

微分の応用

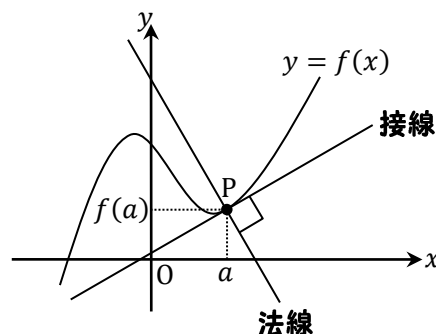
§1 接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(a, f(a))$ における
接線の傾きは $f'(a)$ となるので、接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

また、曲線 $y = f(x)$ 上の点 P を通り、点 P における
接線に垂直な直線を点 P における **法線** という。

法線の傾きは $-\frac{1}{f'(a)}$ となるので、法線の方程式は $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ となる。



例1 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $y = \frac{x}{2x+1}$ $\left(1, \frac{1}{3}\right)$

(2) $x^2 + y^2 = 4$ $(1, \sqrt{3})$

(3) $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ ($t = \frac{\pi}{3}$ に対応する点)

(1) $y' = \frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$ より接線の傾きは $\frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}$

よって、接線の方程式は $y = \frac{1}{9}(x-1) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}$

(2) $x^2 + y^2 = 4$ の両辺を x で微分すると、

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

よって、接線の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

これより、接線の方程式は $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) + \sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

(3) $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{3} \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 2 \cos t$ より, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \cos t}{-\sqrt{3} \sin t}$

よって、接線の傾きは $\frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{-\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{3}$

これより接線の方程式は $y = -\frac{2}{3}\left(x - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

例題 1 (1) 曲線 $y = \frac{3}{x}$ 上の点 $(1, 3)$ における接線と法線の方程式を求めなさい。

(2) 曲線 $y = \sqrt{25 - x^2}$ に接し、傾きが $-\frac{3}{4}$ である直線の方程式を求めなさい。

練習 1 (1) 次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めなさい。

(ア) $y = -\sqrt{2x}$, $A(2, -2)$ (イ) $y = e^{-x} - 1$, $A(-1, e - 1)$ (ウ) $y = \tan 2x$, $A\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$

(2) 曲線 $y = x + \sqrt{x}$ に接し、傾きが $\frac{3}{2}$ である直線の方程式を求めなさい。

例題 2 (1) 原点から曲線 $y = \log x - 1$ に引いた接線の方程式を求めなさい。

(2) $k > 0$ とする。曲線 $y = k\sqrt{x}$ 上にない点 $(0, 2)$ からこの曲線に引いた接線の方程式が $y = 8x + 2$ であるとき、定数 k の値と接点の座標を求めなさい。

練習 2 (1) 次の曲線に、与えられた点 P から引いた接線の方程式と、そのときの接点の座標を求めなさい。

(ア) $y = x \log x$, $P(0, -2)$ (イ) $y = \frac{1}{x} + 1$, $P(1, -2)$

(2) 直線 $y = x$ が曲線 $y = a^x$ の接線となるときの、 a の値と接点の座標を求めなさい。
ただし、 $a > 0$, $a \neq 1$ とする。

例題 3 次の曲線上の点 P , Q における接線の方程式をそれぞれ求めなさい。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ ただし、 $a > 0$, $b > 0$

(2) 曲線 $x = e^t$, $y = e^{-t^2}$ の $t = 1$ に対応する点 Q

練習 3 次の曲線上の点 P , Q における接線の方程式をそれぞれ求めなさい。

(1) 双曲線 $x^2 - y^2 = a^2$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ ただし、 $a > 0$

(2) 曲線 $x = 1 - \cos 2t$, $y = \sin t + 2$ 上の $t = \frac{5}{6}\pi$ に対応する点 Q

例題 4 2つの曲線 $y = -x^2$, $y = \frac{1}{x}$ に同時に接する直線の方程式を求めなさい。

練習 4 2つの曲線 $y = e^x$, $y = \log(x + 2)$ の共通接線の方程式を求めなさい。

例題 5 $0 < x < \pi$ のとき、曲線 $C_1: y = 2 \sin x$ と曲線 $C_2: y = k - \cos 2x$ が共有点 P で共通の接線 l をもつ。定数 k の値と点 P の座標を求めなさい。

練習 6 2 曲線 $y = x^2 - 2x$, $y = \log x + a$ が接するとき、定数 a の値を求めなさい。このとき、接点での接線の方程式を求めなさい。

例題 6 次の曲線 $y = x^2 + ax + b$, $y = \frac{c}{x} + 2$ は点 $(2, 3)$ で交わり、この点における接線は互いに直交するという。定数 a, b, c の値を求めなさい。

練習 8 $k > 0$ とする。 $f(x) = -(x - a)^2$, $g(x) = \log kx$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の共有点を P とする。この点 P において曲線 $y = f(x)$ の接線と曲線 $y = g(x)$ の接線が直交するとき、 a と k の関係式を求めなさい。

例題 7 中心 $(3, 3)$ の円が双曲線 $xy = 1$ に 2 つの点で接するとき、その接点の x 座標を求めなさい。

練習 7 点 $A(a, -a)$ を中心とする円が双曲線 $C: xy = 1$ とちょうど 2 個の共有点をもつとき、円 A の半径 r を a を用いて表しなさい。

例題 8 曲線 $y = e^{-x^2}$ に、点 $(a, 0)$ から接線が引けるような定数 a の値の範囲を求めなさい。

練習 8 曲線 $y = xe^x$ に、点 $(a, 0)$ から接線が引けるような定数 a の値の範囲を求めなさい。

例題 9 曲線 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ ($a > 0$) 上の点 P における接線が x 軸, y 軸と交わる点をそれぞれ A, B とするとき、線分 AB の長さは P の位置に関係なく一定であることを示しなさい。ただし、 P は座標軸上にないものとする。

練習 9 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上の点 P (座標軸上にはない) における接線が、 x 軸, y 軸と交わる点を、それぞれ A, B とするとき、原点 O からの距離の和 $OA + OB$ は一定であることを示しなさい。

§ 2 平均値の定理

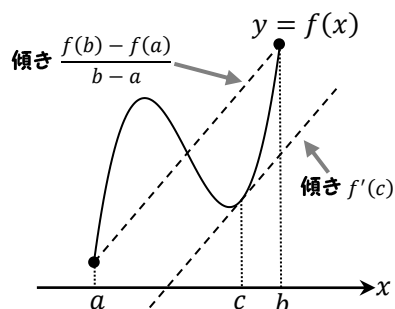
中間値の定理などとともに**存在の証明**に欠かせない、重要な定理である。

平均値の定理

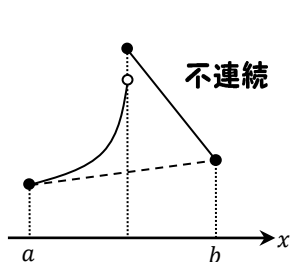
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続、
開区間 (a, b) で微分可能であるとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

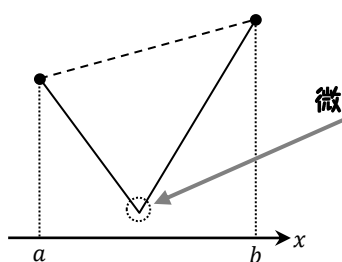
を満たす c が存在する。



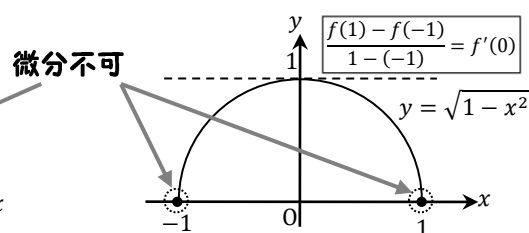
これは、区間の端点を通る直線の傾き $\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ と等しい接線の傾き $(f'(c))$ が、区間内に存在するという定理である。ただし、下の【図 1】、【図 2】を見ても分かる通り、この定理は区間内に不連続があったり、微分不可能な点があったりする場合は成り立たない。ただし、【図 3】のように、端点が微分不可能であっても、その間で連続でありさえすれば成立する。



【図 1】



【図 2】



【図 3】

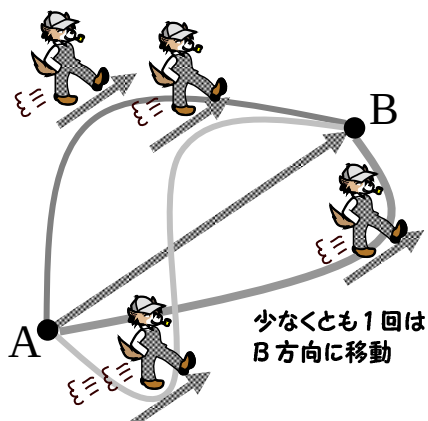
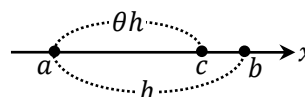
また、 $b = a + h$, $c = a + \theta h$ ($0 < \theta < 1$) とおくと次のようにも表すことができる。

