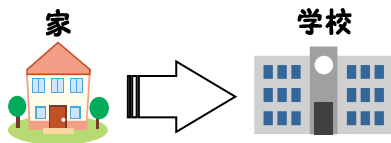
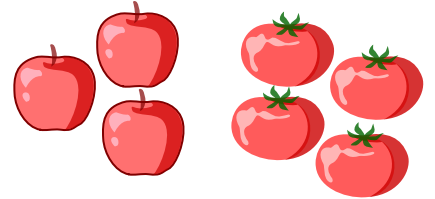


ベクトル

§0 2種類の足し算

次の2つの問題を考えてみよう。

- ① 八百屋で1個80円のトマト4個と、1個100円のりんごを3個買いました。合計でいくら支払いましたか？



- ② 家を出発して北に80m/分の速さで4分、東に100m/分の速さで3分歩くと学校につきます。今、学校は家からどれくらい離れていますか？

どちらも非常にやさしい問題ですが、実はこの2つの問題のわずかな違いが、今回のテーマと大きく関わっているのです。それではさっそく、解答を見ていきましょう。

まず1問目ですが、

$$80_{\text{円}} \times 4_{\text{個}} + 100_{\text{円}} \times 3_{\text{個}} = 620_{\text{円}}$$

これは特に問題ないでしょう。

では次に2問目です。

$$80_{\text{m/分}} \times 4_{\text{分}} + 100_{\text{m/分}} \times 3_{\text{分}} = 620_{\text{m}}$$

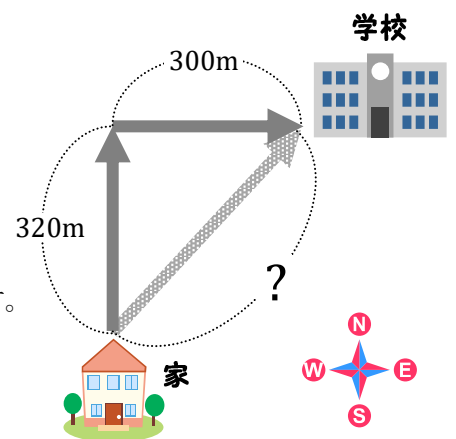
こちらの答えはどうでしょうか？正しいでしょうか？

確かに「道なりの距離」を考えるならば620mで間違いはなさそうです。しかし、「直線距離」を考えるならば、三平方の定理を利用して

$$\sqrt{300^2 + 320^2} = 20\sqrt{481} \text{ m}$$

となります。

この例を見て分かる通り、『金額の足し算』と『距離の足し算』ではその意味合いが少し異なるようです。では、具体的にいったい何が違うのでしょうか？



§ 1 ベクトルとは

『金額の足し算』と『距離の足し算』の最大の違い、それは「向き」があるのかないのかという点です。

「距離」の場合、「何 m 進んだか」ということも大切ですが、「どちらの方向に進んだか」ということも大切な要素の1つです。同じ向きに進むのであれば「金額」と同様に足しても特に問題ないのですが、北と東にそれぞれ進むのであれば、距離をどのようにとらえるのかによって答えは違ってくるというわけです。

今回扱うテーマは、このような**向きがある量**であり、この量のことを**ベクトル**といいます。
つまり、ベクトルとは

「大きさと向き」

を持つ量ということです。

ちなみに、今まで扱ってきた個数や値段などの向きがない量を**スカラー**といいます。



スカラー



ベクトル

○ ベクトルの表し方

あるものが点 A から点 B まで移動するとき、点 A から点 B に向けて矢印をひき、この矢印を記号で $\overrightarrow{AB}$ (ベクトル AB) と表す。このとき、点 A を**始点**、点 B を**終点**という。また、図において**矢印の向きが「移動の向き」、矢印の長さが「移動の大きさ」**を表す。

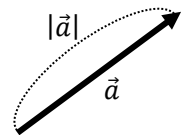
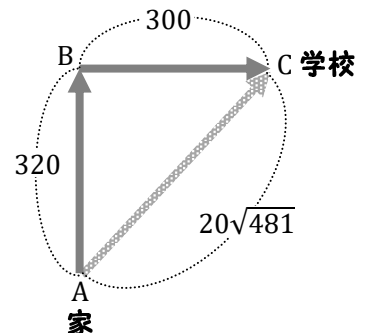
ベクトルの大きさ(矢印の長さ)を記号では $|\overrightarrow{AB}|$ と表す。

つまり、右図においては、

$$|\overrightarrow{AB}| = 320, |\overrightarrow{BC}| = 300, |\overrightarrow{AC}| = 20\sqrt{481}$$

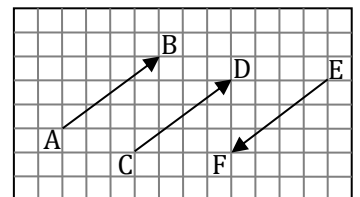
となる。

また、始点、終点が特に明記されていない場合、ひとつの文字(小文字)を用いて $\vec{a}$ と表し、このとき大きさは $|\vec{a}|$ と表す。



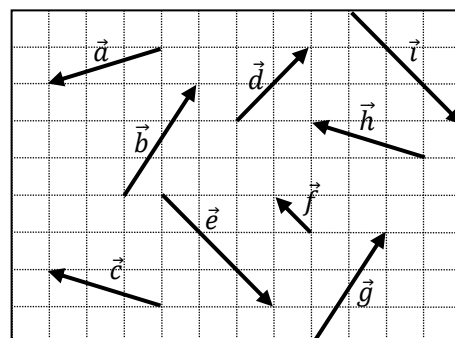
○ ベクトルの相等

ベクトルとは先ほども述べたように「大きさと向き」を持つ量なので、2つのベクトルが等しいとはこの「**大きさと向き**」が等しいということである。右図においては $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ であるが、 $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{EF}$ である。



練習1

右図にのちで等しいベクトルはどれですか。



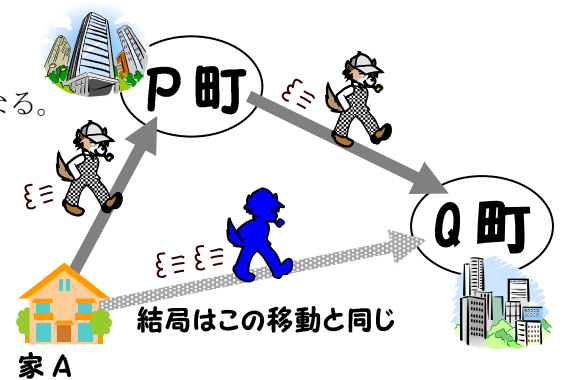
§2 ベクトルの演算

○ ベクトルの加法

家 A を出発した人が P 町にいき，そこから Q 町まで行ったとき，結局この人は家 A から Q 町まで移動したことと同じになる。このように，途中経過を考えず，**出発点と終着点のみ**を考えた移動を**ベクトルの加法**と定義し，次のように表す。

