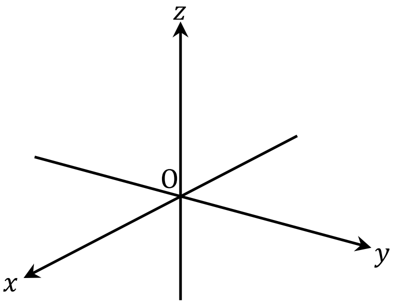
空 間 ベ ク ト ル

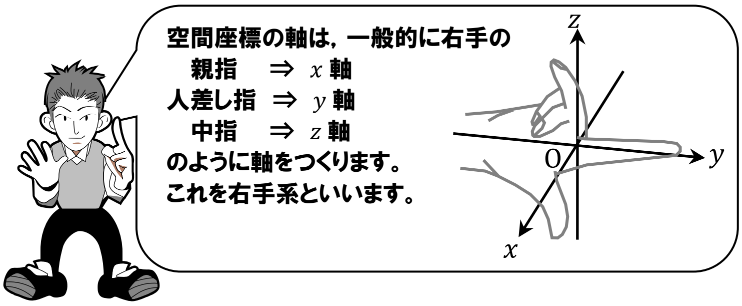
§1　空間座標

　ここでは空間におけるベクトルを学んでいきます。今までとの違いは，ベクトルを扱う舞台が 2 次元から 3 次元に拡張されただけで，基本的には『平面ベクトル』で学んだことの繰り返しになります。

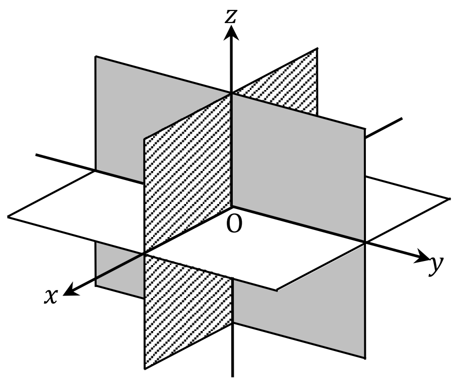
○　空間座標

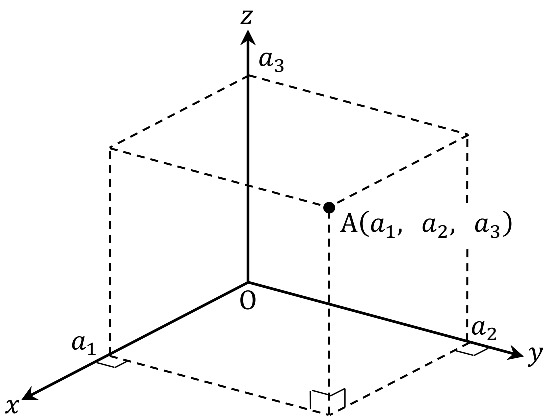
　今まで扱ってきた平面の座標は x 軸，y 軸の 2 本の軸で構成されていましたが，空間の座標は x 軸，y 軸，z 軸の 3 本の座標軸によって定められます。





また，x 軸，y 軸によって定められる平面を xy 平面(　面)，
y 軸，z 軸によって定められる平面を yz 平面(　面)，
z 軸，x 軸によって定められる平面を zx 平面(　面)という。





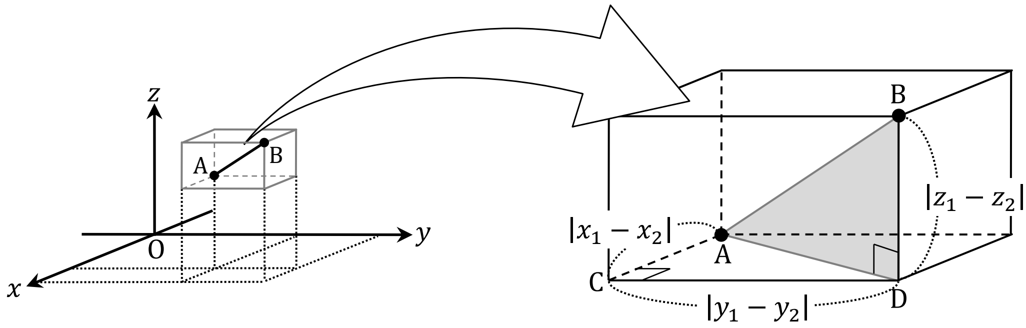
この空間内に任意の点 A を，左図のようにとるとき，
この点の座標は 3 つの数字を使って