平均値の定理②

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, a + h]$ で連続、開区間 $(a, a + h)$ で微分可能であるとき

$$f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h) \cdot h \quad (0 < \theta < 1)$$

を満たす θ が存在する。



少なくとも1回は
B 方向に移動

平均値の定理は言い換えると、2 点 A, B 間を移動するときに少なくとも 1 回は B 方向に進まなくてはならないということです。そうでなくては、明らかに B にたどり着けませんね。



例 2 $x > 0$ とし, $f(x) = \log x$ とするとき, 次の不等式を示しなさい。

$$\frac{1}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{x}$$

平均値の定理は, 差 $f(b) - f(a)$ を用いた不等式の証明問題でよく使われます。

$f(X) = \log X$ とすると, $f(X)$ は区間 $[x, x+1]$ で連続, 区間 $(x, x+1)$ で微分可能である。

$f'(X) = \frac{1}{X}$ であることから, 平均値の定理より

$$\frac{\log(x+1) - \log x}{x+1-x} = \frac{1}{c} \quad (x < c < x+1)$$

を満たす c が存在する。

$$x < c < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \text{ より, } \frac{1}{x+1} < \frac{\log(x+1) - \log x}{x+1-x} < \frac{1}{x}$$

つまり, $\frac{1}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{x}$ が成り立つ。

例題 10 (1) $f(x) = 2\sqrt{x}$ と区間 $[1, 4]$ について, 平均値の定理の条件を満たす c の値を求めなさい。

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のとき, $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$ を満たす θ を正の数 a, h で

表し, $\lim_{h \rightarrow +0} \theta$ を求めなさい。

練習 10 (1) 次の関数と区間について, 平均値の定理の条件を満たす c の値を求めなさい。

(ア) $f(x) = \log x$ $[1, e]$

(イ) $f(x) = e^{-x}$ $[0, 1]$

(2) $f(x) = x^3$ のとき, $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$ を満たす θ を正の数 a, h で

表し, $\lim_{h \rightarrow +0} \theta$ を求めなさい。

例題 11 平均値の定理を用いて, 次のことを証明しなさい。

$$\frac{1}{e^2} < a < b < 1 \text{ のとき } a - b < b \log b - a \log a < b - a$$

練習 11 平均値の定理を用いて, 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$(1) \ a < b \text{ のとき } e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$$

$$(2) \ t > 0 \text{ のとき } 0 < \log \frac{e^t - 1}{t} < t$$

$$(3) \ 0 < a < b \text{ のとき } 1 - \frac{a}{b} < \log b - \log a < \frac{b}{a} - 1$$

例題 12 極限值 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2}$ を求めなさい。

練習 12 次の極限值を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \log \frac{e^x - 1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\sin x - x}$

§ 3 関数の増減と極値

まずは数学Ⅱの微分の内容を確認しておこう。

導関数 $f'(x)$ の正負と関数の増減には次のような関係があった。

関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能であるとき

① I で常に $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は I で単調増加

② I で常に $f'(x) < 0$ ならば, $f(x)$ は I で単調減少

これは, $f'(x)$ が接線の傾きを表すことからほぼ明らかなことであるが, ここでは平均値の定理を用いて上記①の証明をしておこう。

①の証明

区間 I の中に, $x_1 < x_2$ となる任意の 2 数 x_1, x_2 をとると, 平均値の定理より

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad (x_1 < c < x_2)$$

となる c が存在する。

$f'(x) > 0$ より $f'(c) > 0$ 。また, $x_2 - x_1 > 0$ であるから,

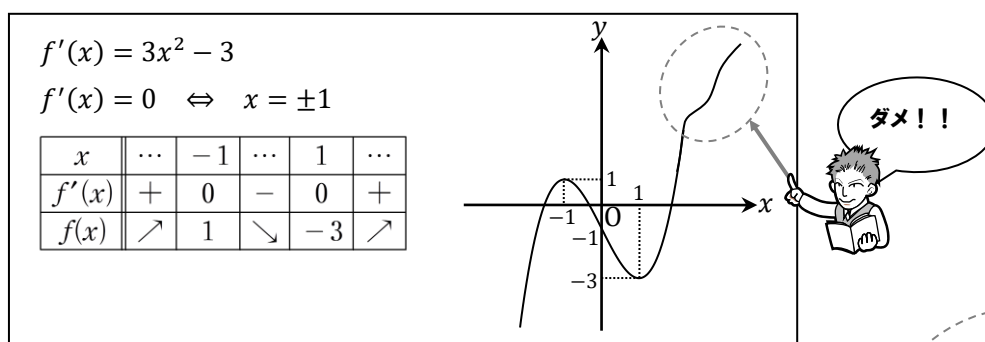
$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

以上より, $x_1 < x_2$ のとき $f(x_1) < f(x_2)$ となるので, 区間 I で $f(x)$ は単調増加となる。

②に関しても同様に証明することができる。

○ 曲線の凹凸

3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x - 1$ のグラフを下のようにかいたら, 皆さんはどう思うだろうか?



これは右上の方がグニャグニャ~としており, 当然, 正しい 3 次関数のグラフとはいえない。しかし, 増減表を見ると, $x > 1$ で $f'(x) > 0$, つまり, $x > 1$ で接線の傾きが正と言っているだけなので, 増減表を見ている限りでは間違っているとはいづらい。

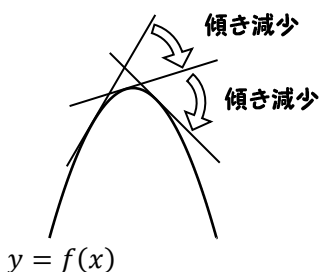
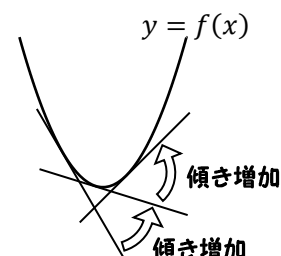


実はここに、数学Ⅱにおける微分の限界がある。接線の傾きが正といっても、正の値にも色々あるので、当然、グラフが1通りになるわけがないのである。

このような問題を解決するためには、「**接線の傾き $f'(x)$ がどのように変化するか?**」を調べればよい。つまり、 $f'(x)$ をさらに微分した第2次導関数 $f''(x)$ を調べるのである。

具体的には以下の通りになる。

ある区間 I で $f''(x) > 0$ のとき、その区間 I で $f'(x)$ は**単調増加**している。つまりこれは、区間 I で**接線の傾きが増加**していることを意味する。よって、この接線と接するように $y = f(x)$ のグラフをかくと右図のようになり、**下に凸**のグラフができる。



ある区間 I で $f''(x) < 0$ のとき、その区間 I で $f'(x)$ は**単調減少**している。つまりこれは、区間 I で**接線の傾きが減少**していることを意味する。よって、この接線と接するように $y = f(x)$ のグラフをかくと左図のようになり、**上に凸**のグラフができる。

以上をまとめると次のようになる。

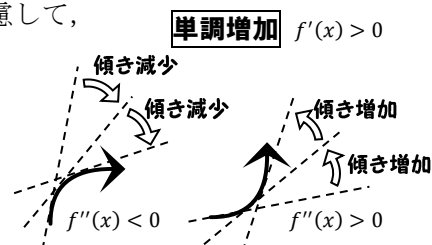
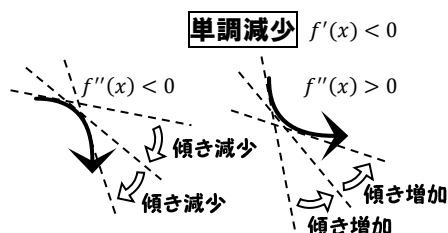
◆ 曲線の凹凸 ◆

- ① ある区間 I で $f''(x) > 0$ ならば、関数 $y = f(x)$ は区間 I で下に凸
- ② ある区間 I で $f''(x) < 0$ ならば、関数 $y = f(x)$ は区間 I で上に凸

例 3 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフをかき、極値を求めなさい。

増減表に、新たに $f''(x)$ の欄を作り、最下段には $f''(x)$ の符号を考慮して、以下のような矢印を入れます。

$f'(x) > 0$ かつ $f''(x) < 0$ のとき、**単調増加, 上に凸**なので、↗
 $f'(x) > 0$ かつ $f''(x) > 0$ のとき、**単調増加, 下に凸**なので、↘



$f'(x) < 0$ かつ $f''(x) < 0$ のとき、**単調減少, 上に凸**なので、↗
 $f'(x) < 0$ かつ $f''(x) > 0$ のとき、**単調減少, 下に凸**なので、↘

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad f''(x) = 6x - 6$$

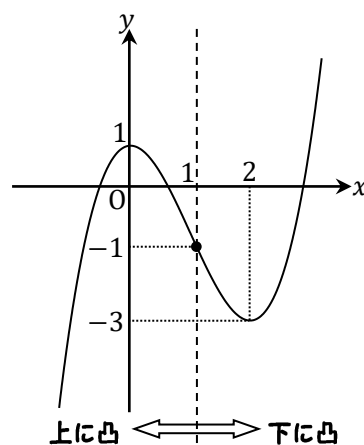
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗	1	↘	-1	↖	-3	↗