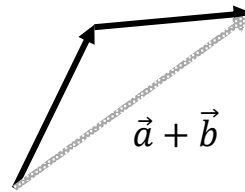
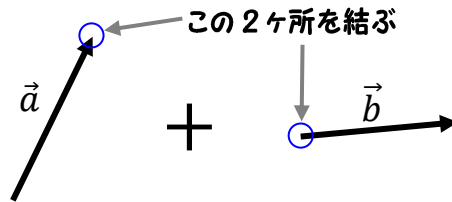
$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ}$$

2 つのベクトルの加法の考え方は次の 2 通りがある。

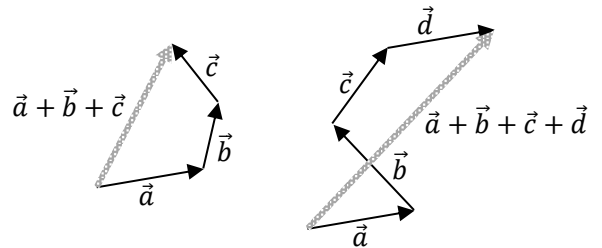


① 2 つのベクトルの始点と終点を結ぶ方法

これは先ほど使った考え方である。始点と終点を結んでいき，最終的に**出発点と終着点を結ぶ**ことでベクトルの和が得られる。

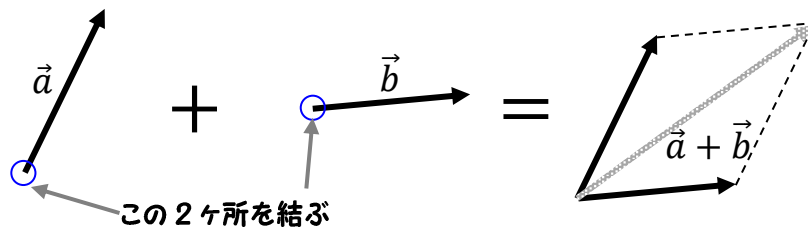


これは 3 つ，4 つとベクトルが増えたときにも簡単に和が求められるので大変便利である。



② 2 つのベクトルの始点と始点を結ぶ方法

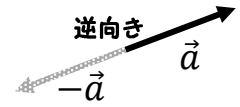
2 つのベクトルの始点同士を結び，そのときにできた**平行四辺形の対角線を結ぶ**ことでベクトルの和が得られる。



○ 零ベクトルと逆ベクトル

$\vec{a} + \vec{x} = \vec{a}$ (変わらない) となるベクトル $\vec{x}$ を **零ベクトル** といい, $\vec{x} = \vec{0}$ と表す。これは **移動量が 0** ということであり, 零ベクトルはその大きさ, 向きを考えない。

また, $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ となるベクトル $\vec{x}$ を **逆ベクトル** といい, $\vec{x} = -\vec{a}$ と表す。逆ベクトルを足すことで移動量が 0 になるということなので, 図に表すと右のように $\vec{a}$ と **逆向きの矢印** となる。

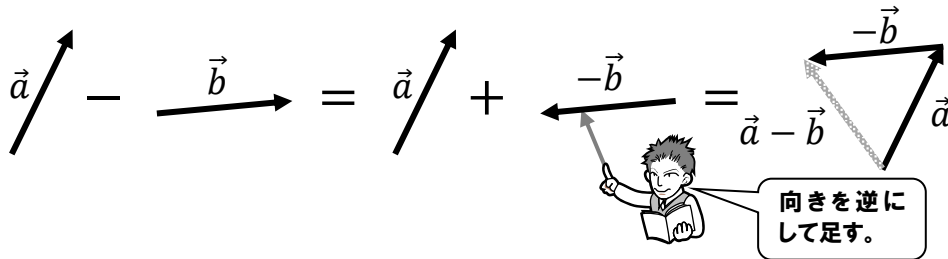


○ ベクトルの減法

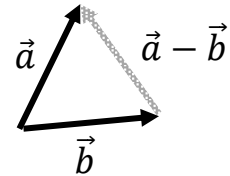
2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の減法は, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の逆ベクトル $-\vec{b}$ の和と定義する。つまり,

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

ということである。矢印で考えると次のようになる。



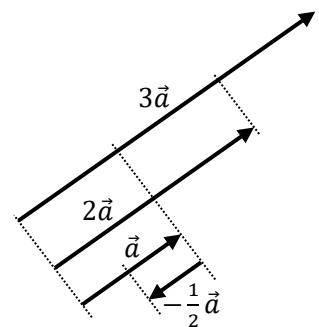
また, $\vec{a} - \vec{b}$ は2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の始点同士を結んだとき, $\vec{b}$ の終点から $\vec{a}$ の終点に向かうベクトルを表すと考えてもよいし, $\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$ と考えれば $\vec{b}$ にどのようなベクトルを足すと $\vec{a}$ になるかと考えてもよい。いずれにしても, 減法のベクトルの向きは間違えやすいので注意が必要だ。



○ ベクトルのスカラー倍

k を実数とするときベクトルのスカラー倍 $k\vec{a}$ は次のように定義する。

- ① $k > 0$ のとき, $\vec{a}$ と向きは変えずに, 大きさが k 倍となる。
- ② $k = 0$ のとき, 大きさが 0 となるので, $\vec{0}$ となる。
- ③ $k < 0$ のとき, $\vec{a}$ と向きが逆になり, 大きさが $|k|$ 倍となる。



なお, 大きさが 1 のベクトルを **単位ベクトル** といい, $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは,

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

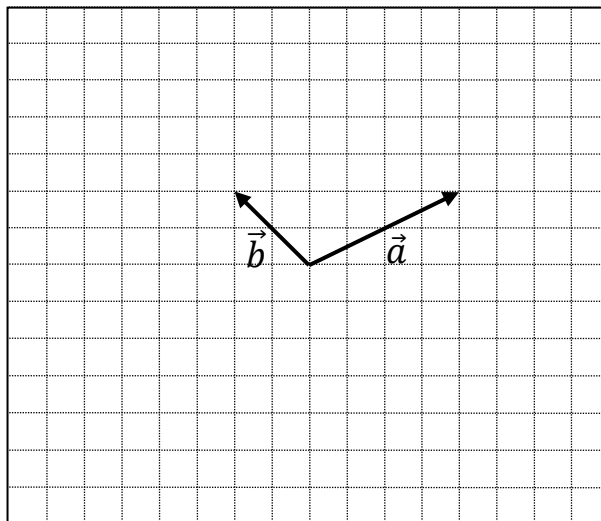
と表すことができる。

練習2

右図において以下のベクトルを図示しなさい。

(1) $\vec{a} + 3\vec{b}$ (2) $-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