$$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

と表すことができる。

○　２点間の距離

この空間内に２点 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$，B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$ をとるとき，AB 間の距離を考える。
これは２点 AB を対角線とし，各辺が各座標軸に平行な直方体を考えるとよい。



AC $= |x_1 - x_2|$，CD $= |y_1 - y_2|$，DB $= |z_1 - z_2|$ より，△ACD において三平方の定理を用いると

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{CD}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

さらに，△ADB において三平方の定理を用いると

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

よって，AB $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

２点間の距離

２点 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$，B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離は

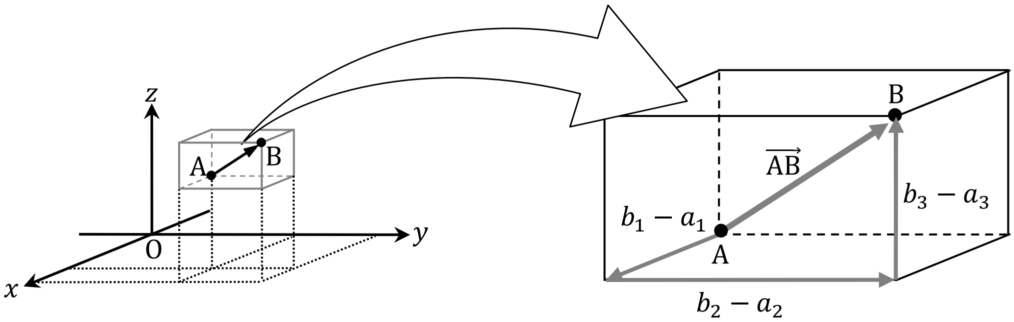
$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

§2　空間ベクトル

空間内に２点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ をとるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は

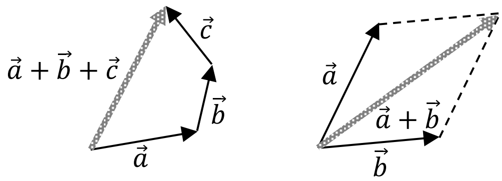
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。



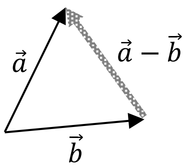
○　成分による演算

演算の方法自体は平面のときと同様に考える。



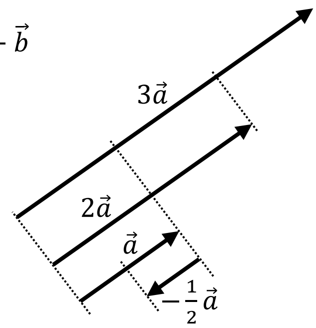
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき，２つのベクトルの

和，差，スカラー倍は次のようになる。



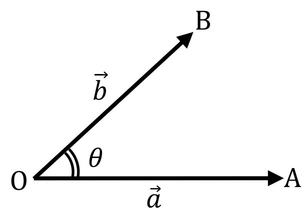
和差　$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$　（復号同順）