増減表よりグラフは右図

このとき 極大値 1 ($x = 0$), 極小値 -3 ($x = 2$)



この例では, $x = 1$ を境に $f''(x)$ の正負が変わるので,

$x > 1$ のとき $f''(x) > 0$ より, $y = f(x)$ は下に凸

$x < 1$ のとき $f''(x) > 0$ より, $y = f(x)$ は上に凸

となることが分かる。

変曲点

3 次関数において, $f''(x)$ の**正負が変わる点**, つまり凹凸の入れ替わる点を**変曲点**という。上の例では点 $(1, -1)$ のことである。3 次関数はこの**変曲点に関して対称**という重要な性質がある。

例 3 で確かめてみよう。

まずは, 変曲点 $(1, -1)$ が原点と一致するようにグラフを平行移動する。

つまり, x 軸方向に -1 , y 軸方向に 1 平行移動するので,

$x \rightarrow x + 1, y \rightarrow y - 1$ と置き換える。

これにより,

$$\begin{aligned} y - 1 &= (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 1 \Leftrightarrow y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 + 1 + 1 \\ &\Leftrightarrow y = x^3 - 3x \end{aligned}$$

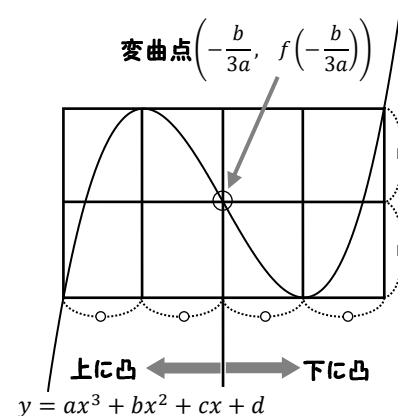
となるが, これは 3 次と 1 次の項が残るので**奇関数**である。奇関数は「**原点に関して対称**」という性質があるので, もとのグラフは変曲点 $(1, -1)$ に関して対称であることが分かる。

偶関数…グラフが y 軸に関して対称
 $f(x) = f(-x)$ が成り立つ
 奇関数…グラフが原点に関して対称
 $-f(x) = f(-x)$ が成り立つ

同様に, 一般の 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ においても,

変曲点 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ に関して対称であることを示すことができ

る。



例 4 $f(x) = x^4$ のグラフをかき、極値を求めなさい。

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2 > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

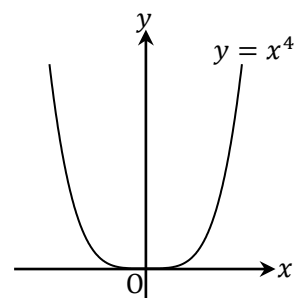
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

増減表より

極大値 なし 極小値 0 ($x = 0$)

以上より、グラフは右のようになる。

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+	0	+
$f(x)$	↘	0	↗



このグラフは常に $f''(x) > 0$ より、**変曲点は存在しない**。変曲点は $f''(x)$ の**符号が変化したとき**に表れるので、 $f''(x) = 0$ となる点をすべて変曲点としないように注意しよう。

例題 13 関数 $y = \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3}$ の増減を調べなさい。

練習 13 次の関数の増減を調べ、その極値を求めなさい。

$$(1) \quad y = x - 2\sqrt{x} \qquad (2) \quad y = \frac{x^3}{x-2} \qquad (3) \quad y = 2x - \log x$$

例題 14 次の関数の極値を求めなさい。

$$(1) \quad y = (x^2 - 3)e^{-x} \qquad (2) \quad y = |x|\sqrt{x+3}$$

練習 14 次の関数の極値を求めなさい。

$$(1) \quad y = xe^{-x} \qquad (2) \quad y = \frac{3x-1}{x^3+1} \qquad (3) \quad y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$(4) \quad y = (1 - \sin x) \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \qquad (5) \quad y = |x|\sqrt{4-x} \qquad (6) \quad y = (x+2) \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

例題 15 曲線 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ の凹凸を調べ、変曲点を求めなさい。

練習 15 次の曲線の凹凸を調べ、変曲点を求めなさい。

$$(1) \quad y = x^4 + 2x^3 + 2 \qquad (2) \quad y = x + \cos 2x \quad (0 \leq x \leq \pi) \qquad (3) \quad y = xe^x \qquad (4) \quad y = x^2 + \frac{1}{x}$$

例題 16 第2次導関数を用いて、次の関数の極値を求めなさい。

(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$

(2) $f(x) = 2 \sin x - \sqrt{3}x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

練習 16 第2次導関数を利用して、次の関数の極値を求めなさい。

(1) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x - 1$

(2) $y = e^x \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

例題 17 a は定数とする。関数 $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+a}$ について、次の条件を満たす a の値または範囲をそれぞれ求めなさい。

(1) $f(x)$ が $x=1$ で極値をとる。

(2) $f(x)$ が極値をもつ。

練習 17 関数 $f(x) = \frac{e^{kx}}{x^2+1}$ (k は定数) について

(1) $f(x)$ が $x=-2$ で極値をとるとき、 k の値を求めなさい。

(2) $f(x)$ が極値をもつとき、 k のとりうる値の範囲を求めなさい。

例題 18 関数 $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-6}$ は $x=5$ で極大値3、 $x=7$ で極小値7をとる。このとき、定数 a, b, c の値を求めなさい。

練習 18 関数 $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2+2}$ は $x=-2$ で極小値 $\frac{1}{2}$ 、 $x=1$ で極大値2をとる。このとき、定数 a, b, c の値を求めなさい。

例題 19 e は自然対数の底とし、 $f(x) = e^{x+a} - e^{-x+b} + c$ (a, b, c は定数) とするとき、曲線 $y = f(x)$ はその変曲点に関して対称であることを示しなさい。

練習 19 $a > 0, b > 0$ とし、 $f(x) = \log \frac{x+a}{b-x}$ とする。曲線 $y = f(x)$ はその変曲点に関して対称であることを示しなさい。

§4 グラフをかくための注意点

ここでは、より正確なグラフをかくためのチェックポイントを挙げておく。
ここで取り上げるのは以下の5点である。

① 定義域 ② 漸近線 ③ 対称性 ④ 周期性 ⑤ パラメータ

① 定義域

グラフをかくまえに、グラフが存在する領域を調べておくのはとても大切なことです。

例5 $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ のグラフをかき、極値を求めなさい。

まず、 $\sqrt{\quad}$ の中身は正になるので、 $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad y'' = -\frac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} < 0$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \quad \cdots (*)$$

両辺2乗して、 $4 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2$

(*) より、 $x > 0$ となるので、 $x = \sqrt{2}$

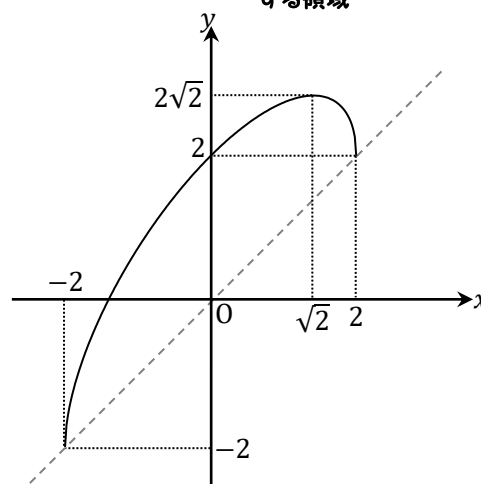
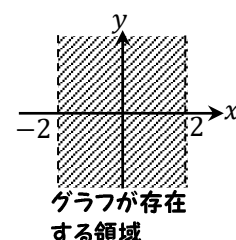
これより、増減表は下ようになる。

x	-2	...	$\sqrt{2}$	...	2
y'		+	0	-	
y''		-	-	-	
y	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

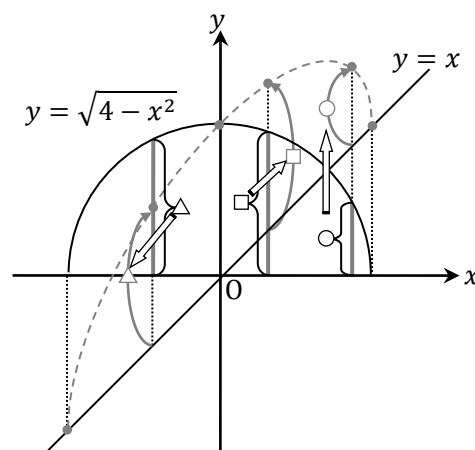
また、 $\lim_{x \rightarrow -2+0} y' = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2-0} y' = -\infty$ より

$x = \pm 2$ はこのグラフの接線となる。

極大値 $2\sqrt{2}$ ($x = \sqrt{2}$) 極小値 なし



このグラフは右図のように直線 $y = x$ と半円 $y = \sqrt{4 - x^2}$ の和関数としてとらえると、グラフのイメージが付きやすくなる。
グラフは一生懸命計算して求めることも大切だが、与えられた式から大まかな形を想像する力も必要である。



練習問題

1. 次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = -2x + \sqrt{1 - x^2}$

(2) $y = x \log x$ ($\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を用いてもよい)

