

関数の極限

§ 1 関数の極限

x が a に限りなく近づいたとき、 x の関数 $f(x)$ の値が b に限りなく近づくならば

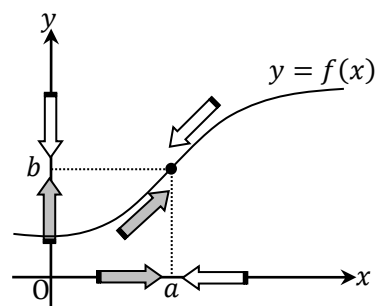
$$\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right] \quad \text{または} \quad \left[x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow b \right]$$

と表し、 b を $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限值**または**極限**という。

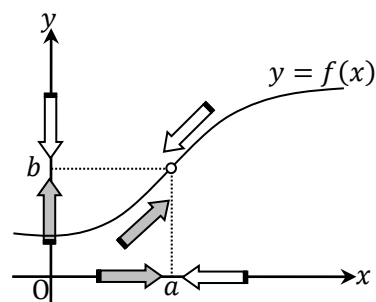
また、このとき関数 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき b に**収束する**という《図 1》。
収束しないときは**発散する**という。

《図 2》のような場合、 $f(a)$ の値は存在しない(○になっている)が、極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は存在している。極限はあくまでも**近づく値を調べる**のであって $x = a$ のときの値を聞いているのではない。

以下の例で見てみよう。



《図 1》



《図 2》

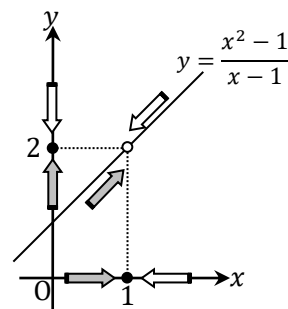
例 1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ の値を求めなさい。

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad \text{より}$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ のグラフは直線 } y = x + 1 \text{ から } x = 1 \text{ を除いた部分になる。}$$

グラフより、 x を 1 に近づけると、 y の値は 2 に近づく。

$$\text{よって、} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$



また、関数の極限に関しても、数列の場合と同様、次の法則が成り立っている。

極限の性質

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ のとき}$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \alpha \quad (k \text{ は定数})$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \alpha \beta$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

例 2 次の極限值を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

(2) $x = -t$ ($t > 0$) とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき, $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - t} - t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - t - t^2}{\sqrt{t^2 - t} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2 - t} + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t}} + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2)を

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1}}$$

と変形してしまうのは誤りである($\boxed{}$ 部が誤り)。

なぜなら, (2)では $x \rightarrow -\infty$ なので, x は負の値をとる。つまり, $\sqrt{x^2} = -x$ である。

このことから, $\boxed{}$ 部は,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} = -\frac{1}{2}$$

となる。この問題は, 非常に間違いやすいので, 解答では $x = -t$ ($t \geq 0$) とおいて, 変数を正の値にしている。

例 3 等式 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+1} - b}{x-2} = \sqrt{3}$ が成り立つとき, 定数 a, b の値を求めなさい。

まずは極限值を持つための**必要条件**を考えていきます。

$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ より, $\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x+1} - b) = 0$ となる必要がある。

$$\text{よって, } \sqrt{3}a - b = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{3}a$$

このとき,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+1} - \sqrt{3}a}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1-3}{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3}} a = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{これより, } \frac{a}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = 6$$

$$\text{このとき, } b = 6\sqrt{3}$$

例題 1 次の極限值を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x+3} - 1 \right)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4}$

練習 1 次の極限值を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 8}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(x+1 + \frac{2}{x-2} \right)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+2}}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{(2x-3)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x-3}$

例題 2 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x^2 + 5)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 - 3}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x}{3^x + 2^x}$

練習 2 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2)$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^3 - 2x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 1}{x+1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x-1}}{1+2^x}$

(7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x - 5^x}{7^x + 5^x}$

例題 3 次の極限值を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \log_3 x + \log_3 (\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x-1}) \right\}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x)$

練習 3 次の極限值を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_2 (8x^2 + 2) - 2 \log_2 (5x + 3) \}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 1})$

例題 4 次の等式を満たす定数 a, b の値を定めなさい。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+1} - b}{x-1} = \sqrt{2}$$

練習 4 次の等式を満たす定数 a, b の値を定めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{a\sqrt{x} + b}{x-4} = 2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax + b}{x-2} = 17$

(3) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{ax^2 + bx + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = 84$