スカラー倍　$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$　（k は実数）



○　ベクトルの内積

平面のときと同様，ベクトルの内積は $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ で定義される。



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき，内積の成分表示は，以下のようになる。

内積の成分表示

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

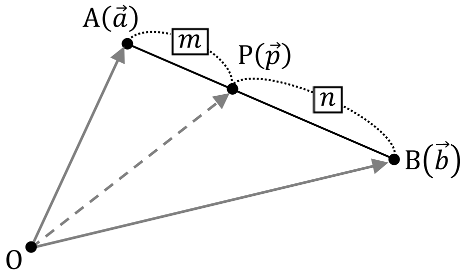
証明に関しては平面のときとほぼ同じである。

§3　位置ベクトル

空間内にある点Aが $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ によって定まるとき，このベクトル $\vec{a}$ を点Aの**位置ベクトル**という。位置ベクトルが $\vec{a}$ である点Aを $\mathrm{A}(\vec{a})$ と表す。

○　分点の位置ベクトル

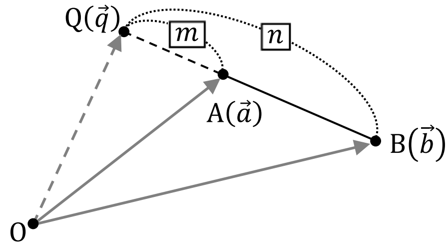
分点の位置ベクトルは平面のときと同様に，以下のように表せる。



分点の位置ベクトル

2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分ABを $m:n$ に内分する点 $\mathrm{P}(\vec{p})$，外分する点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ の位置ベクトル

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n},\quad \vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$



なお，中点の位置ベクトルは $m:n=1:1$ のときなので $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ となる。

また，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ として，成分表示することで内分点P，外分点Q，中点Mの座標が以下のように求まる。

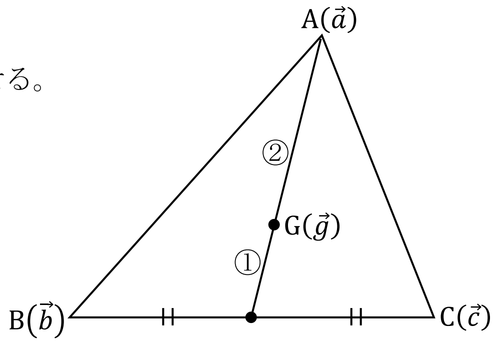
$$\mathrm{P}\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n},\ \frac{na_2 + mb_2}{m+n},\ \frac{na_3 + mb_3}{m+n}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{-na_1 + mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2 + mb_2}{m-n},\ \frac{-na_3 + mb_3}{m-n}\right)$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{a_1 + b_1}{2},\ \frac{a_2 + b_2}{2},\ \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

○　重心の位置ベクトル

重心の位置ベクトルも平面のときと同様に，以下のように表せる。



重心の位置ベクトル

3点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ に対して△ABCの重心Gの位置ベクトル $\vec{g}$ は次のようになる。

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

また，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ として，成分表示することで重心Gの座標が以下のように求まる。

$$\mathrm{G}\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3},\ \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3},\ \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right)$$

○ 1次独立

同一平面上にない 3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ $\left(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{c}\neq\vec{0}\right)$ について，以下のことが成り立つ。

1次独立なベクトル

空間内の任意のベクトル $\vec{x}$ は $\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形で与えることができ，その表し方は**ただ1通り**である。

このとき，3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は**1次独立**であるという。

証明①

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

点Pを通り，OCに平行な直線と，平面OABとの交点をP′とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\overrightarrow{\mathrm{P'P}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+u\vec{c}\quad(u\text{ は実数})$$

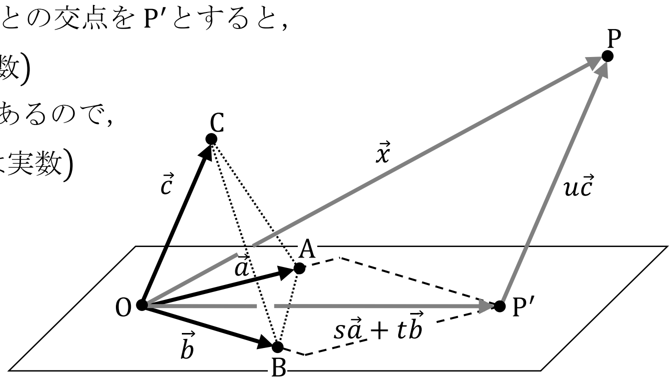
とおける。4点O，A，B，P′は同一平面上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad(s,\ t\text{ は実数})$$