(3) $y = x\sqrt{8 - x^2}$

② 漸近線

漸近線を持つグラフはまず、漸近線を求めてからグラフをかくとよい。

漸近線の求め方

(i) y 軸に平行な漸近線

極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ が ∞ または $-\infty$ のとき, $x = a$ を漸近線にもつ。

(主に分数関数において, 分母が 0 になるところで漸近線をもつ。)

(ii) y 軸に平行ではない漸近線

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ となる a , b を求めれば, $y = ax + b$ が漸近線となる。

例 6 $y = \frac{x^2}{x-1}$ のグラフをかき, 極値を求めなさい。

$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$ より, $x = 1$ は漸近線

また, $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ より,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ \frac{x^2}{x-1} - (x+1) \right\} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ となるので, $y = x + 1$ も漸近線

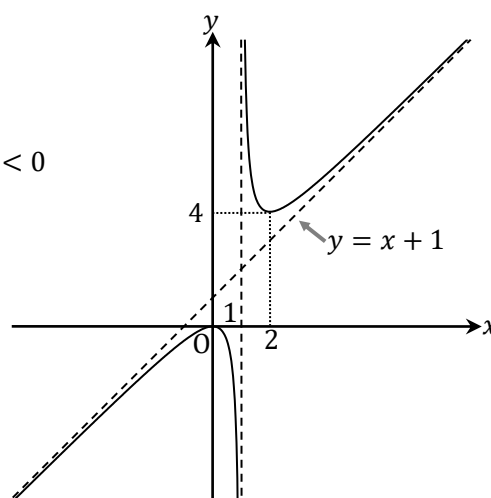
$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ より, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$

$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ より, $x > 1$ のとき $y'' > 0$, $x < 1$ のとき $y'' < 0$

これより, 増減表は下のようになる。

x	...	0	...	1	...	2	...
y'	+	0	-	/	-	0	+
y''	-	-	-	/	+	+	+
y	↗	0	↘	/	↗	4	↗

極大値 0 ($x = 0$) 極小値 4 ($x = 2$)



このグラフも例 5 と同様に, $y = x + 1$ と $y = \frac{1}{x-1}$ の和関数ととらえると, グラフをイメージしやすい。

○ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ となる a, b を求める手順

今の例のように、**有理関数**に関しては**帯分数化**することで、 y 軸に平行ではない漸近線を簡単に求めることができる。ここでは、有理関数ではない場合の漸近線の求め方を紹介しよう。

手順① a を求める。

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left\{ \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right\} = 0$$

この式が成立するには、 $\{ \}$ の中が 0 に収束する必要がある。

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{x} = 0 \text{ より, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} - a \right\} = 0 \text{ となるので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

となる必要がある。これにより a が定まる。

$\{ \}$ の中が 0 以外の数 A に収束すると、 $\pm\infty \times A$ となり、 0 に収束しませんね。



手順② b を求める。

手順① で求めた a を用いると、

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - ax\} = b$$

となる。これにより b が求まる。

手順① で求めた a はあくまでも必要条件。**手順②** で b の値が求まらなかったら、漸近線は存在しません。



この方法を用いて、先程のグラフの漸近線を求めると次のようになる。

例 7 $y = \frac{x^2}{x-1}$ の漸近線を求めなさい。

傾き $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

y 切片 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - ax\}$$

よって漸近線は、 $y = x + 1$ となる。

練習問題

2. 次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

(2) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

(3) $y = \frac{x^3 + 1}{x}$

3. 関数 $y = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$ のグラフの漸近線を求めなさい。

③ 対称性

対称性があるグラフは、一部分を調べるだけで、全体像をとらえることができる。

例 8 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ のグラフをかき、極値を求めなさい。

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ とおくと、 $f(x) = -f(-x)$ となるので、奇関数である。

よって、 $x \geq 0$ のみを調べて、原点に関して対称移動させればよい。

$$y' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad y'' = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$$

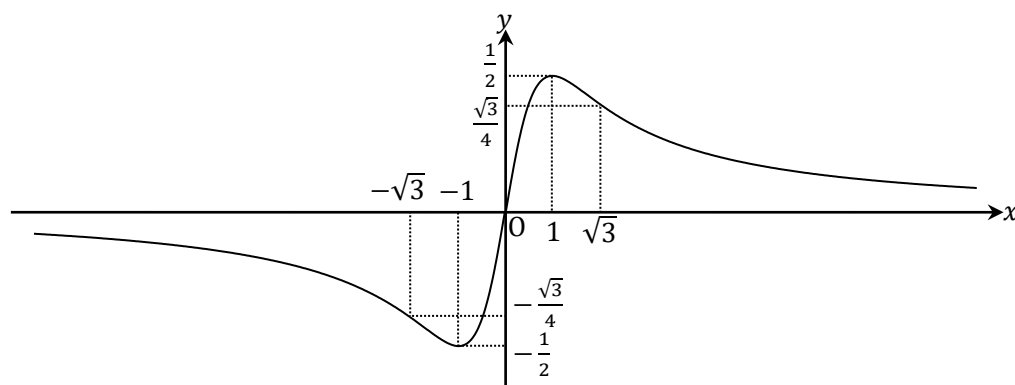
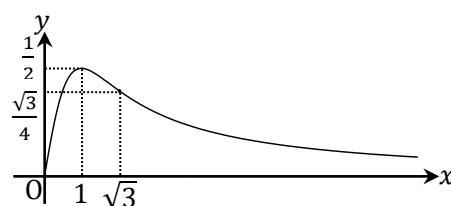
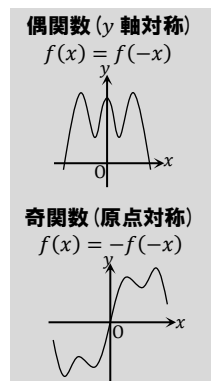
これより、増減表は下のようになる。

x	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
y'	+	+	0	-	-	-
y''	0	-	-	-	0	+
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$ より、 x 軸が漸近線となるので、

$x \geq 0$ の部分のグラフは右図のようになる。

これを原点に関して対称移動させると求めるグラフは下のようになる。



極大値 $\frac{1}{2}$ ($x = 1$) 極小値 $-\frac{1}{2}$ ($x = -1$)

例 9 $y^2 = x^2(x+1)$ のグラフをかきなさい。

陰関数のグラフはまず「 $y = \dots$ 」の形にしてから考えるとよい。

$$y^2 = x^2(x+1) \Leftrightarrow y = \pm x\sqrt{x+1}$$

$y = x\sqrt{x+1}$, $y = -x\sqrt{x+1}$ のグラフは x 軸に関して対称なグラフになるので片方のみ考えればよい。ここでは $y = x\sqrt{x+1}$ を考える。

まず、 $\sqrt{\quad}$ の中身が 0 以上になるので定義域は $x \geq -1$ となる。

$$y' = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}, \quad y'' = \frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

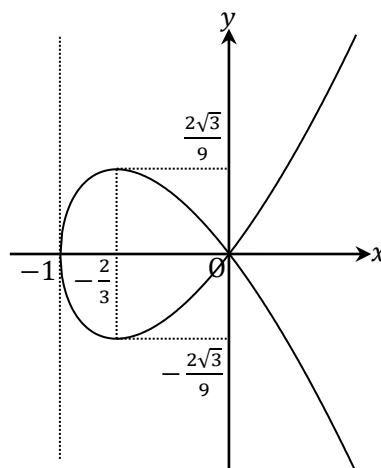
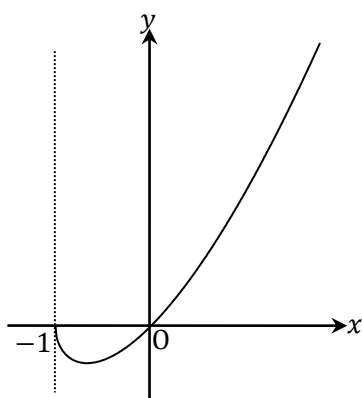
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}, \quad y'' = 0 \quad x = -\frac{4}{3}$$

これより、増減表は右のようになる。

x	-1	...	$-\frac{2}{3}$	...
y'		-	0	+
y''		+	+	+
y	0	↪	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↻

また $\lim_{x \rightarrow -1+0} y' = -\infty$ より、直線 $x = -1$ はこのグラフの接線となる。よって、グラフは左下図。

このグラフを x 軸に関して対称移動したものを考え合わせると $y^2 = x^2(x+1)$ になる。



練習問題

4. 次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$

(2) $y = e^{-\frac{x^2}{4}}$

(3) $4x^2 - y^2 = x^4$

④ 周期性

周期性のあるグラフ(三角関数を用いたグラフ)の場合、全体を調べるのではなく 1 周期だけ考えればよい。

例 10 $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ のグラフをかき、極値を求めなさい。

$f(x) = f(x + \omega)$ が成立しているとき、関数 $y = f(x)$ は周期 ω の周期関数といえます。



周期性 $f(x + 2\pi) = 2 \sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) = 2 \sin x + \sin 2x = f(x)$ よりこの関数の周期は 2π 。よって、 $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲を考えればよい。

