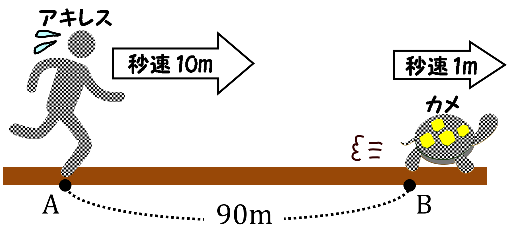
無限等比級数

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ \cdots\ + ar^{n-1} + \ \cdots$ において

①　$|r| \geqq 1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} S_n$ は発散　　　②　$|r| < 1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$

アキレスと亀の話

> 走ることの最も遅いものですら最も速いものによって決して追い着かれないであろう。なぜなら，追うものは，追い着く以前に，逃げるものが走りはじめた点に着かなければならず，したがって，より遅いものは常にいくらかずつ先んじていなければならないからである。
> 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　アリストテレス著　『自然学』より

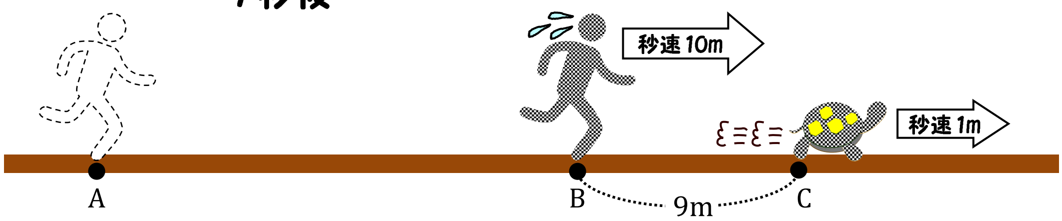


　アキレスが 90m 先にいる亀を追いかける。
亀は秒速 1m，アキレスは秒速 10m で進むとすると，普通は，

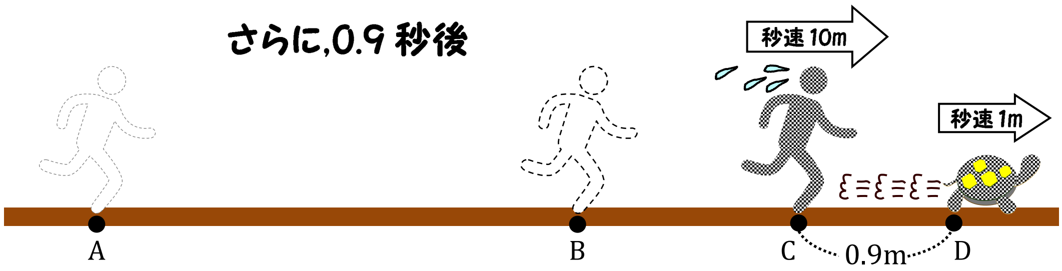
$90 \div (10-1) = 10$ 秒後

に追いつく。しかし，次のように考えるとどうだろうか。
　最初，アキレスのいる地点を A，亀のいる地点を B とする。
アキレスが B 地点にたどり着くのは $90 \div 10 = 9$ 秒後。その 9 秒間で亀は $1 \times 9 = 9$m 進む。

9 秒後



9 秒後の亀の位置を C とすると，アキレスが C 地点にたどり着くのは $9 \div 10 = 0.9$ 秒後。
その 0.9 秒間で亀は $1 \times 0.9 = 0.9\text{m}$ 進む。



0.9 秒後の亀の位置を D とすると，アキレスが D 地点にたどり着いたときには，同様に考えることで亀はさらにその先にいることになる。つまり，この考え方を続けていくと**「アキレスはいつまでたっても亀に追いつけない」**ということになってしまう。

しかし，これを実際，無限等比級数を用いて計算すると，「10 秒後に追いつく」ことが計算で求まる。
アキレスの走った時間を計算すると，

まず，AB 間を $90 \div 10 = 9$ 秒で走り，

その 9 秒間で亀は 9m 進むので，アキレスは BC 間を $9 \div 10 = \dfrac{9}{10}$ 秒で走り，

その $\dfrac{9}{10}$ 秒間で亀は $\dfrac{9}{10}$m 進むので，アキレスは CD 間を $\dfrac{9}{10} \div 10 = \dfrac{9}{10^2}$ 秒で走り $\cdots$