(3) $\vec{a} - 2\vec{b}$ (4) $-2\vec{a} - \vec{b}$



ここでベクトルの加法と実数倍の性質についてまとめておく。

ベクトルの性質

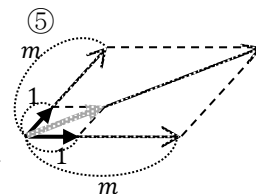
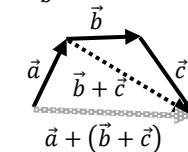
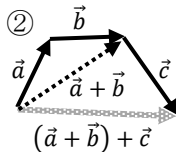
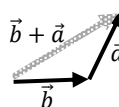
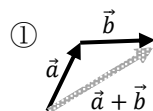
① $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

② $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

③ $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$

④ $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

⑤ $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

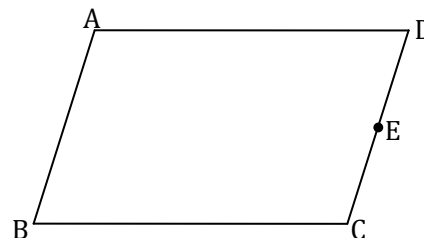


これは結局、ベクトルが**文字式と同様に計算できる**ことを表している。

例1 平行四辺形 ABCD において、辺 CD の中点を E とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とするとき、 $\overrightarrow{EB}$ を $\vec{b}$, $\vec{d}$ を用いて表しなさい。

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \vec{b} - \left(\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{d}$$



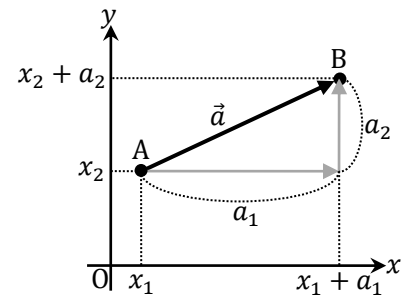
§3 ベクトルの成分表示

座標平面上に2点 $A(x_1, x_2)$, $B(x_1 + a_1, x_2 + a_2)$ をとると、
点Aから点Bに向けて、 x 軸方向に a_1 , y 軸方向に a_2 変化している。
このとき、 a_1 , a_2 をそれぞれ $\overrightarrow{AB}$ の **x 成分**, **y 成分** といい、

$$\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2) \text{ または } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

と表す。成分表示の方法は縦書きと横書きの2通りあり、どちらを用いてもよいが、本プリントでは座標と区別するという意味で主に縦書きを用いる。

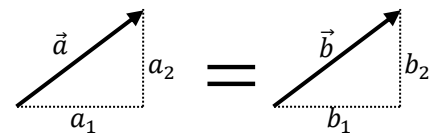
また、ベクトルの大きさ(矢印の長さ)は三平方の定理を用いて $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ となる。



○ ベクトルの相等

2つのベクトルが等しいとは向きと大きさが等しいことであるが、これを成分を用いて表すと次のようになる。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ のとき, } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$$



○ 成分による演算

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき、2つのベクトルの和、差、スカラー倍は次のようになる。

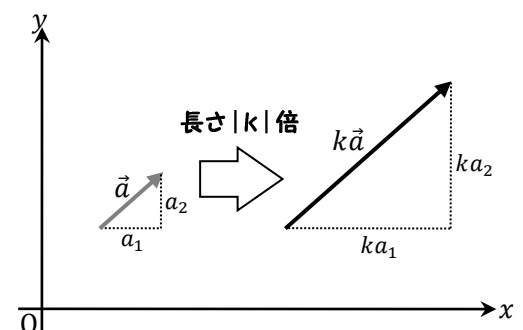
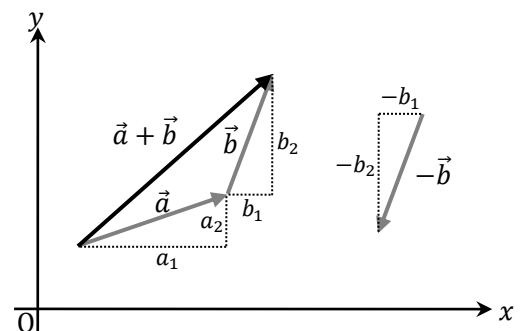
和 $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

差 $-\vec{b} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}$ より,

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

スカラー倍 x 成分, y 成分ともに k 倍すればよい。

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$



○ 単位ベクトル

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のとき, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ より, $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは次のようになる。

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \times \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

この中でも $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を特別に**基本ベクトル**という。

練習3

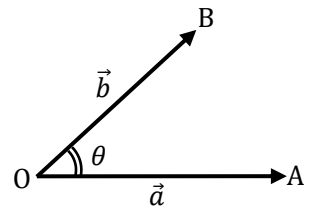
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき, 次のベクトルの成分とその大きさを求めてみましょう。

$$(1) \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \square \quad (2) \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \square$$

$$(3) \quad -3\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad |-3\vec{b}| = \square \quad (4) \quad 3\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad |3\vec{a} - 2\vec{b}| = \square$$

§4 ベクトルの内積

平面上に3点O, A, Bをとり, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\angle OAB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)
 とすると, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の **内積** といい, 記号で $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と表す

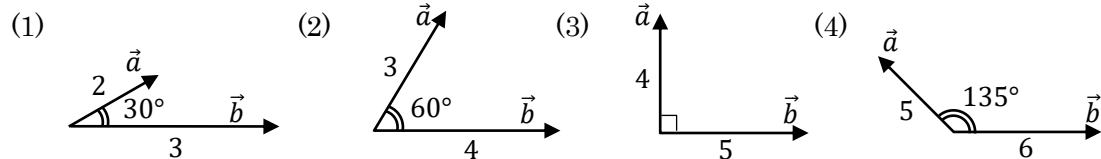


ベクトルの内積

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

練習4

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を計算してみよう。



内積の符号については次のことが成立している。

- ① $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
- ② $\theta = 90^\circ$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- ③ $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

②のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといい $\vec{a} \perp \vec{b}$ と表す。

○ 内積の成分表示

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき, 内積の成分表示は以下のようになる。

内積の成分表示

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

証明 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$... ①

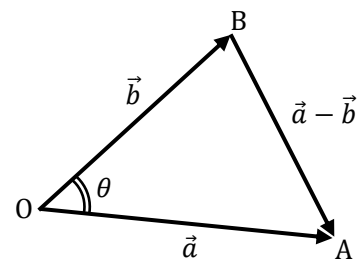
$\triangle OAB$ において余弦定理より, $\cos\theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$... ②

①, ②より, $\cos\theta$ を消去すると,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2}$$

また, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ より,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - \{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\}}{2} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - 2a_1b_1 - b_1^2 - a_2^2 - 2a_2b_2 - b_2^2}{2} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$



○ 内積の性質

内積の性質についてまとめておこう。

⚙ 内積の性質 ⚙

- | | |
|--|---|
| ① $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ | ② $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ |
| ③ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ | |
| ④ $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$ | ⑤ $ \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a} \vec{b} $ |

証明

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = |\vec{b}||\vec{a}| \cos \theta = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{3} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 = a_1c_1 + a_2c_2 + b_1c_1 + b_2c_2$$

$$\text{よって, } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = ka_1b_1 + ka_2b_2 = k(a_1b_1 + a_2b_2) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (k\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} kb_1 \\ kb_2 \end{pmatrix} = ka_1b_1 + ka_2b_2 = k(a_1b_1 + a_2b_2) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{よって, } (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\textcircled{4} \quad \text{これは内積の定義式において } \theta = 0^\circ \text{ となることから導かれる。}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

$$\textcircled{5} \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ より, } 0 \leq |\cos \theta| \leq 1$$

$$\text{両辺に } |\vec{a}||\vec{b}| \text{ をかけると, } 0 \leq |\vec{a}||\vec{b}||\cos \theta| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

この①～④により、内積の計算が文字式の計算と同様に扱うことができるということが分かる。

$$\begin{aligned} \text{ex. } (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{b} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{b} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 \quad (\because \textcircled{3}\textcircled{4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + 2b)(a - b) &= a^2 + ab - 2b^2 \\ &\text{とほぼ同じ。} \end{aligned}$$

また、⑤において、 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とし、成分表示する。

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow |a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

両辺 2 乗すると、 $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

これは有名な**シュワルツの不等式**である(覚えていますか?)。

例2 $\triangle OAB$ において, $|\overrightarrow{OA}| = 2$, $|\overrightarrow{OB}| = 3$, $|\overrightarrow{AB}| = 4$ のとき, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めなさい。

解答①(ベクトルを用いる)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= 16 \text{ より,} \\ |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 &= 16 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 16 \\ &\Leftrightarrow 9 + 4 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 16 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

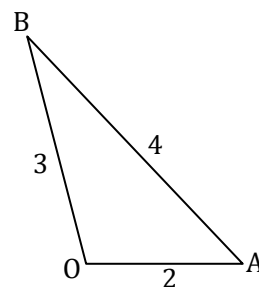
必ずしもベクトルを用いて解く必要はありません。ベクトルは問題を解くための道具の1つなのです。

解答②(余弦定理を用いる)

$\triangle OAB$ において余弦定理より,

$$\cos \angle AOB = \frac{4 + 9 - 16}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$



○ 三角形の面積

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\angle OAB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) のとき, $\triangle OAB$ の面積 S を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表そう。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

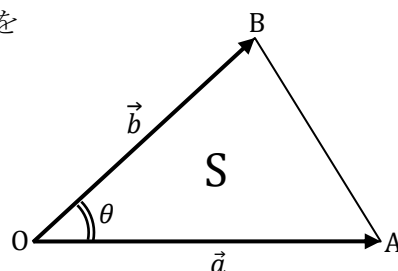
$$\sin \theta > 0 \text{ より, } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}\right)^2}$$

よって,

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

また, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} |x_1 y_2 - y_1 x_2| \end{aligned}$$



❖ 三角形の面積 ❖

$\triangle OAB$ において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とするとき, 面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - y_1 x_2|$$

練習4

公式を利用して, $\triangle ABC$ の面積を求めてみよう。

- (1) $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(3, 4)$
- (2) $A(2, 8)$, $B(0, -2)$, $C(6, 4)$
- (3) $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $|\overrightarrow{BC}| = 6$, $|\overrightarrow{CA}| = 7$

解答

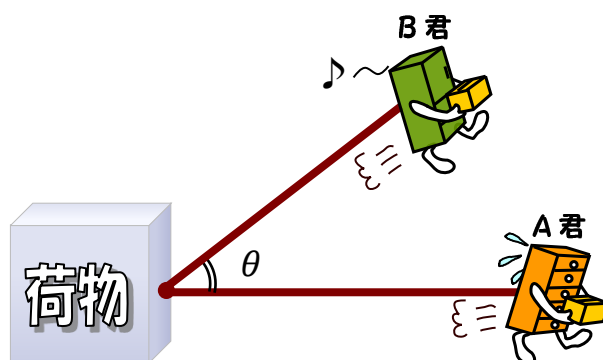
内積のイメージ

それでは、ここで内積がいったい何を表しているのか簡単に考えてみよう。

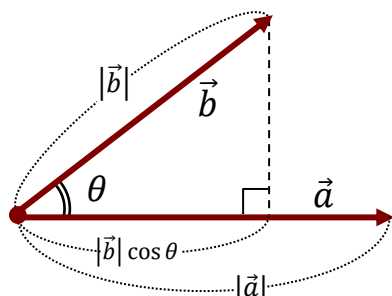
A 君が重たい荷物を引っ張っています。それを見た親切者の B 君が手伝ってあげました。しかし、B 君は A 君と同じ方向に引っ張らずに A 君の引っ張る方向に対して、角度 θ の方向に引っ張りました。A 君は感謝したものの内心

「同じ方向に引っ張ってくれればいいのに…」

とっていました。



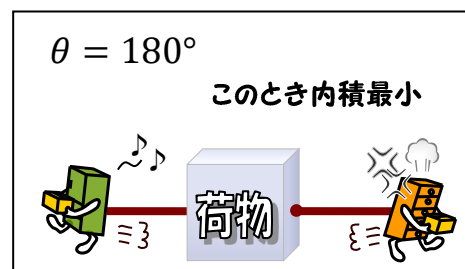
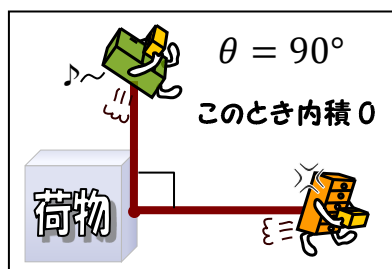
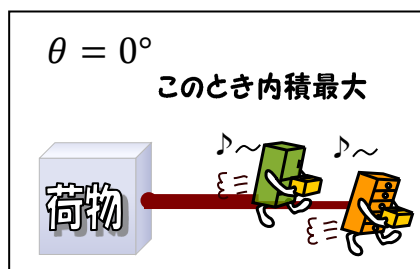
さて、実際、B 君は A 君に対してどれだけの貢献をしたのでしょうか？