となるので，

$$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$

と表すことができ，さらに，s，t の選び方はただ1通りに定まる。



証明②（**表し方が1通りであること**）

$\vec{x}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて2通りに表せたと仮定する。

つまり，

$$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c}$$

と表せたとする。

この2つの表示が異なるので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の少なくとも1つは異なる。

今，それを $s\neq s'$ とすると，

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c}\iff(s-s')\vec{a}=(t'-t)\vec{b}+(u'-u)\vec{c}$$

$$\iff\vec{a}=\frac{t'-t}{s-s'}\vec{b}+\frac{u'-u}{s-s'}\vec{c}\quad(\because s-s'\neq 0)$$

これは，$\vec{a}$ が $\vec{b}$，$\vec{c}$ と同一平面上にあることになり矛盾する。

よって，表し方は1通りとなる。

これより，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が1次独立であるとき，

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c}\iff s=s',\ t=t',\ u=u'$$

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0}\iff s=0,\ t=0,\ u=0$$

が成り立つことが分かる。

逆に，**同一平面内に** $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ があるとき，これらは空間内の任意のベクトルを表すことができない。

($\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と同一平面上のベクトルしか表せない。)

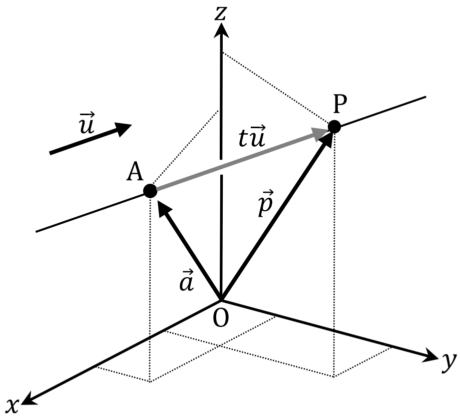
このとき，3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は**1次従属**であるという。

§4　ベクトル方程式

ここでは直線，球，平面上の任意の点を，原点からの位置ベクトルを用いて表すことを目標とする。

○　直線のベクトル方程式

①　点 A$(\vec{a})$ を通り,$\vec{u}$ に平行な直線



直線上の任意の点を P$(\vec{p})$ とすると，点 P の位置ベクトルは

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}\quad (t \text{ は実数})\quad \cdots(*)$$

と表すことができる。

$\vec{u}$ のように直線 l と平行なベクトルを**方向ベクトル**という。

直線の方程式

ここで，A$(x_0,\ y_0,\ z_0)$，P$(x,\ y,\ z)$，$\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とすると，

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}\cdots(*)$$

$(*)$ は直線の媒介変数表示である。

$(*)$ から t を消去すると，直線の方程式が得られる。

$$x=x_0+at\ \Leftrightarrow\ t=\frac{x-x_0}{a},\quad y=y_0+bt\ \Leftrightarrow\ t=\frac{y-y_0}{b},\quad z=z_0+ct\ \Leftrightarrow\ t=\frac{z-z_0}{c}$$

これより，t を消去すると，$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

空間における直線の方程式

方向ベクトルが $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ で，

点 A$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

②　2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線

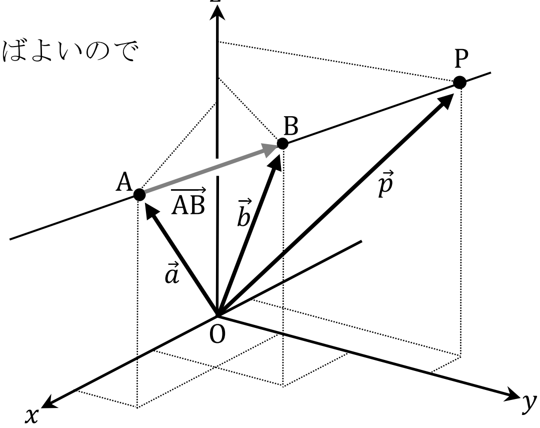
これは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ を方向ベクトルとする直線と考えればよいので