対称性 $f(-x) = 2 \sin(-x) + \sin(-2x) = -(2 \sin x + \sin 2x) = -f(x)$ よりこの関数は奇関数。よって結局は、 $0 \leq x \leq \pi$ を調べれば全体が分かる。

$$f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x = 2 \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1) = 2(\cos x + 1)(2 \cos x - 1)$$

$$f''(x) = -2 \sin x - 4 \sin 2x = -2 \sin x - 8 \sin x \cos x = -2 \sin x (1 + 4 \cos x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1, \frac{1}{2} \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ より } x = \pi, \frac{\pi}{3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0, \cos x = -\frac{1}{4} \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ より } x = 0, \pi, \alpha \quad \left(\text{ただし, } \cos \alpha = -\frac{1}{4} \right)$$

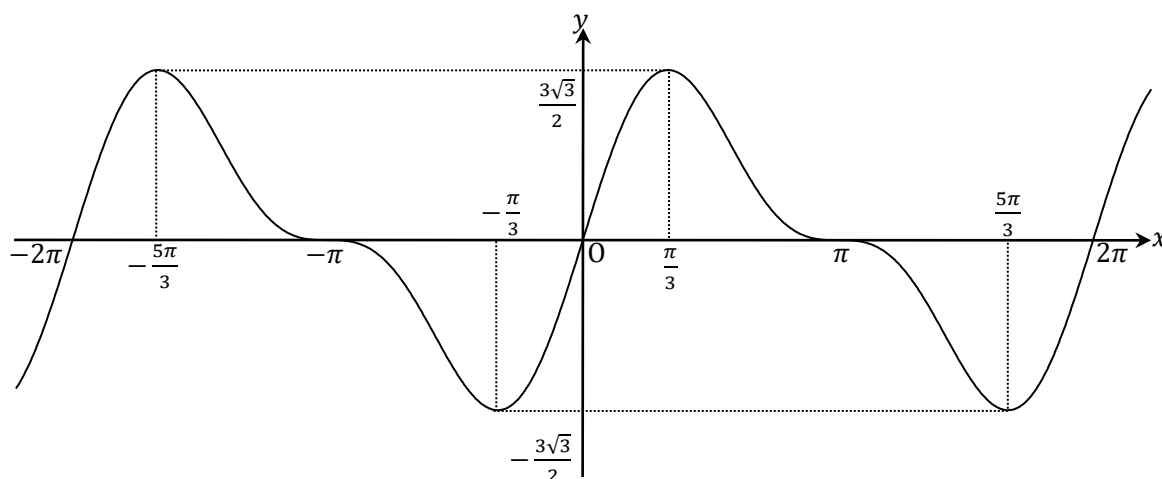
これより、増減表は下のようになる

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	α	...	π
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	0
$f''(x)$	0	-	-	-	0	+	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{15}}{8}$	$\searrow$	0

$$\text{極大値 } \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \left(x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \right)$$

$$\text{極小値 } -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \left(x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \right) \quad (n \text{ は整数})$$

上記の対称性、周期性を考慮すると、グラフは以下ようになる。



練習問題

5. 次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$

(2) $y = (1 - \cos x) \sin x$

(3) $y = 4 \sin x + \cos 2x$

⑤ パラメータ

ここでは、パラメータ表示された関数のグラフのかき方を学んでいこう。

例 11 $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t^2 - 2t - 3 \end{cases}$ で表されるグラフをかきなさい。

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 2 \text{ より, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - 2}{2} = t - 1$$

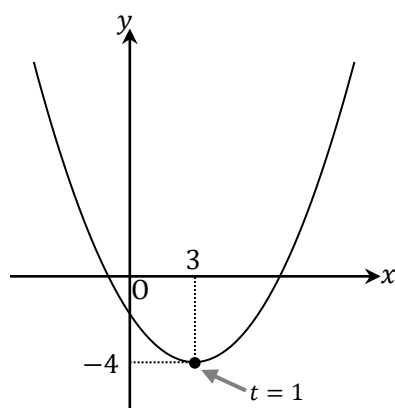
$$\frac{dx}{dt} > 0 \quad \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(t - 1)}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

これより、以下のような表をつくることができる。

t		1	
$\frac{dx}{dt}$	+	+	+
$\frac{dy}{dt}$	-	0	+
$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	+	+
(x, y)	$\searrow$	$(3, -4)$	$\nearrow$

これより、グラフは下のようになる。



(表の見方)

(i) $t < 1$ のとき

$dx/dt > 0$ より x は増加

$dy/dt < 0$ より y は減少

$d^2y/dx^2 > 0$ より下に凸

よって最下段に $\searrow$ を記入

(ii) $t > 1$ のとき

$dx/dt > 0$ より x は増加

$dy/dt > 0$ より y も増加

$d^2y/dx^2 > 0$ より下に凸

よって最下段に $\nearrow$ を記入

ここで作るのは点の動きを表す表になります。 y 座標の増減を表していた今までの表とは異なりますので、混同しないでくださいね。



2 式よりパラメータ t を消去すると、

$$x = 2t + 1 \Leftrightarrow t = \frac{x - 1}{2} \text{ より,}$$

$$y = t^2 - 2t - 3 = \left(\frac{x - 1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x - 1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(x - 3)^2 - 4$$

よってこのグラフは頂点 $(3, -4)$ の下に凸の放物線であることが分かる。

この場合はパラメータを消去したほうが楽にグラフをかける。

例 12 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ で表されるグラフをかきなさい。

先ほどと同じ手順で進めていくが、三角関数を含むこの式は対称性、周期性を考えると、もう少し楽にかくことができる。

$x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$ とおく。

周期性

$$x(t + 2\pi) = \cos^3(t + 2\pi) = \cos^3 t = x(t)$$

$$y(t + 2\pi) = \sin^3(t + 2\pi) = \sin^3 t = y(t)$$

これより、2点 $(x(t + 2\pi), y(t + 2\pi))$, $(x(t), y(t))$ は同じ点となる。

よって、 $-\pi \leq t \leq \pi$ の範囲で考えればよい。

対称性

$$x(t + \pi) = \cos^3(t + \pi) = -\cos^3 t = -x(t)$$

$$y(t + \pi) = \sin^3(t + \pi) = -\sin^3 t = -y(t)$$

これより、2点 $(x(t + \pi), y(t + \pi))$, $(x(t), y(t))$ は原点に関して対称。

よって、 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えればよい。

$$x(-t) = \cos^3(-t) = \cos^3 t = x(t)$$

$$y(-t) = \sin^3(-t) = -\sin^3 t = -y(t)$$

これより、2点 $(x(-t), y(-t))$, $(x(t), y(t))$ は x 軸に関して対称。

よって、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えればよい。

$$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$$

$$\text{よって、} 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ のとき、} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\cos^2 t \sin t} = -\tan t$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow t = 0, \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow t = 0, \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(-\tan t)}{-3\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{3\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3\cos^4 t \sin t} > 0$$

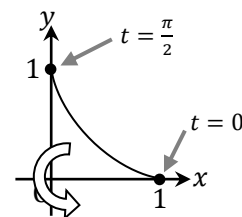
これより、右のような表をつくることができる。

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	—	0
$\frac{dy}{dt}$	0	+	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$		+	
(x, y)	(1, 0)	↖	(0, 1)

また, $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{dy}{dx} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{dy}{dx} = -\infty$ より, $x = 1$ で x 軸に,

$x = 0$ で y 軸に接するグラフとなっているので,

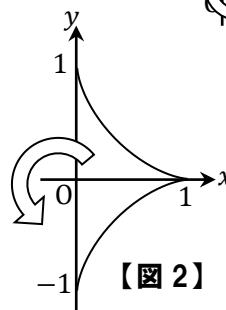
$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲のグラフは【図 1】のようになる。



【図 1】

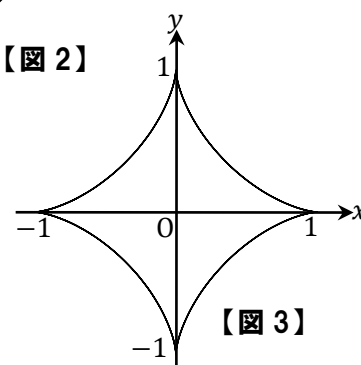
次に【図 1】のグラフを x 軸に関して対称移動させると

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲のグラフ【図 2】が表れる。



【図 2】

最後に【図 2】のグラフを原点に関して対称移動させると
全体のグラフ【図 3】が表れる。

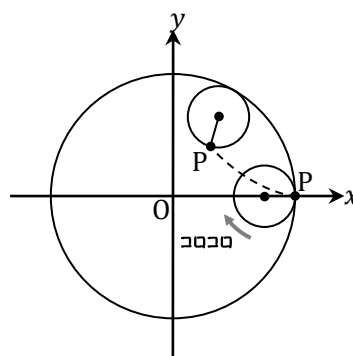


【図 3】

ちなみに, このグラフはパラメータを消去すると

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Leftrightarrow (\cos^3 t)^{\frac{2}{3}} + (\sin^3 t)^{\frac{2}{3}} = 1 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