となるので，走った時間の総和は，

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \quad \cdots$$

と表すことができる。これは，初項 9 で公比が $\dfrac{1}{10}$ の無限等比級数なので，走った時間の総和は

$$\frac{9}{1 - \frac{1}{10}} = 10 \text{ 秒}$$

となることが分かる。

例題 18 (1)　次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めなさい。

（ア）　$\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \ \cdots$　　　（イ）　$4 - 2\sqrt{3} + 3 - \ \cdots$

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\frac{n\pi}{2}$ の和を求めなさい。

練習 18 (1)　次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めなさい。

（ア）　$1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \ \cdots$　　　（イ）　$2 + 2\sqrt{2} + 4 + \ \cdots$

（ウ）　$(3 + \sqrt{2}) + (1 - 2\sqrt{2}) + (5 - 3\sqrt{2}) + \ \cdots$

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n} \cos\frac{n\pi}{2}$ の和を求めなさい。

例題 19　次の無限級数について，以下の各問いに答えなさい。

$$(x-4)+\frac{x(x-4)}{2x-4}+\frac{x^2(x-4)}{(2x-4)^2}+\ \cdots\quad (x\neq 2)$$

(1)　無限級数が収束するときの実数 x の値の範囲を求めなさい。

(2)　無限級数の和 $f(x)$ を求めなさい。

練習 19　無限等比級数 $x+x(x^2-x+1)+x(x^2-x+1)^2+\ \cdots$ が収束するとき，実数 x の値の範囲を求めなさい。また，この級数の和 S を求めなさい。

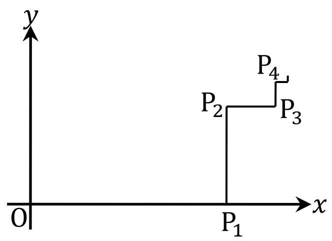
例題 20　次の循環小数を分数に直しなさい。

(1)　$1.\dot{3}\dot{5}$　　　　(2)　$0.5\dot{2}4\dot{3}$

練習 20　次の循環小数を分数に直しなさい。

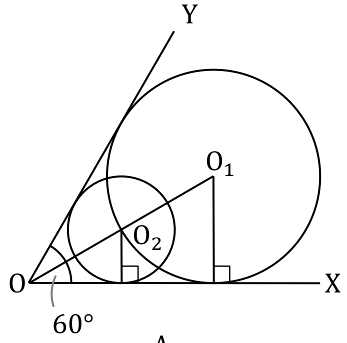
(1)　$0.\dot{6}\dot{3}$　　　　(2)　$0.0\dot{5}1\dot{8}$　　　　(3)　$3.2\dot{1}\dot{8}$

例題 21　右の図のように，$\mathrm{OP_1}=1$，$\mathrm{P_1P_2}=\frac{1}{2}\mathrm{OP_1}$，$\mathrm{P_2P_3}=\frac{1}{2}\mathrm{P_1P_2}$，$\cdots$ と限りなく進むとき，点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\cdots$ はどんな点に限りなく近づきますか。



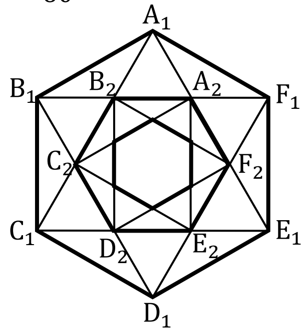
練習 21　あるボールを床に落とすと，ボールは常に落ちる高さの $\frac{3}{5}$ まで跳ね返るという。このボールを 3m の高さから落としたとき，静止するまでにボールが上下する距離の総和を求めなさい。

例題 22　$\angle\mathrm{XOY}[=60^\circ]$ の 2 辺 OX，OY に接する半径 1 の円の中心を $\mathrm{O_1}$ とする。線分 $\mathrm{OO_1}$ と円 $\mathrm{O_1}$ との交点を中心とし，2 辺 OX，OY に接する円を $\mathrm{O_2}$ とする。以下，同じようにして，順に $\mathrm{O_3}$，$\cdots$，O_n，$\cdots$ を作る。このとき，円 $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$，$\cdots$ の面積の総和を求めなさい。