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

と表すことができる。また，$1-t=s$ とくと，

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad (s+t=1)$$

と表すこともできる。



例1　2点A(1，2，3)，B(4，5，6)を通る直線をlとする。

(1)　直線lとxy平面の交点の座標を求めなさい。

(2)　点C$(-3,\ 2,\ 1)$を通り，$\vec{u}=(1,\ 3,\ 2)$に平行な直線をmとする。2 直線l，mの交点の座標を求めなさい。

(1)　直線l上の任意の点Pとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1+3t,\ 2+3t,\ 3+3t)$$

点Pのz座標が0になるようなtの値は，$3+3t=0 \iff t=-1$

これより，直線lとxy平面の交点の座標は$(-2,\ -1,\ 0)$

(2)　直線m上の任意の点Qとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\vec{u}=(-3+s,\ 2+3s,\ 1+2s)$$

2点P，Qが一致するようなs，tの組合せを考えればよいので，

$$\begin{cases}1+3t=-3+s\\2+3t=2+3s\\3+3t=1+2s\end{cases} \iff \begin{cases}s-3t=4 & \cdots ①\\3s-3t=0 & \cdots ②\\2s-3t=2 & \cdots ③\end{cases}$$

①，②より，$(s,\ t)=(-2,\ -2)$

これは③を満たす。

よって，2直線l，mの交点の座標は$(-5,\ -4,\ -3)$

○　平面のベクトル方程式

空間内に同一直線上にない3点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$があり，この3点で定まる平面をαとする。ここではこの平面αのベクトル方程式を考える。

今，平面上の任意の点P$(\vec{p})$とすると，4点A，B，C，Pは同一平面上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad (s,\ t\text{は実数})$$

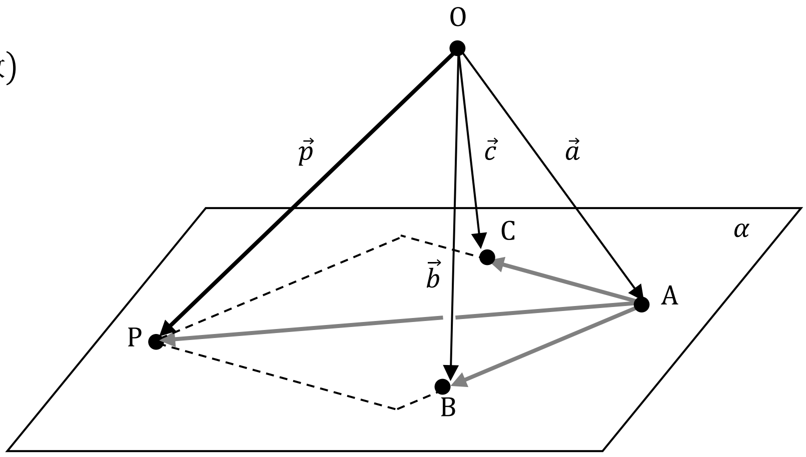
と表すことができる。

これより，
$$\begin{aligned}\vec{p}&=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\vec{a}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})\\&=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\end{aligned}$$

$1-s-t=r$とおくと，

$$\vec{p}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\quad (r+s+t=1)$$

と表すことができる。



例 2 四面体 OABC において，OA，OB の中点をそれぞれ M，N とおき，△CMN の重心を G とする。直線OG と平面 ABC の交点を H とするとき，OG : GH を求めなさい。

まずは，1 次独立の性質を使って解きます。
点 H というのは直線 OG と平面 ABC の交点なので，それぞれの図形上にある条件を立式することで，解くことができます。

解①

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{6}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{6}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$