力は向きと大きさのある量ですからベクトルで表せます。

今、A 君の力を表すベクトルを $\vec{a}$ 、B 君の力を表すベクトルを $\vec{b}$ としましょう。このとき、A 君の力の大きさは $|\vec{a}|$ 、B 君の力の大きさは $|\vec{b}|$ となります。すると、B 君が A 君の引っ張る方向に及ぼす力は $|\vec{b}| \cos \theta$ となります。このことから内積 $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ とは $\vec{b}$ の $\vec{a}$ に対する貢献度と考えるとイメージをしやすくなります。

実際に、以下の 3 つの場合で B 君の貢献度を考えてみるとよいでしょう。



また、右図において

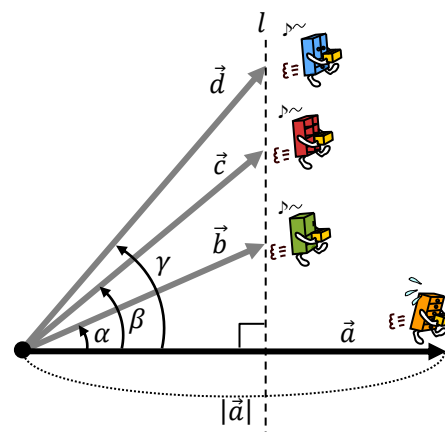
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}| \cos \beta, \quad \vec{a} \cdot \vec{d} = |\vec{a}||\vec{d}| \cos \gamma$$

となりますが、 $|\vec{b}| \cos \alpha = |\vec{c}| \cos \beta = |\vec{d}| \cos \gamma$ なので

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d}$$

が成り立ちます。

一般的に、右図の直線 l 上のどこに $\vec{x}$ をとっても、
 $\vec{a} \cdot \vec{x}$ の値は常に一定となることが分かります。



例3 点A(2, 1)を通り、円 $x^2 + y^2 = 1$ に接する2本の直線の接点をP, Qとすると、直線PQの方程式を求めなさい。

解答①(地道に解く)

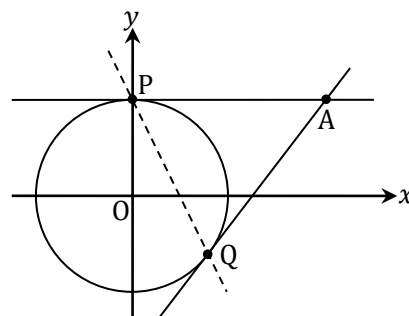
接点の座標を (a, b) とすると、接線の方程式は、 $ax + by = 1$

これが、A(2, 1)を通るので、 $2a + b = 1 \dots ①$

また、点 (a, b) は $x^2 + y^2 = 1$ 上なので、 $a^2 + b^2 = 1 \dots ②$

①, ②より、 $(a, b) = (0, 1), (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

よって、直線PQの方程式は、 $y = \frac{-\frac{3}{5}-1}{\frac{4}{5}}x + 1 = -2x + 1$



解答②(円を用いる)

$\angle OPA = \angle OQA = 90^\circ$ より、4点O, P, A, Qは同一円周上にある。

この円の方程式は

$$x(x-2) + y(y-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - y = 0$$

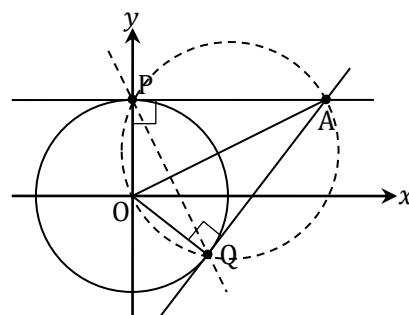
これと、 $x^2 + y^2 = 1$ の交点を通る直線が求める直線である。

2円の交点を通る図形は

$$x^2 - 2x + y^2 - y + k(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

と表すことができ($x^2 + y^2 = 1$ は除く)、 $k = -1$ のとき直線を表すので、

$$x^2 - 2x + y^2 - y - (x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 1$$



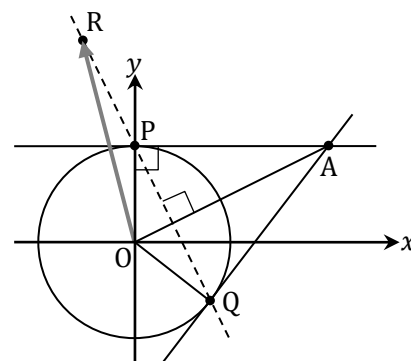
解答③(内積を用いる)

求める直線上の任意の点を $R(x, y)$ とすると、

$$\vec{OA} \cdot \vec{OR} = \vec{OA} \cdot \vec{OP} \quad (\text{PQの中点をMとすると、ともに} |\vec{OA}| \cdot |\vec{OM}|)$$

また、 $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = |\vec{OP}|^2 = 1$

よって、 $\vec{OA} \cdot \vec{OR} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow 2x + y = 1$



解答④(気が付くとこんな解答も...)

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ とすると、2点P, Qにおける接線の方程式はそれぞれ

$x_1x + y_1y = 1, x_2x + y_2y = 1$ と表せる。

これがともに、A(2, 1)を通るので、 $2x_1 + y_1 = 1, 2x_2 + y_2 = 1$

ここで、 $2x + y = 1$ という直線を考えると、これは2点P, Qを通る。

つまり、これが求める直線となる。

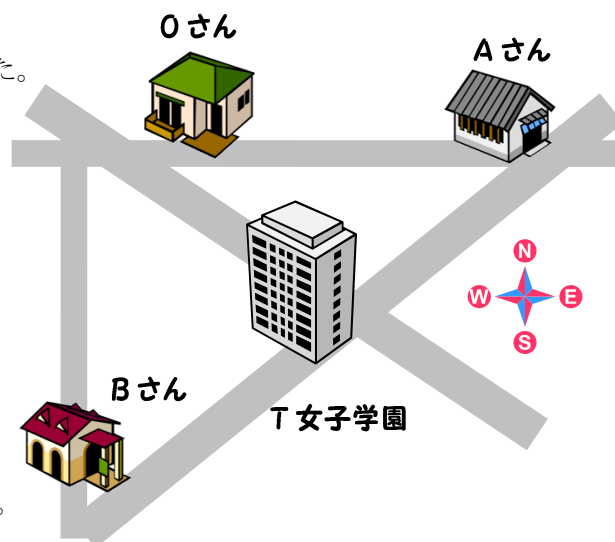
色々な解法がある1題です。しっかりと復習をしておくといよいでしょう。

§5 位置ベクトル

ある日、OさんはT女子学園に学校見学に行こうと考えた。
住所を調べてみると、『豊島区東池袋〇-△-□』と
分かったが、残念ながらOさんは地図を読むのが苦手…。
仕方なく友人のAさんとBさんに連絡すると
次のような返答が帰ってきた。