と表すことができる。



これはアステロイド曲線と呼ばれます。定円 D の内接円 C が, 滑らずに回転したときの C 上の点 P の軌跡で, 円 D と円 C の半径の比は $4:1$ ので, この曲線になります。



練習問題

6. 次の関数のグラフをかきなさい。

(1) $\begin{cases} x = \sin \theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (a > 0)$

例題 20 次の曲線の漸近線を求めなさい。

$$(1) \quad y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$(2) \quad y = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$$

練習 20 次の曲線の漸近線を求めなさい。

$$(1) \quad y = \frac{2x^2 + 3}{x - 1}$$

$$(2) \quad y = x - \sqrt{x^2 - 9}$$

例題 21 関数 $y = (-x + 1)e^{-x+1}$ のグラフの概形をかきなさい。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ である。

練習 21 次の関数のグラフの概形をかきなさい。また、変曲点があればそれを求めなさい。ただし、(3), (5)

では $0 \leq x \leq 2\pi$ とする。また、(2)では $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ を用いてよい。

$$(1) \quad y = x - 2\sqrt{x}$$

$$(2) \quad y = (x^2 - 1)e^x$$

$$(3) \quad y = x + 2 \cos x$$

$$(4) \quad y = \frac{x-1}{x^2}$$

$$(5) \quad y = e^{-x} \cos x$$

$$(6) \quad y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$$

例題 22 関数 $y = 4 \cos x + \cos 2x$ ($-2\pi \leq x \leq 2\pi$) のグラフの概形をかきなさい。

練習 22 次の関数のグラフの概形をかきなさい。ただし、(2)ではグラフの凹凸を調べなくてよい。

$$(1) \quad y = e^{\frac{1}{x^2-1}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{3} \sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

例題 23 方程式 $y^2 = x^2(8 - x^2)$ が定める x の関数 y のグラフの概形をかきなさい。

練習 23 次の方程式が定める x の関数 y のグラフの概形をかきなさい。

$$(1) \quad y^2 = x^2(x + 1)$$

$$(2) \quad x^2 y^2 = x^2 - y^2$$

例題 24 曲線 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) の概形をかきなさい(凹凸を調べなくてよい)。

練習 24 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする。次の式で表された曲線の概形をかきなさい(凹凸を調べなくてよい)。

$$(1) \quad x = \sin \theta, \quad y = \cos 3\theta$$

$$(2) \quad x = (1 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

§5 関数の最大・最小

今までのようにグラフの増減を調べるだけではなく、§4 で述べたような注意点も意識しておく必要がある。

例 13 関数 $y = \frac{2x-2}{x^2+3}$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めなさい。

$$y' = \frac{2(x^2+3) - (2x-2) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-2(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1, 3$$

これより，増減表は右のようになる。

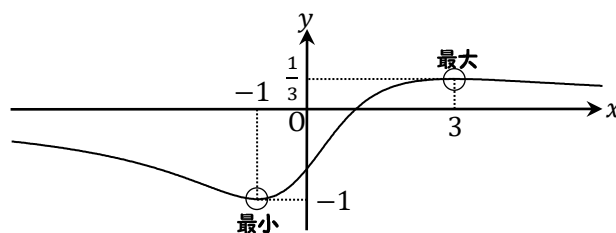
x	...	-1	...	3	...
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-2}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = 0 \text{ より, } x \text{ 軸が漸近線となる。}$$



このグラフは漸近線を調べないと，最大・最小が分かりません。増減表のみで判断しないように注意しましょう。

以上より，最大値 $\frac{1}{3}$ ($x = 3$)，最小値 -1 ($x = -1$)



例題 25 関数 $y = \sqrt{4-x^2} - x$ の最大値と最小値を求めなさい。

練習 25 次の関数の最大値，最小値を求めなさい。(1)，(2)では $0 \leq x \leq 2\pi$ とする。

(1) $y = \sin 2x + 2 \sin x$

(2) $y = \sin x + (1-x) \cos x$

(3) $y = x + \sqrt{1-4x^2}$

(4) $y = (x^2-1)e^x \quad (-1 \leq x \leq 2)$

例題 26 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めなさい。ただし，(2)では必要ならば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0 \text{ は用いてもよい。}$$

(1) $y = \frac{2x}{x^2+4}$

(2) $y = (3x-2x^2)e^{-x}$

練習 26 次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めなさい。

(1) $y = \frac{x^2-3x}{x^2+3}$

(2) $y = e^{-x} + x - 1$

例題 27 関数 $y = e^x\{2x^2 - (p+4)x + p+4\}$ ($-1 \leq x \leq 1$) の最大値が 7 であるとき、正の定数 p の値を求めなさい。

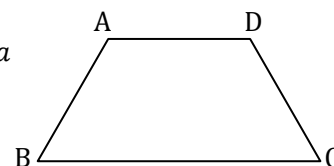
練習 27 関数 $f(x) = \frac{a \sin x}{\cos x + 2}$ ($0 \leq x \leq \pi$) の最大値が $\sqrt{3}$ となるように定数 a の値を定めなさい。

例題 28 a, b は定数で、 $a > 0$ とする。関数 $f(x) = \frac{x-b}{x^2+a}$ の最大値が $\frac{1}{6}$ 、最小値が $-\frac{1}{2}$ であるとき、 a, b の値を求めなさい。

練習 28 関数 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ ($a > 0$) について、次のものを求めなさい。

- (1) $f'(x) = 0$ となるような x の値
- (2) (1)で求めた x の値を α, β ($\alpha < \beta$) とするとき、 β と 1 の大小関係
- (3) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値が 1 であるとき、 a の値

例題 29 a を正の定数とする。台形 ABCD が $AD \parallel BC$, $AB = AD = CD = a$, $BC > a$ を満たしているとき、台形 ABCD の面積 S の最大値を求めなさい。



練習 29 3点 $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と点 Q が、条件 $OQ = AQ = PQ$ を満たす。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。

- (1) 点 Q の座標を求めなさい。
- (2) 点 Q の y 座標の最小値とそのときの θ の値を求めなさい。

例題 30 半径 1 の球に、側面と底面で外接する直円錐を考える。この直円錐のうち、体積が最小となるものの底面の半径と高さの比を求めなさい。

練習 30 空間の点 $A(1, 1, 0)$, $B(1, -1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(-1, 1, 0)$, $E(1, 0, 1)$, $F(-1, 0, 1)$ を頂点とする三角柱を含み、原点を中心とする xy 平面上の円を底面とする直円錐を考える。このような直円錐の体積の最小値と、そのときの底面の半径 r を求めなさい。

§ 6 方程式・不等式

例 14 a を実数の定数とするとき、方程式 $\log x = ax$ の解の個数を調べなさい。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてもよい。

まずは、接線の方程式を用いて個数を調べます。

解① $y = \log x$ の原点から引いた接線の方程式を求める。

接点の座標を $(t, \log t)$ とすると、

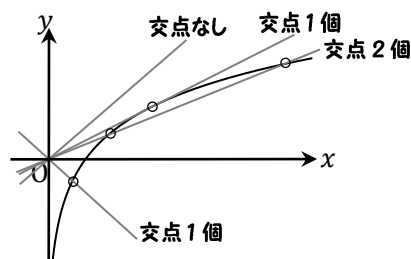
$$y' = \frac{1}{x} \text{ より、接線の方程式は、} y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

これが原点を通るので、 $\log t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = e$

よって、接線の方程式は $y = \frac{1}{e}x$

方程式 $\log x = ax$ の解の個数と、 $y = ax$ と $y = \log x$ の交点の個数は一致するので、

$$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{e} \text{ のとき、2 個} \\ a = \frac{1}{e}, a \leq 0 \text{ のとき、1 個} \\ a > \frac{1}{e} \text{ のとき、0 個} \end{cases}$$



次に定数分離を用いて解きます。

解② $x \neq 0$ より、

方程式 $\log x = ax$ の解と $\frac{\log x}{x} = a$ の解は等しい。

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ とおくと、} f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$$

真数条件より $x > 0$ なので、増減表は右ようになる。

x	0		e	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

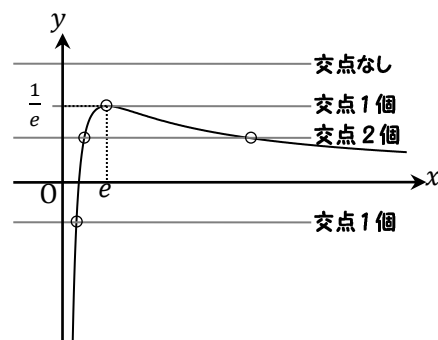
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty \text{ より、}$$

x 軸、 y 軸が漸近線となるので、グラフは右図。

方程式 $\log x = ax$ の解の個数と、 $y = a$ と $y = \frac{\log x}{x}$ の交点の

個数は一致するので、解の個数は

$$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{e} \text{ のとき、2 個} \\ a = \frac{1}{e}, a \leq 0 \text{ のとき、1 個} \\ a > \frac{1}{e} \text{ のとき、0 個} \end{cases}$$