O，G，H は同一直線上より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

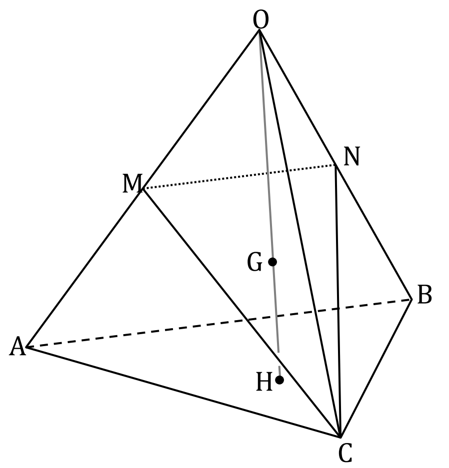
A，B，C，H は同一平面上より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(s+t+u=1\quad\cdots①)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立より，$s=\frac{k}{6}$，$t=\frac{k}{6}$，$u=\frac{k}{3}$

①に代入すると，$\frac{k}{6}+\frac{k}{6}+\frac{k}{3}=1 \iff k=\frac{3}{2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となるので，OG : GH = 2 : 1



係数を足して 1 である性質を使った方が，解答がシンプルになります。

解②

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{6}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{6}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$

O，G，H は同一直線上より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

A，B，C，H は同一平面上より，$\frac{k}{6}+\frac{k}{6}+\frac{k}{3}=1 \iff k=\frac{3}{2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となるので，OG : GH = 2 : 1

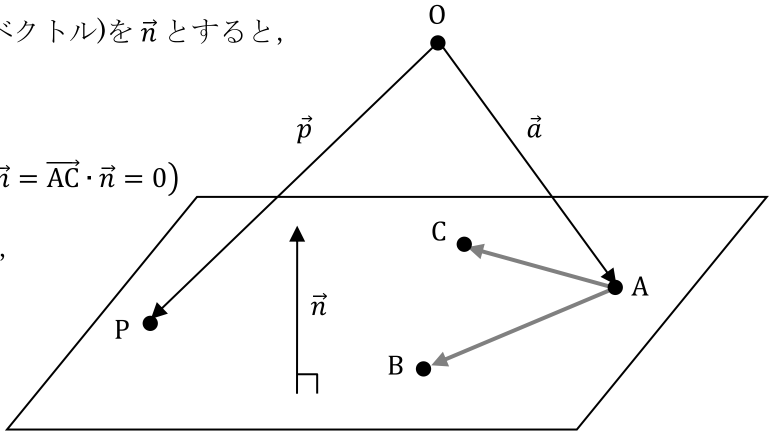
平面の方程式

平面上の任意の点 P の位置ベクトルは $\vec{p}=\vec{a}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる。
ここで，この平面の法線ベクトル(平面に垂直なベクトル)を $\vec{n}$ とすると，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{n}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0$
これより，

$$\vec{p}\cdot\vec{n}=\left(\vec{a}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}\quad\left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0\right)$$

ここで，$\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\vec{a}\cdot\vec{n}=-d$ とすると，

$$\vec{p}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}\iff ax+by+cz=-d$$
$$\iff \boxed{ax+by+cz+d=0}$$



これは法線ベクトルが $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ である**平面の方程式**となっている。

(参考)
法線ベクトルが $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
である直線の方程式
$ax+by+c=0$

平面の方程式

法線ベクトルが $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ である平面の方程式は

$$ax+by+cz+d=0$$

例 3　3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{C}(-1,\ 2,\ 0)$ を通る平面の方程式を求めなさい。

解①

求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0\quad\cdots(*)$ とおく。
3 点 A，B，C の座標を代入すると，