○ 右側極限, 左側極限

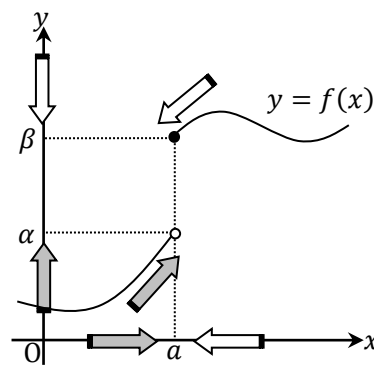
《図 3》の場合だと極限はどうなるだろうか？

この場合、グラフが途切れているため、左側から a に近づけたときは α に近づくが、右側から a に近づけたときは β に近づいている。このとき**極限が一意に定まらない**ので、 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ のときの極限は**存在しない**という。

『左から近づける』、『右から近づける』ことを記号では -0 , $+0$ を用いて次のように表す。

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \beta$$

これは、 x が a に近づいたときの**左側極限**, **右側極限**という。



《図 3》

例 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x}$ の極限を求めなさい。

0 に左右から近づける場合は、 $x \rightarrow 0+0$, $x \rightarrow 0-0$ とは書かずに、0 を省略して $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow -0$ と書きます。

$x \rightarrow +0$ のとき、 x は正の値をとりながら 0 に収束する。

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^2 + 1) = 1 \text{ より, } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 + 1}{x} = \infty$$

$x \rightarrow -0$ のとき、 x は負の値をとりながら 0 に収束する。

$$\lim_{x \rightarrow -0} (x^2 + 1) = 1 \text{ より, } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 + 1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 + 1}{x} \text{ より, 極限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x} \text{ は存在しない。}$$

例題 5 (1) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-2}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-2}{x-1}$ を求めなさい。

(2) $x \rightarrow 0$ のとき、関数 $\frac{x^2 - x}{|x|}$ の極限は存在するかどうか調べなさい。

練習 6 次の関数について、 x が 1 に近づくときの右側極限, 左側極限を求めなさい。そして、 $x \rightarrow 1$ のとき極限が存在するかどうか調べなさい。ただし、(4)の $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\frac{1}{(x-1)^2}$

(2) $\frac{1}{(x-1)^3}$

(3) $\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

(4) $x - [x]$

○ 極限値の大小

これに関しても数列の極限のときと同様の性質が成り立つ。

● 極限値の大小 ●

- ① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ であるとき

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \alpha \leq \beta$$
- ② $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$ であるとき

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha \text{ (はさみうちの原理)}$$

例 5 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2^x)^{\frac{1}{x}}$ の極限を求めなさい。

このまま $x \rightarrow \infty$ とすると、 ∞^0 となり、不定形です。ここでは、はさみうちの原理を用いて解いていきます。

$x > 0$ のとき、 $2^x < 1 + 2^x < 2 \cdot 2^x$ となるので、

$$(2^x)^{\frac{1}{x}} < (1 + 2^x)^{\frac{1}{x}} < (2 \cdot 2^x)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2 < (1 + 2^x)^{\frac{1}{x}} < 2^{\frac{1}{x}} \cdot 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}} \cdot 2 = 2^0 \cdot 2 = 2 \text{ より,}$$

$$\text{はさみうちの原理から, } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2^x)^{\frac{1}{x}} = 2$$

例題 6 次の極限値を求めなさい。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[3x]}{x} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 5^x)^{\frac{1}{x}}$$

練習 6 次の極限値を求めなさい。ただし、 $[x]$ はガウス記号を表す。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + [2x]}{x + 1} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^x + \left(\frac{3}{2} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}}$$

はさみうちの原理を用いて、次の極限を証明する。

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \text{ の極限 } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

証明

右図のように半径 1 の円周上に 2 点 A, B をとり,
 $\angle AOB = 2\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。また, 2 点 A, B における

接線の交点を C とする。

図より明らかに, 線分 $AB < \text{弧 } AB < \text{折線 } ACB$ なので,

$$2 \sin \theta < 2\theta < 2 \tan \theta$$

$\sin \theta > 0$ より両辺 $2 \sin \theta$ で割ると,

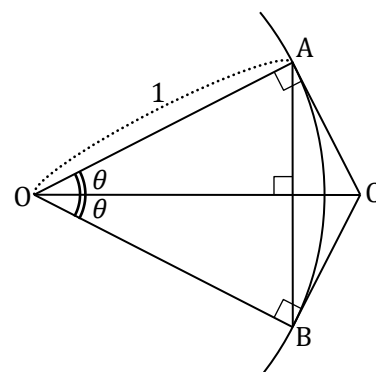
$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{\tan \theta}{\sin \theta} \Leftrightarrow \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \cos \theta = 1 \text{ より, はさみうちの原理から, } \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