例題 31 a は定数とする。方程式 $ax = 2 \log x + \log 3$ の実数解の個数について調べなさい。

ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてもよい。

練習 01 (1) k を定数とするとき、 $0 < x < 2\pi$ における方程式 $\log(\sin x + 2) - k = 0$ の実数解の個数を調べなさい。

(2) 方程式 $e^x = ax$ (a は定数) の実数解の個数を調べなさい。

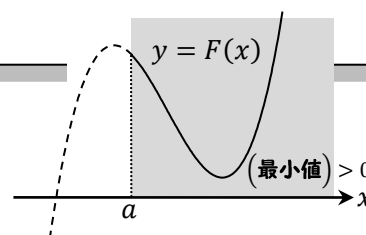
例題 32 $f(x) = -e^x$ とする。実数 b に対して、点 $(0, b)$ を通る曲線 $y = f(x)$ の接線の本数を求めなさい。

ただし、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ を用いてもよい。

練習 02 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2 \log|x|$ とする。実数 a に対して、曲線 $y = f(x)$ の接線のうちで傾きが a と等しくなるようなものの本数を求めなさい。

例 15 $x > 0$ のとき, $\sqrt{x} > \log x$ を示しなさい。

不等式 $f(x) > g(x)$ を証明するには, $F(x) = f(x) - g(x)$ の **最小値が正**であることを示します。結局, 不等式の問題は最大・最小の問題に帰着するわけです。



$$f(x) = \sqrt{x} - \log x \text{ とおくと, } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

これより, 増減表は右のようになり, $x = 4$ のとき最小となる。

$$f(4) = 2 - 2\log 2 = 2(1 - \log 2)$$

$$2 < e \text{ より, } \log 2 < 1 \text{ となるので, } f(4) > 0$$

よって, $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \log x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \log x$ となり, 成立する。

x	0	...	4	...
$f'(x)$	/	-	0	+
$f(x)$	/	↘	最小	↗

例 16 $x > 1$ のとき, $\frac{1}{2}\log x > \frac{x-1}{x+1}$ を示しなさい。

この問題も先ほどと同様に, $F(x) = f(x) - g(x)$ のグラフの変化を調べますが, 最小値は存在しません。ここでは, 単調性に注目して証明していきます。

$$f(x) = \frac{1}{2}\log x - \frac{x-1}{x+1} \text{ とおく。}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)^2}$$

$x > 1$ で $f'(x) > 0$ となるので, $f(x)$ は $x \geq 1$ において単調増加。…(*)

$$\text{よって, } x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 0$$

$$\text{以上より, } \frac{1}{2}\log x - \frac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log x > \frac{x-1}{x+1} \text{ となり, 成立する。}$$

x	1	...
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	↗

(*) 部分について

解答中の(*)部分を, 『 $x \geq 1$ で単調増加』ではなく『 $x > 1$ で単調増加』としてしまうと誤りである。なぜなら, 『 $x > 1$ で単調増加』とすると,

$$\text{1より大きい2数 } a, b \text{ に対して, } a < b \text{ ならば } f(a) < f(b)$$

ということになってしまい, 1を比較対象として使えないからである。

解答のように『 $x \geq 1$ で単調増加』とすると,

$$\text{1以上の2数 } a, b \text{ に対して, } a < b \text{ ならば } f(a) < f(b)$$

となるので, 1を比較対象として使えて, 『 $x > 1$ ならば $f(x) > f(1)$ 』となるのである。

例 17 $x > 0$ のとき, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ を示しなさい。

例 16 と同様にグラフの単調性から証明をしていきますが, 今回は $f'(x)$ の式からは, 正負の判断は難しそうです。そこで, ここでは $f''(x)$ まで調べていきます。

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \text{ とおく。}$$

$$f'(x) = e^x - 1 - x, \quad f''(x) = e^x - 1$$

$x > 0$ で $f''(x) > 0$ となるので, $f'(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加。

$$\text{よって, } x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0$$

これより, $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加。

$$\text{よって, } x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$$\text{以上より } x > 0 \text{ において, } e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

となり, 成立する。

この結果を用いると, 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を示すことができる。

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ より, } 0 < \frac{1}{e^x} < \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

$$x > 0 \text{ のとき, } 0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}} = 0 \text{ より, はさみうちの原理から } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

例題 33 $x > 0$ のとき, 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$(1) \quad \log(1+x) < \frac{1+x}{2}$$

$$(2) \quad x^2 + 2e^{-x} > e^{-2x} + 1$$

練習 30 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$(1) \quad \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad (x > 0)$$

$$(2) \quad e^x < 1 + x + \frac{e}{2}x^2 \quad (0 < x < 1)$$

$$(3) \quad e^x > x^2 \quad (x > 0)$$

$$(4) \quad \sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x > 0)$$

例題 34 (1) 不等式 $e^x > 1 + x$ が成り立つことを示しなさい。ただし、 $x \neq 0$ とする。

(2) 0 でない実数 x に対して、 $|x| < n$ となる自然数 n をとると、不等式

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

が成り立つことを示しなさい。

練習 34 (1) $x \geq 1$ において、 $x > 2 \log x$ が成り立つことを示しなさい。ただし、自然対数の底 e について、 $2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい。

(2) 自然数 n に対して、 $(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$ が成り立つことを示しなさい。

例題 35 $0 < a < b < 2\pi$ のとき、不等式 $b \sin \frac{a}{2} > a \sin \frac{b}{2}$ が成り立つことを証明しなさい。

練習 35 実数 a, b が $0 < a < b < 1$ を満たすとき、 $\frac{2^a - 2a}{a - 1}$ と $\frac{2^b - 2b}{b - 1}$ の大小を比較しなさい。

例題 36 $0 < a < b$ のとき、不等式 $\sqrt{ab} < \frac{b - a}{\log b - \log a} < \frac{a + b}{2}$ が成り立つことを示しなさい。

練習 36 $a > 0, b > 0$ のとき、不等式 $b \log \frac{a}{b} \leq a - b \leq a \log \frac{a}{b}$ が成り立つことを証明しなさい。

例題 37 すべての正の数 x に対して、不等式 $kx^2 \geq \log x$ が成り立つような定数 k のうちで最小のものを求めなさい。

練習 37 a を正の定数とする。不等式 $a^x \geq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めなさい。

(極限が関連する問題)

例題 38 関数 $f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}$ ($x > 0$) について、 n を自然数とし、点 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線

を l_n とする。放物線 $y = \frac{(-1)^n \pi}{2} x^2$ と直線 l_n の交点の座標を (a_n, b_n) (ただし、 $a_n > 0$) とするとき

- (1) a_n を n を用いて表しなさい。
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n|b_n|$ を求めなさい。

練習 39 関数 $f(x) = e^{-x} \sin \pi x$ ($x > 0$) について、曲線 $y = f(x)$ と x 軸の交点の x 座標を、小さい方から順に $x_1, x_2, x_3, \dots$ とし、 $x = x_n$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の y 切片を y_n とする。

- (1) y_n を n を用いて表しなさい。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{k}$ の値を求めなさい。

例題 39 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ ($x > 0$) について、 $f(x)$ が極大値をとる x の値を小さい方から順に $x_1, x_2, \dots$ とすると、数列 $\{f(x_n)\}$ は等比数列であることを示しなさい。また、 $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ を求めなさい。

練習 40 関数 $f(x) = e^{-x} \cos x$ ($x > 0$) について、 $f(x)$ が極小値をとる x の値を小さい方から順に $x_1, x_2, \dots$ とすると、数列 $\{f(x_n)\}$ は等比数列であることを示しなさい。また、 $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ を求めなさい。

例題 40 $0 < x < \pi$ のとき、不等式 $x \cos x < \sin x$ が成り立つことを示しなさい。

そして、これを用いて、 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \sin x}{x^2}$ を求めなさい。

練習 40 (1) $x \geq 3$ のとき、不等式 $x^3 e^{-x} \leq 27e^{-3}$ が成り立つことを示しなさい。更に、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$ を求めなさい。

(2) $f(x) = \frac{x e^{-\frac{x}{2}}}{\log 2}$ とする。ただし、 $\sqrt{e} < 2$ を用いてもよい。

(ア) $x > 4 \log 2$ のとき、 $f(x) < 1$ であることを示しなさい。

(イ) (ア)の結果を用いて、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$ を求めよ。

MEMO

§ 7 近似式

ここでは微分係数の定義式を用いて、近似値を計算する方法を学んでいく。

微分係数の定義から

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

が成立しているので、 h が限りなく 0 に近いときは

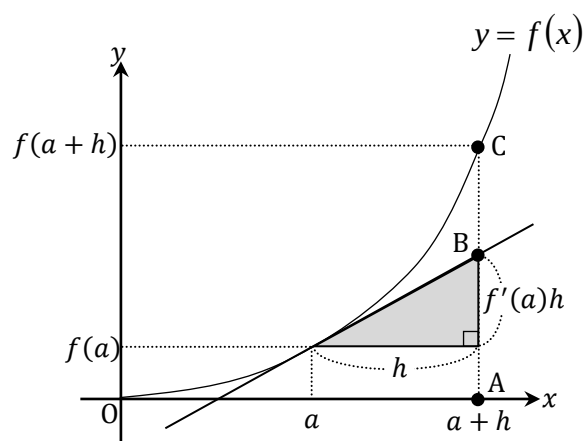
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \doteq f'(a)$$