Aさん：「私の家はあなたの家から東に100mの
位置にあります。T女子学園？…、知りません」

Bさん：「Aさんと私の家のちょうど中間がT女子学園です。
ちなみに、私の家はあなたの家から西に50m、
南に150mの位置にあります。」



さてさて、地図の読めないOさんは、無事T女子学園にたどり着けるでしょうか？

〇 位置ベクトル

平面上にある点Aが $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ によって定まるとき、このベクトル $\vec{a}$ を点Aの**位置ベクトル**という。
位置ベクトルが $\vec{a}$ である点Aを $A(\vec{a})$ と表す。

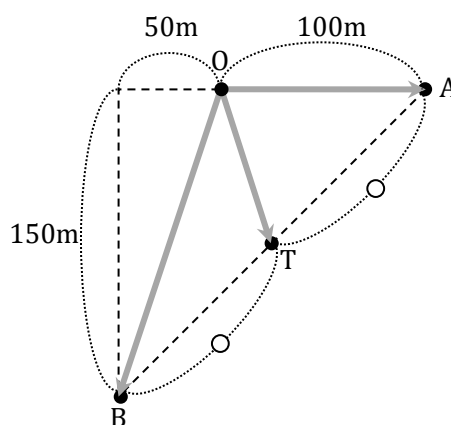
今まで平面上の位置を表すのに座標を用いていたが、これは**絶対的な位置**であり、上の例において
住所に相当するものである。それに対し、位置ベクトルは**相対的な位置関係**を表す。

具体的に、上の例を考えてみよう。

右図のように点を定め、 $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -50 \\ -150 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -50 \\ -150 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 25 \\ -75 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、T女子学園はOさんの家から見て、
東に25m、南に75mの位置にあることが分かる。



つまり、同じ位置の表し方にも、『豊島区東池袋〇-△-□』という**絶対的な位置**の表し方と『Oさんの家から東に25m、南に75m』という**相対的な位置**の表し方の2通りの表し方があるということが分かる。

○ 分点の位置ベクトル

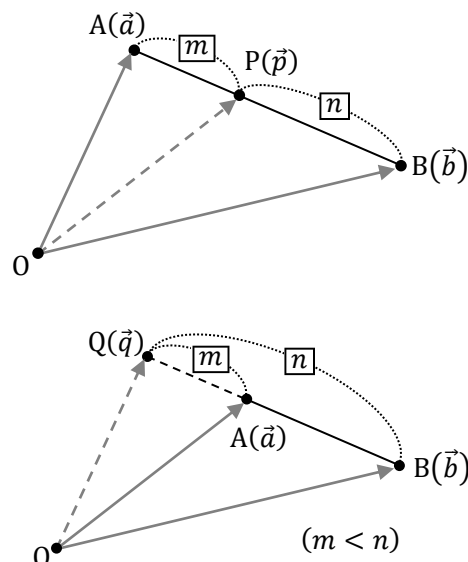
2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して, 線分 AB を $m:n$ に内分する点 $P(\vec{p})$, 外分する点 $Q(\vec{q})$ の位置ベクトルを求めよう。

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+n} (\vec{b} - \vec{a}) \text{ なので,}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \vec{p} = \vec{a} + \frac{m}{m+n} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

$$\text{同様に, } \overrightarrow{AQ} = -\frac{m}{n-m} \overrightarrow{AB} = -\frac{m}{n-m} (\vec{b} - \vec{a}) \text{ なので,}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow \vec{q} = \vec{a} - \frac{m}{n-m} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$



分点の位置ベクトル

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して, 線分 AB を $m:n$ に内分する点 $P(\vec{p})$, 外分する点 $Q(\vec{q})$ の位置ベクトル

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}, \quad \vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

ちなみに, 中点の位置ベクトルは $m:n = 1:1$ のときなので, $\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ となる。

○ 重心の位置ベクトル

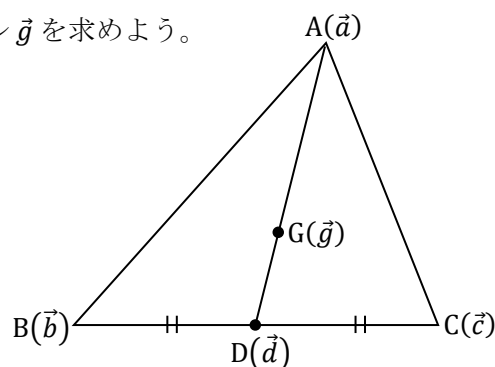
3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ に対して, $\triangle ABC$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ を求めよう。

BC の中点を D とすると, $D(\vec{d})$ の位置ベクトルは

$$\vec{d} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

AD を $2:1$ に内分した点が重心 G なので

$$\vec{g} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{d}}{2+1} = \frac{\vec{a} + 2 \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



重心の位置ベクトル

3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ に対して $\triangle ABC$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は次のようになる。

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

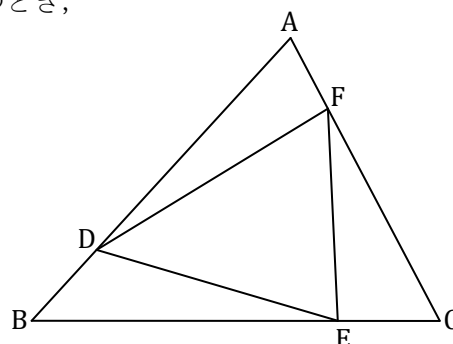
例 4 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ とする。△ABC の辺 AB, BC, CA を 3 : 1 に内分する点をそれぞれ D, E, F とするとき、△DEF の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ を求めなさい。

3 点 D, E, F の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ とする。このとき、

$$\vec{d} = \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4}, \quad \vec{e} = \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4}, \quad \vec{f} = \frac{\vec{c} + 3\vec{a}}{4}$$

これより、

$$\vec{g} = \frac{\vec{d} + \vec{e} + \vec{f}}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4} + \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4} + \frac{\vec{c} + 3\vec{a}}{4} \right) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



例 5 △OAB の内部にある点 P が、 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ を満たすとき、点 P はどのような位置にありますか。

与式の中に、内分点の公式の形を作ると点 P の位置が見えてきます。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{5}$$

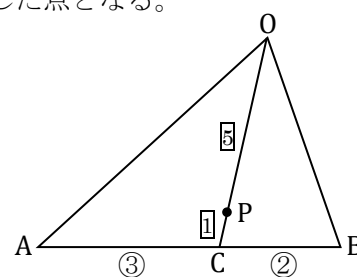
ここで、 $\overrightarrow{OC} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{5}$ とおくと、点 C は線分 AB を 3 : 2 に内分した点となる。

また、 $\overrightarrow{OP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{OC}$ より、点 P は線分 OC を 5 : 1 に内分した点となる。