$a+c+d=0\ \cdots$①　　$a+2b+3c+d=0\ \cdots$②　　$-a+2b+d=0\ \cdots$③

②－① より，$2b+2c=0\iff b=-c$

②－③ より，$2a+3c=0\iff a=-\dfrac{3}{2}c$

よって①より，$d=-a-c=\dfrac{3}{2}c-c=\dfrac{1}{2}c$

以上より平面の方程式は，$(*)\iff -\dfrac{3}{2}cx-cy+cz+\dfrac{1}{2}c=0\iff 3x+2y-2z-1=0$

次に法線ベクトルを用いて，平面の方程式を求めてみます。

解②

求める平面の方程式の法線ベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルとなる。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2,\ -1)$

法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=0 \iff 2b+2c=0 \iff b=-c$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0 \iff -2a+2b-c=0$

2 式より，b を消去すると，$-2a-2c-c=0 \iff a=-\dfrac{3}{2}c$

よって，$\vec{n}=\left(-\dfrac{3}{2}c,\ -c,\ c\right) \mathbin{/\mkern-6mu/} (3,\ 2,\ -2)$

これより，求める平面の法線ベクトルは，$(3,\ 2,\ -2)$ となるので，

平面の方程式は，$3x+2y-2z+d=0$ とおける。

これが，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$ を通るので，$3-2+d=0 \iff d=-1$

以上より，求める平面の方程式は，$3x+2y-2z-1=0$

○ 点と平面の距離

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線の足を H とするとき，AH の長さを**点と平面の距離**といい，次のような関係式が成り立つ。

点と平面の距離

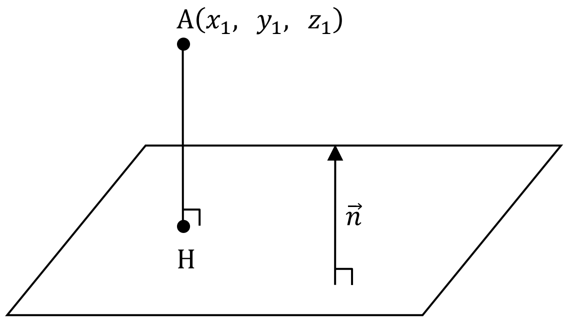
点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

（参考） 点 $(x_1,\ y_1)$ **と直線** $ax+by+c=0$ **の距離** d **は**

$$d=\frac{|ax_1+by_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

証明①



法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}=\begin{pmatrix}ka\\kb\\kc\end{pmatrix}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ka\\kb\\kc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ka\\y_1+kb\\z_1+kc\end{pmatrix}$

これより，$\mathrm{H}(x_1+ka,\ y_1+kb,\ z_1+kc)$ となる。

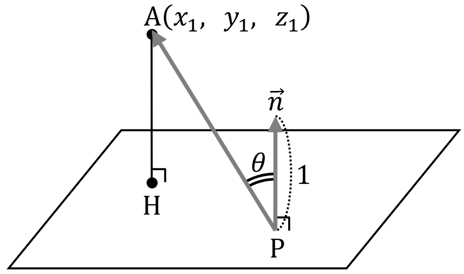
点 H は平面 $ax+by+cz+d=0$ 上より，

$$a(x_1+ka)+b(y_1+kb)+c(z_1+kc)+d=0 \iff k=-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$$

よって，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=|k\vec{n}|=|k||\vec{n}|=\left|-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

証明②（内積の性質を使うと…）



平面 $ax+by+cz+d=0$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}$ とすると，

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

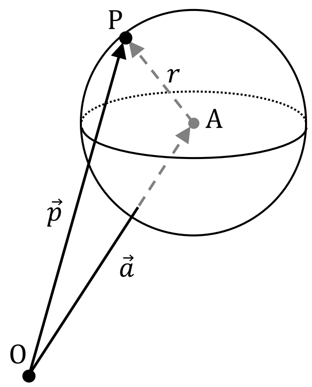
平面上に $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ をとり，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}&=\left|\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\cos\theta\right|\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\vec{n}\right|\\&=\left|\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\\z_1-z_0\end{pmatrix}\right|\\&=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1-(ax_0+by_0+cy_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|\end{aligned}$$