と考えてもよい。さらに、この式を変形すると

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

①式は、 $AB = f(a) + f'(a)h$ 、 $AC = f(a+h)$ より、 h が 0 に近づくとこの 2 つの長さがほぼ一致することを表している。



それでは、これを利用して三角比の値の近似値を計算してみよう。

例 18 $\sin 61^\circ$ の近似値を求めなさい。

$(\sin x)' = \cos x$ より、 $\sin(a+h) \doteq \sin a + h \cos a$

よって、 $\sin 61^\circ = \sin(60^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) \doteq \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{3}$

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660 \dots$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{\pi}{180} = 0.0174 \dots$ より

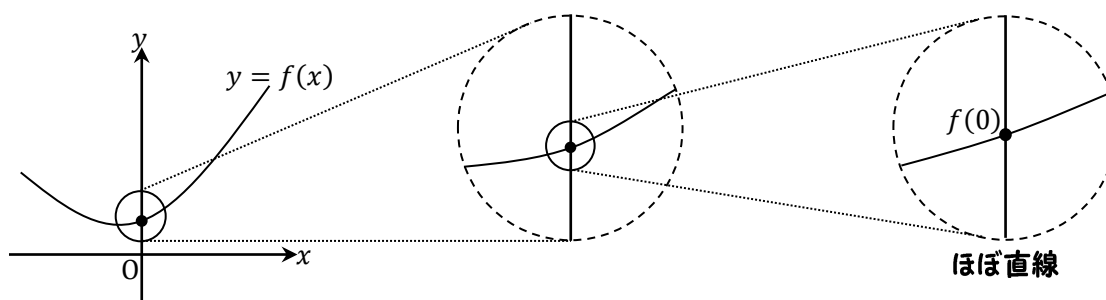
$\sin 61^\circ \doteq 0.8660 + 0.0174 \times 0.5 = 0.8747$

実際の値は
 $\sin 61^\circ = 0.8746197071 \dots$
 なのでかなり正確な値ですね。



また、①式は $a = 0$ 、 $h = x$ とすると $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x \quad \cdots \textcircled{2}$ と表すことができる。

これは関数 $y = f(x)$ の $x = 0$ 付近を拡大していったときに表れる直線の式が $y = f'(0)x + f(0)$ となることをいっている。つまり、このグラフは $x = 0$ 付近で直線 $y = f'(0)x + f(0)$ に近似することができるということである。



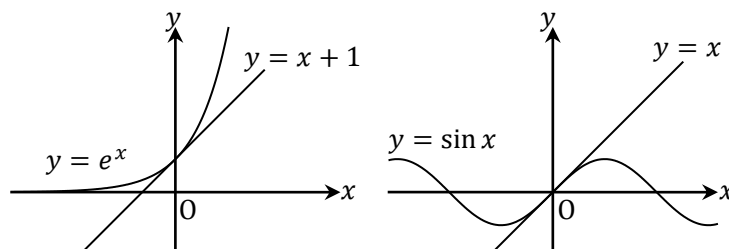
例 19 $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$ の $x = 0$ の周りの近似式を求めなさい。

$f'(x) = e^x$ より

$$e^x \doteq f'(0)x + f(0) = x + 1$$

$g'(x) = \cos x$ より

$$\sin x \doteq g'(0)x + g(0) = x$$



①, ②の式は h または x の 1 次式で近似していることから, **1 次近似式** という。

例題 41 (1) $|x|$ が十分小さいとき, $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$ の 1 次の近似式を作りなさい。

(2) $\sin(a+h)$ の 1 次の近似式を用いて, $\sin 59^\circ$ の近似値を求めなさい。ただし, $\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$ として小数第 2 位まで求めなさい。

練習 41 (1) $|x|$ が十分小さいとき, 次の関数の 1 次の近似式を作りなさい。

(ア) $f(x) = \log(1+x)$

(イ) $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$

(2) 1 次の近似式を用いて, 次の数の近似値を求めよ。ただし, $\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$ として小数第 2 位まで求めなさい。

(ア) $\cos 61^\circ$

(イ) $\sqrt[3]{340}$

(ウ) $\sqrt{1+\pi}$

§ 8 速度・加速度

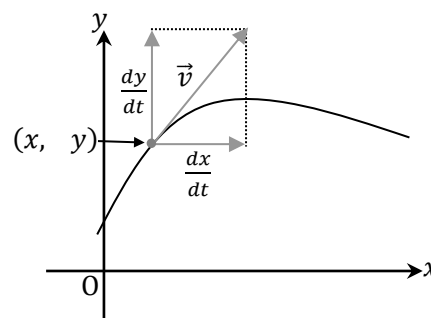
平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を (x, y) が, $x = f(t)$, $y = g(t)$ で表されるとき, 点 P はある曲線上を動く。このとき, 点 P の速度・加速度は次のように表すことができる。

速度 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$

速さ $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$

加速度 $\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$

加速度の大きさ $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2}$



例19 数直線上を運動する点 P の x 座標が, 時刻 t の関数として $x = 2 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ で表されるとき, $t = 1$ における速度, 加速度を求めなさい。

$$\frac{dx}{dt} = 2\pi \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots \textcircled{1}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -2\pi^2 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

速度は①に $t = 1$ を代入すればよいので $2\pi \cos \frac{2\pi}{3} = -\pi$

加速度は②に $t = 1$ を代入すればよいので $-2\pi^2 \sin \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}\pi^2$

例題 42 (1) 数直線上を運動する点 P の座標 x が, 時刻 t の関数として, $x = 2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ と表されるとき,

$t = \frac{2}{3}$ における速度 v と加速度 a を求めなさい。

(2) 座標平面上を運動する点 P の, 時刻 t における座標が次の式で表されるとき, 点 P の速さと加速度の大きさを求めなさい。

$$x = 3 \sin t + 4 \cos t, \quad y = 4 \sin t - 3 \cos t$$

練習 42 (1) 原点を出発して数直線上を動く点 P の座標が, 時刻 t の関数として, $x = t^3 - 10t^2 + 24t$ ($t > 0$) で表されるという。点 P が原点に戻ったときの速度 v と加速度 a を求めなさい。

(2) 座標平面上を運動する点 P の, 時刻 t における座標が $x = 4 \cos t$, $y = \sin 2t$ で表されるとき,

$t = \frac{\pi}{3}$ における点 P の速さと加速度の大きさを求めなさい。

例題 43 動点 P が、原点 O を中心とする半径 r の円周上を、定点 P_0 から出発して、 OP が 1 秒間に角 ω の割合で回転するように等速円運動をしている。

- (1) P の速度の大きさ v を求めなさい。
- (2) P の速度ベクトルと加速度ベクトルは垂直であることを示しなさい。

練習 43 (1) 動点 P が、原点 O を中心とする半径 r の円周上を、定点 P_0 から出発して OP が 1 秒間に角 ω の割合で回転するように等速円運動をしている。 P の加速度の大きさを求めなさい。

- (2) $a > 0$, $\omega > 0$ とする。座標平面上を運動する点 P の、時刻 t における座標が $x = a(\omega t - \sin \omega t)$, $y = a(1 - \cos \omega t)$ で表されるとき、加速度の大きさは一定であることを示しなさい。

例題 44 曲線 $xy = 4$ 上の動点 P から y 軸に垂線 PQ を引くと、点 Q が y 軸上を毎秒 2 の速度で動くように点 P が動くという。点 P が点 $(2, 2)$ を通過するときの速度と加速度を求めなさい。

練習 44 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($x > 0$, $y > 0$) 上の動点 P が一定の速さで 2 で x 座標が増加する向きに移動している。 $x = \sqrt{3}$ における速度と加速度を求めなさい。

例題 45 底面の半径が 5cm、高さが 10cm の直円錐状の容器を逆さまに置く。この容器に $2 \text{ cm}^3/\text{s}$ の割合で静かに水を注ぐ。水の深さが 4cm になる瞬間において、次のものを求めなさい。

- (1) 水面の上昇する速さ
- (2) 水面の面積の増加する割合

練習 45 表面積が $4\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ の一定の割合で増加している球がある。半径が 10cm になる瞬間において、以下のものを求めなさい。

- (1) 半径の増加する速度
- (2) 体積の増加する速度

例題 46 $\triangle ABC$ で、 $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = \sqrt{3} \text{ cm}$, $\angle B = 30^\circ$ とする。 $\angle B$ が 1° だけ増えたとき、次のものは、ほぼどれだけ増えるか。ただし、 $\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$ とする。

- (1) $\triangle ABC$ の面積 S
- (2) 辺 CA の長さ y

練習 46 (1) 球の体積 V が 1% 増加するとき、球の半径 r と球の表面積 S は、それぞれ約何% 増加するか。
 (2) $AD \parallel BC$ の等脚台形 $ABCD$ において、 $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$, $\angle B = 60^\circ$ とする。 $\angle B$ が 1° だけ増えたとき、台形 $ABCD$ の面積 S は、ほぼどれだけ増えるか。ただし、 $\pi = 3.14$ とする。