また, $\theta < 0$ のとき, $\theta = -t$ ($t > 0$) とおくと

$$\lim_{\theta \rightarrow -0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{(-t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

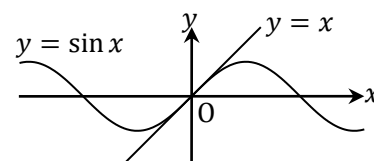


今, θ は正なので, 0 の右側からしか近づけることができません。左からも近づけて初めて極限が分かります。



この極限の結果から, $x \rightleftharpoons 0$ のとき $\frac{\sin x}{x} \rightleftharpoons 1$, つまり, $x \rightleftharpoons 0$ のとき $\sin x \rightleftharpoons x$ と言えます。

これは, $x \rightleftharpoons 0$ のとき, $y = \sin x$ と $y = x$ のグラフはほぼ同じであるということ意味しています。つまり, $y = \sin x$ の原点における接線の方程式が $y = x$ ということが分かります。



例 6 次の極限值を求めなさい。

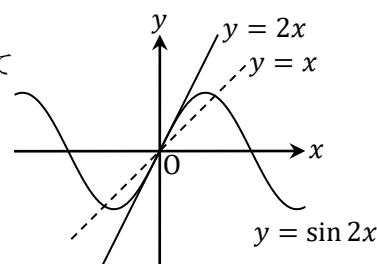
(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

$\frac{\sin 2x}{x}$ は $x \rightarrow 0$ のとき、 $\frac{\sin 0}{0}$ になるからと言って、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 1$ としてはいけません。 $x \neq 0$ のとき、 $y = \sin 2x$ と $y = x$ は同じグラフにならないからです。 $y = \sin 2x$ の原点における接線の方程式は $y = 2x$ なので、分母を $2x$ としなくてははいけません。



つまり、このタイプの極限は $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$ ($\square$ は同じ式) とすることがポイントです。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

別解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

半角の公式 $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

例題 7 次の極限值を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^\circ}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

練習 7 次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{\sin 3x}$

例題 8 次の極限値を求めなさい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \qquad (3) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

練習 8 次の極限を求めなさい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{1 + \cos x} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} \qquad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \sin x)}{3x(1 + 2x)} \qquad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} \qquad (6) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin^2 \frac{1}{x}$$

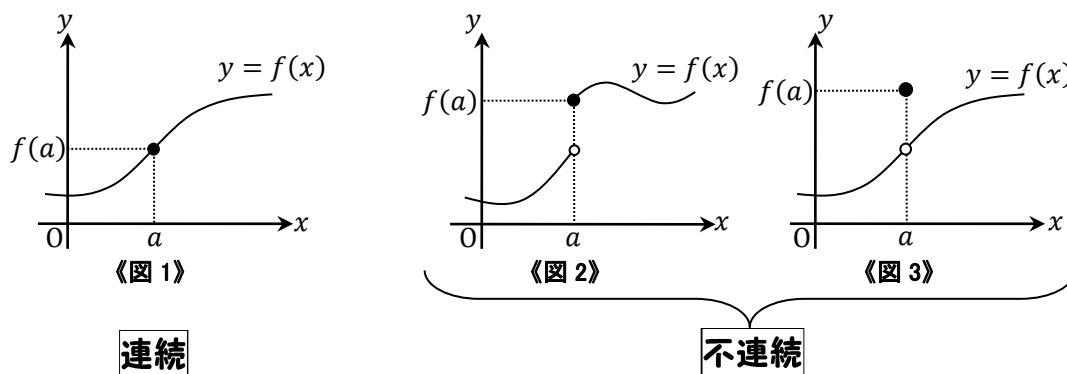
例題 9 O を原点とする座標平面上に 2 点 $A(2, 0)$, $B(0, 1)$ がある。自然数 n に対し、線分 AB を $1:n$ に内分する点を P_n , $\angle AOP_n = \theta_n$ ($0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$), 線分 AP_n の長さを l_n とする。

$$(1) \ l_n \text{ を } \theta_n \text{ で表しなさい。} \qquad (2) \ \text{極限值 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{\theta_n} \text{ を求めなさい。}$$

練習 9 周の長さが 1 である正 n 角形 ($n = 3, 4, 5, \dots$) に内接する円の半径を r_n , 外接する円の半径を R_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ を求めなさい。

§ 2 関数の連続性

定義域内の任意の x の値 a において連続なグラフとは、途切れていないひと続きのグラフ(図 1)であり、不連続なグラフとは途切れている部分が存在するグラフ(図 2,3)である。