以上より点 P は、

線分 AB を 3 : 2 に内分した点を C としたとき、

線分 OC を 5 : 1 に内分した位置にある。



○ 1 次独立

平面上の**平行ではない**2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) について, 以下のことが成り立つ。

❖ 1 次独立なベクトル ❖

平面上の任意のベクトル $\vec{x}$ は $\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{b}$ の形で与えることができ, その表し方は**ただ1通り**である。

このとき, 2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は**1 次独立**であるという。

証明①

$\vec{OP} = \vec{x}$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とおく。

点 P を通り, OA, OB に平行な直線と, 直線 OA, OB の交点をそれぞれ, A', B' とすると,

$$\vec{OP} = \vec{OA'} + \vec{OB'}$$

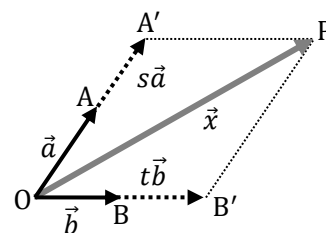
とおける。O, A, A' と O, B, B' は同一直線上にあるので,

$$\vec{OA'} = s\vec{OA} = s\vec{a}, \quad \vec{OB'} = t\vec{OB} = t\vec{b} \quad (s, t \text{ は実数})$$

となるので,

$$\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表すことができ, さらに, s, t の選び方はただ1通りに定まる。



証明②(表し方が1通りであること)

$\vec{x}$ が $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて2通りに表せたと仮定する。

つまり,

$$\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b} \quad (s \neq s', t \neq t')$$

と表せたと仮定する。

この2つの表示が異なるので, s, t の少なくとも1つは異なる。

今, それを $s \neq s'$ とすると,

$$s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b} \Leftrightarrow (s - s')\vec{a} = (t' - t)\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{t' - t}{s - s'}\vec{b} \quad (\because s - s' \neq 0)$$

これより, $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行ということになり矛盾する。

よって, 表し方は1通りとなる。

これより, $\vec{a}$, $\vec{b}$ が1次独立であるとき,

$$s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b} \Leftrightarrow s = s', t = t'$$

$$s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow s = 0, t = 0$$

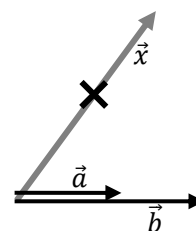
が成り立つことが分かる。

逆に, **平行な2つのベクトル** $\vec{a}$, $\vec{b}$ があるとき,

これらは平面上の任意のベクトルをあらわすことができない。

($\vec{a}$, $\vec{b}$ と平行なベクトルしか表せない。)

このとき, 2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は**1 次従属**であるという。



例 6 $\triangle OAB$ において、辺 AB 上の点 C と、辺 OB 上の点 D が $AC : CB = 1 : 2$, $OD = DB$ を満たす。線分 OC と AD の交点を P とするとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表しなさい。

$\overrightarrow{OP}$ を 2 通りの方法で表すことが、この解法のポイントです。

解答①

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

O, P, C は同一直線上より, $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OC} = \frac{2k}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{3}\overrightarrow{OB}$... ①

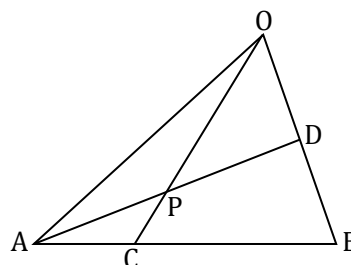
$AP : PD = t : (1 - t)$ とおくと,

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OD} = (1-t)\overrightarrow{OA} + \frac{t}{2}\overrightarrow{OB} \dots \textcircled{2}$$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は 1 次独立なので, ①, ②から

$$\frac{2k}{3} = 1 - t, \quad \frac{k}{3} = \frac{t}{2} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}, \quad t = \frac{1}{2}$$

以上より, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$



メネラウスの定理を用います。

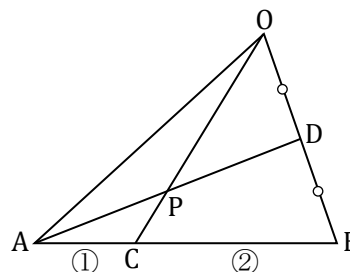
解答②

$\triangle OAB$ と直線 AD において、メネラウスの定理より、

$$\frac{OD}{DB} \cdot \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CP}{PO} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{CP}{PO} = 1 \Leftrightarrow \frac{CP}{PO} = \frac{1}{3}$$

よって,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{4}$$



§ 6 ベクトル方程式

ここでは図形上の任意の点の位置を、原点からの位置ベクトルを用いて表すこと考える。このように表された式をその図形のベクトル方程式という。

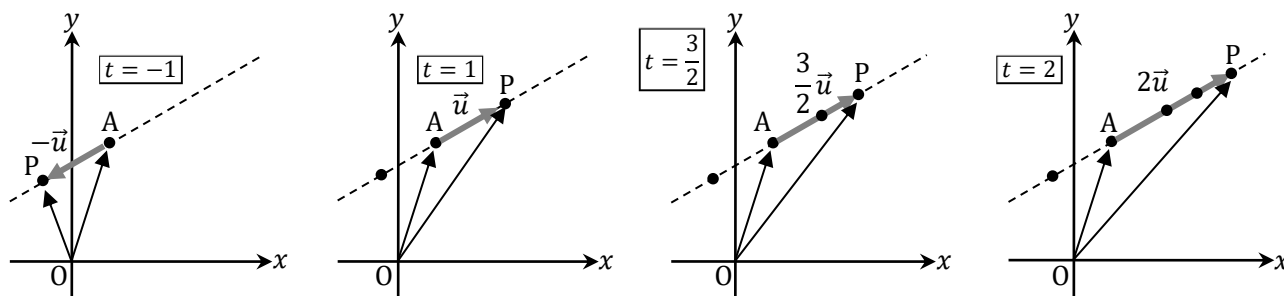
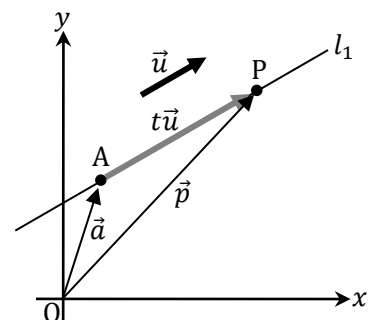
○ 直線のベクトル方程式

① 点 $A(\vec{a})$ を通り、 $\vec{u}$ に平行な直線 l_1

この直線上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすると、点 P の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \boxed{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u} \text{ (} t \text{ は実数)}} \dots (*)$$