練習 22　右図のような正六角形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$ において，$\triangle\mathrm{A_1C_1E_1}$ と $\triangle\mathrm{D_1F_1B_1}$ の共通部分としてできる正六角形 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2E_2F_2}$ を考える。$\mathrm{A_1B_1}=1$ とし，正六角形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$ の面積を S_1，正六角形 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2E_2F_2}$ の面積を S_2 とする。同様の操作で順に正六角形を作り，それらの面積を S_3，S_4，$\cdots$，S_n，$\cdots$ とする。

面積の総和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求めなさい。



例題 23　初項，公比がともに実数である無限等比級数があり，その和が 3 で，各項の 3 乗からなる無限等比級数の和が 6 である。初めの無限等比級数の公比を求めなさい。

練習 23　ある無限等比級数の和は 3 で，各項の 3 乗からなる無限等比級数の和は $\dfrac{108}{13}$ である。次の問いに答えなさい。

(1)　初めの級数の初項と公比を求めなさい。

(2)　初めの級数の各項の 4 乗からなる無限等比級数の和を求めなさい。

例題 24 (1)　すべての自然数 n に対して，$2^n > n$ であることを示しなさい。

(2)　数列の和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ を求めなさい。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めなさい。

練習 24　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ の収束，発散を調べて，収束する場合にはその和を求めなさい。

ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ $(|x| < 1)$ を用いてもよい。

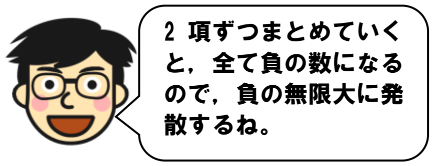
無限級数の注意点

次の無限級数を A さん，B さん，C さんの 3 人に解いてもらったところ，それぞれ違う答えが出てきた。いったいどの解答が正しいのでしょうか？

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-1}=1-2+4-8+16-32+\ \cdots$$

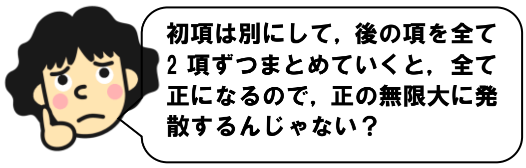
A さんの解答

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-1}=(1-2)+(4-8)+(16-32)+\ \cdots$$
$$=-1-4-16-\ \cdots$$
$$=-\infty$$



B さんの解答

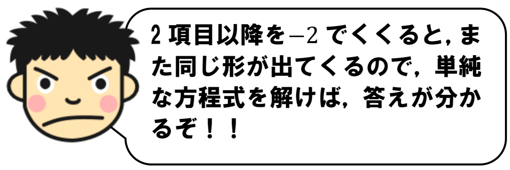
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-1}=1+(-2+4)+(-8+16)+(-32+64)+\ \cdots$$
$$=1+2+8+32+\ \cdots$$
$$=\infty$$



C さんの解答

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-1}=1-2+4-8+16-32+\ \cdots$$
$$=1-2(1-2+4-8+16-32+\ \cdots\ )$$
$$=1-2S$$

よって，$S=1-2S \iff S=\dfrac{1}{3}$



それぞれ，もっともらしい解答になっていますが，残念ながら皆間違いです。分かりますよね？
これは公比が -2 の無限等比級数なので極限は存在しません。では，一体何が違うのでしょう？

実は無限級数には**『足す順番を変えてはいけない』**という決まりがあります。足す順番を変えることで上記のように色々な極限をとってしまうものがあるからです。

そのような間違いを防ぐために，無限級数を計算する際には必ず，以下のような手順で行います。

① 第 n 項までの和を S_n を求める。
② 数列 $\{S_n\}$ の収束，発散を考える。

①では有限項の和を考えているので，この段階では今まで通り『足す順番を変えてもよい』わけです。

例題 25 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めなさい。

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{2}{3^2}-\frac{1}{2^3}\right)+\ \cdots\ +\left\{\frac{2}{3^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}+\ \cdots$$

練習 25 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

(2) $(1-2)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{2}{3^2}\right)+\ \cdots$

例題 26 無限級数 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\ \cdots\ \cdots$① について

(1) 級数①の初項から第 n 項までの部分和を S_n とするとき，S_{2n-1}，S_{2n} をそれぞれ求めなさい。

(2) 級数①の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めなさい。

練習 26 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\ \cdots$

(2) $2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}-\ \cdots\ -\dfrac{n+1}{n}+\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n+2}{n+1}+\ \cdots$