点 P は平面 $ax+by+cz+d=0$ 上より，$ax_0+by_0+cy_0=-d$

よって，$\mathrm{AH}=\left|\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

○　球のベクトル方程式



空間において，点 A から距離が一定である点の軌跡は**球**になる。

中心が $\mathrm{A}(\vec{a})$，半径 r の球面上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，

球のベクトル方程式は，常に $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=r$ となるので，

$$|\vec{p}-\vec{a}|=r$$

と表すことができる。

球の方程式

ここで，$\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$|\vec{p}-\vec{a}|=r \iff \left|\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}\right|=r \iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

両辺 2 乗して，$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

これは中心 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$，半径 r の**球の方程式**がとなっている。

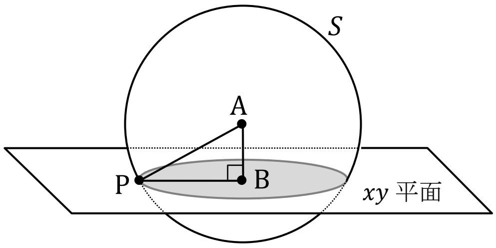
球の方程式

中心 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$，半径 r の球の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

例 4 球面 $S: x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ と xy 平面の交わりは円になる。この円の中心と半径を求めなさい。

解①



$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ より，
球面 S は中心 (1，2，3)，半径 4 の球である。
これより，切り口の円の中心は (1，2，0) となる。
A(1，2，3)，B(1，2，0) とおき，切り口の円の周上の任意の点を P とすると，$\angle\mathrm{ABP}=90°$，$\mathrm{AP}=4$，$\mathrm{AB}=3$ より，

$$\mathrm{BP}^2=\mathrm{AP}^2-\mathrm{AB}^2=4^2-3^2=7$$

よって，切り口の円の半径は，$\sqrt{7}$

xy 平面が $z=0$ という式で表されることを用いても解くことができます。

解②

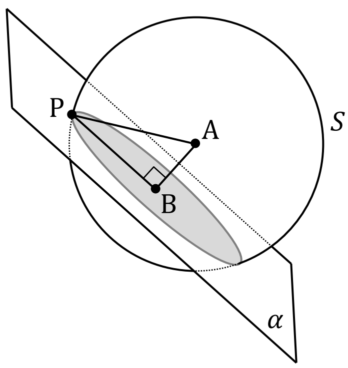
$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ に $z=0$ を代入すると，

$$x^2+y^2-2x-4y-2=0$$

これが切り口の円の方程式となる。
$(x-1)^2+(y-2)^2=7$ より，切り口は中心 (1，2，0)，円 $\sqrt{7}$ の円となる。

例 5 球面 $S: x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ と平面 $\alpha: 2x+y-z+5=0$ の交わりは円になる。この円の中心と半径を求めなさい。

本問は斜めの平面による球の切断です。先ほどより少し複雑になります。



$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ より，
球面 S は中心 (1，2，3)，半径 4 の球である。
A(1，2，3) とおき，切り口の円の中心を B，周上の任意の点を P とすると，$\angle\mathrm{ABP}=90°$，$\mathrm{AP}=4$ となる。

点と平面の距離の公式から，$\mathrm{AB}=\dfrac{|2\cdot1+2-3+5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

これより，$\mathrm{BP}^2=\mathrm{AP}^2-\mathrm{AB}^2=4^2-\left(\sqrt{6}\right)^2=10$

よって，切り口の円の半径は，$\sqrt{10}$

また，平面 α の法線ベクトルを $\vec{n}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\vec{n}=(1,\ 2,\ 3)+k(2,\ 1,\ -1)=(2k+1,\ k+2,\ -k+3)$$

よって，B$(2k+1,\ k+2,\ -k+3)$

これが，平面 α 上にあるので，

$$2(2k+1)+k+2-(-k+3)+5=0 \iff k=-1$$

よって，切り口の円の中心の座標は，B$(-1,\ 1,\ 4)$