それではこの図をもとに、関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において連続であるための条件を考えてみよう。

《図 2》は、極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在しない(左右で極限が違うので)。

《図 3》は、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在するが、それが $f(a)$ と一致しない。

《図 1》のみが唯一、「 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在」し、それが「 $f(a)$ に一致」する。

そして、これが連続となるための条件である。

関数の連続性

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において連続であるとは

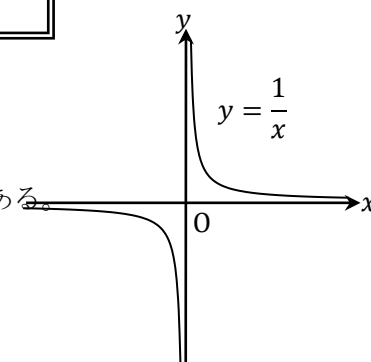
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことをいう。

ちなみに、連続とはあくまでも「定義域内の x の値」について考えるものである。

例えば、 $y = \frac{1}{x}$ の定義域は $x < 0$, $x > 0$ なので、

$y = \frac{1}{x}$ は $x = 0$ において不連続とは言わない。



例 7 $x \geq 0$ のとき、次の関数 $f(x)$ の連続性について調べなさい。

$$(1) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - x + 2}{x^n + 1}$$

$$(2) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x^n + 1}$$

まずは無限等比数列の極限の考え方を使得、 $f(x)$ がどのような関数なのかを求めていきます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ \infty & (x > 1) \end{cases}$$

存在しない ($x \leq -1$)

$$(1) \quad 0 \leq x < 1 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ より, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - x + 2}{x^n + 1} = -x + 2$$

$$x = 1 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1 \text{ より, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - x + 2}{x^n + 1} = 1$$

$$x > 1 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty \text{ より, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - x + 2}{x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{2}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = x$$

$$\text{以上より, } f(x) = \begin{cases} -x + 2 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ x & (x > 1) \end{cases}$$

これより、 $0 \leq x < 1$ 、 $x > 1$ のときは連続なので、 $x = 1$ における連続性を調べる。

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-x + 2) = 1 \text{ より, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$f(1) = 1$ より、 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ となるので、 $x = 1$ のとき連続となる。

以上より、 $y = f(x)$ は $x \geq 0$ において連続となる。

$$(2) \quad 0 \leq x < 1 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ より, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x^n + 1} = -1$$

$$x = 1 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1 \text{ より, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x^n + 1} = 0$$

$$x > 1 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty \text{ より, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = x$$

$$\text{以上より, } f(x) = \begin{cases} -1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x = 1) \\ x & (x > 1) \end{cases}$$

これより、 $0 \leq x < 1$ 、 $x > 1$ のときは連続なので、 $x = 1$ における連続性を調べる。

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \text{ より, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ は存在しないので,}$$

$y = f(x)$ は $x \geq 0$ において不連続となる。

例題 10 $-1 \leq x \leq 2$ とする。次の関数の連続性について調べなさい。

$$(1) f(x) = x|x| \quad (2) g(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1), \quad g(1) = 0$$

$$(3) h(x) = [x] \text{ ただし, } [] \text{ はガウス記号とする。}$$

練習 10 次の関数の連続性について調べなさい。なお、(1)では関数の定義域もいえ。

$$(1) f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \quad (2) -1 \leq x \leq 2 \text{ で } f(x) = \log_{10} \frac{1}{|x|} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

$$(3) 0 \leq x \leq 2\pi \text{ で } f(x) = [\cos x] \text{ ただし, } [] \text{ はガウス記号。}$$

例題 11 無限級数

$$x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+x)^{n-1}} + \cdots$$

について、次の各問いに答えなさい。

- (1) この無限級数が収束するような x の値の範囲を求めなさい。
- (2) x が(1)の範囲にあるとき、この無限級数の和を $f(x)$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフをかき、その連続性について調べなさい。

練習 11 次の無限級数が収束するとき、その和を $f(x)$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフをかき、その連続性について調べなさい。

$$(1) x^2 + \frac{x^2}{1+2x^2} + \frac{x^2}{(1+2x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+2x^2)^{n-1}} + \cdots$$

$$(2) x^2 + x + \frac{x^2+x}{x^2+x+1} + \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^2} + \cdots + \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^{n-1}} + \cdots$$

例題 12 (1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ を求めなさい。

(2) 上で定めた関数 $f(x)$ がすべての x について連続であるように、 a, b の値を定めなさい。

練習 12 a は 0 でない定数とする。関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + (a-1)x^n - 1}{x^{2n} - ax^n - 1}$ が $x \geq 0$ において連続になるよう

になるように、 a の値を定め、 $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。

○ 区間表示

今まではある区間を表すのに不等号を用いてきたが、これからは次のような記号も使っていく。

$$\begin{array}{cccc}
 a < x < b & a \leq x < b & a < x \leq b & a \leq x \leq b \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
 (a, b) & [a, b) & (a, b] & [a, b]
 \end{array}$$

(a, b) を **开区間**, $[a, b]$ を **闭区間** という。また, ∞ を用いると, 次のような表し方もできる。

$$\begin{array}{ccccc}
 a < x & a \leq x & x < b & x \leq b & \text{実数全体} \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
 (a, \infty) & [a, \infty) & (-\infty, b) & (-\infty, b] & (-\infty, \infty)
 \end{array}$$

○ 連続関数に関する存在定理

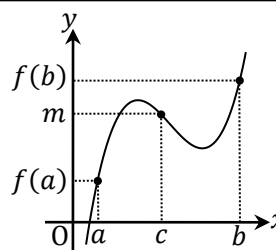
連続関数に関して成り立つ重要な存在定理を 2 つ紹介しておこう。

🌐 中間値の定理 🌐

$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で定義された連続な関数とし, m を $f(a) < m < f(b)$ とするとき,

$$m = f(c) \quad (a < c < b)$$

を満足する実数 c が存在する。



例 8 方程式 $x^2 - 3x - 5 = 0$ が区間 $(3, 5)$ に実数解をもつことを示しなさい。

解を求めてしまえば明らかですが, 今回は解が何かを聞かれているのではなく, 解の**存在を聞かれている**ので, 中間値の定理で解決します。

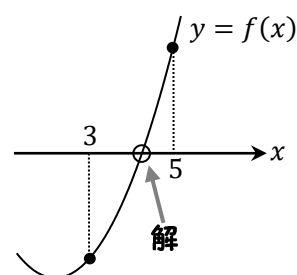
$f(x) = x^2 - 3x - 5$ とおく。

$$f(3) = 9 - 9 - 5 = -5 < 0,$$

$$f(5) = 25 - 15 - 5 = 5 > 0$$

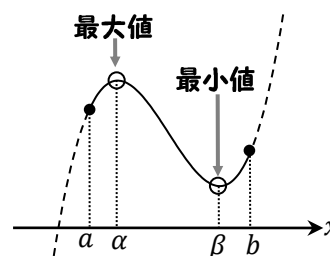
$y = f(x)$ は区間 $[3, 5]$ において連続なので, 中間値の定理より,

$x^2 - 3x - 5 = 0$ は区間 $(3, 5)$ に実数解をもつ。



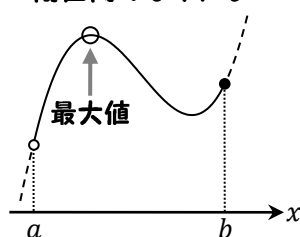
最大値・最小値の定理

$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で定義された連続な関数とすると、関数 $f(x)$ には、最大値を取る点 α と、最小値を取る点 β が必ず存在する。

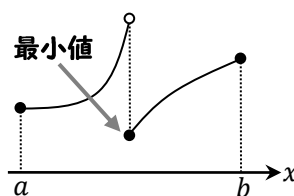


今まで何気なくやっていた最大・最小の問題ですが、実は閉区間、連続という条件がそろっているからこそ無条件に考えることができたのです。もし、この条件を満たしていないとこうはいきません。

閉区間でなければ...



連続でなければ...



左の例では最小値が、右の例では最大値が存在していませんね。



例題 13 (1) 方程式 $3^x = 2(x+1)$ は、 $1 < x < 2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解を持つことを示しなさい。

(2) $f(x)$, $g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続な関数とする。

$f(a) > g(a)$ かつ $f(b) < g(b)$ であるとき、方程式 $f(x) = g(x)$ は $a < x < b$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解を持つことを示しなさい。

練習 18 (1) 次の方程式は、与えられた範囲に少なくとも 1 つの実数解を持つことを示しなさい。

(ア) $x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ ($-2 < x < -1$, $0 < x < 1$, $2 < x < 3$)

(イ) $\cos x = x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

(ウ) $\frac{1}{2^x} = x$ ($0 < x < 1$)

(2) 関数 $f(x)$, $g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(x)$ の最大値は $g(x)$ の最大値より大きく、 $f(x)$ の最小値は $g(x)$ の最小値より小さい。このとき、方程式 $f(x) = g(x)$ は、 $a \leq x \leq b$ の範囲に解を持つことを示しなさい。

MEMO