と表すことができる。実際、 t の値を動かすと、以下のように点 P が直線上を動くことが分かる。



つまり、(*) が直線 l_1 を表すベクトル方程式となる。

なお、 $\vec{u}$ のように直線 l に平行なベクトルを**方向ベクトル**という。

成分表示

$A(x_0, y_0)$, $P(x, y)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とするとき、ベクトル方程式(*)を、成分を用いて表す。

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

これは、直線上の任意の点の x 座標と、 y 座標の関係を表す式となり、 t を**媒介変数**という。

また①式は、この直線の**媒介変数表示**という。

この2式より t を消去すると

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

となり、これは傾きが $\frac{b}{a}$ で、点 (x_0, y_0) を通る直線となっていることが分かる。

② 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を通る直線 l_2

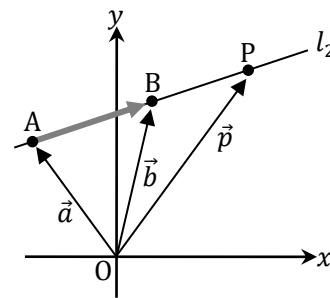
これは $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ を方向ベクトルとする直線と考えればよいので
直線 l_2 のベクトル方程式は,

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

と表すことができる。また, $1-t=s$ とおくと,

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s+t=1)$$

と表すこともできる。



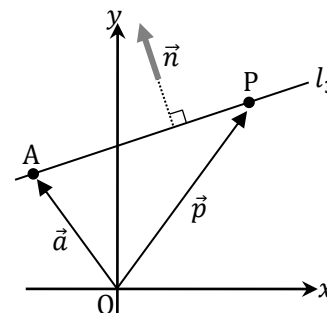
③ 点 $A(\vec{a})$ を通り, $\vec{n}$ に垂直な直線 l_3

直線上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすると, 点 P は常に, $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ を満たすので,

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

と表すことができる。そして, これが直線 l_3 のベクトル方程式となる。

また, 直線 l_3 に垂直なベクトル $\vec{n}$ を直線 l_3 の**法線ベクトル**という。



成分表示

$A(x_0, y_0)$, $P(x, y)$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とするとき, 成分を用いて表す。

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0 \quad \cdots (*)$$

ここで, $-ax_0 - by_0 = c$ とおくと, $(*) \Leftrightarrow ax + by + c = 0$

となる。このことから, 直線 $ax + by + c = 0$ の法線ベクトルは, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ となることが分かる。

例 7 次の直線の方程式を求めなさい。

- (1) 点 $A(1, 2)$ を通り、ベクトル $\vec{d} = (2, -3)$ に平行な直線
- (2) 2 点 $A(-1, 3)$, $B(-3, 5)$ を通る直線
- (3) 点 $A(-3, 1)$ を通り、ベクトル $\vec{n} = (-3, 4)$ に垂直な直線

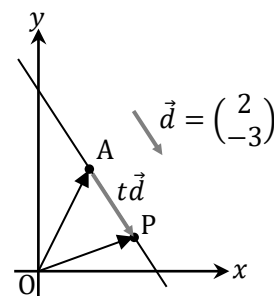
直線上の任意の点を $P(x, y)$ とおく。

$$(1) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -3t+2 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -3t+2 \end{cases}$$

$$2 \text{ 式より, } t \text{ を消去すると, } 3x + 2y = 3(2t+1) + 2(-3t+2) = 7$$

$$\text{よって, 直線の方程式は, } 3x + 2y = 7$$

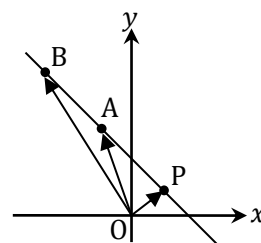


$$(2) \quad \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t-1 \\ 2t+3 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } \begin{cases} x = -2t-1 \\ y = 2t+3 \end{cases}$$

$$2 \text{ 式より, } t \text{ を消去すると, } x + y = -2t-1 + 2t+3 = 2$$

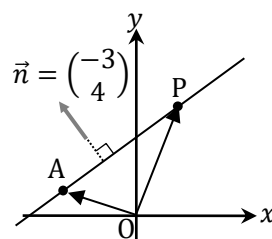
$$\text{よって, 直線の方程式は, } x + y = 2$$



- (3) 求める直線の法線ベクトルが $\vec{n} = (-3, 4)$ となる。

$$\text{よって, } \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3x-9+4y-4=0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 4y = 13$$



例 8 $\triangle OAB$ の内部にある点 P が, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ を満たすとき, 点 P はどのような位置にありますか。

例 5 と同じ問題になります。直線のベクトル方程式を用いて解きます。

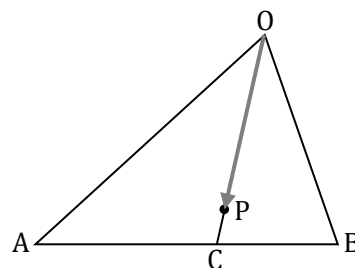
2 直線 OP と AB の交点を C とすると, O, P, C は同一直線上なので,

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OP} = \frac{k}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{点 } C \text{ は直線 } AB \text{ 上の点なので, } \frac{k}{3} + \frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{6}{5}$$

$$\text{これより, } \overrightarrow{OC} = \frac{6}{5}\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{5}$$

よって, 点 C は線分 AB を $3:2$ に内分した点となり, 点 P は線分 OC を $5:1$ に内分した点となる。



例 9 $\triangle OAB$ に対し, $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ (s, t は実数) とする。 s, t が次の条件を満たしながら変化するとき, 点 P の描く図形を図示しなさい。

(1) $s + t = 1, s \geq 0$

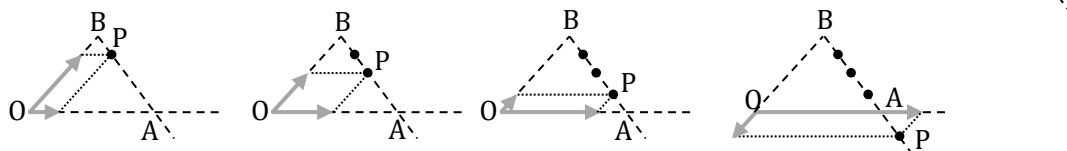
(2) $2s + t = 2$

(3) $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$

右図のように 3 点 O, A, B を定める。

(1) $s + t = 1$ より, 点 P は直線 AB 上にある。

$s \geq 0$ のとき, 点 A は常に直線 OB の下側に存在するので, 点 P は半直線 BA 上にある。

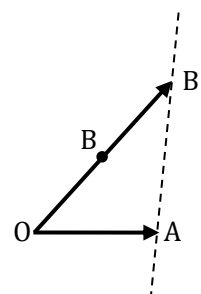


(2) $2s + t = 2 \Leftrightarrow s + \frac{1}{2}t = 1$

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = s\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}t \cdot (2\overrightarrow{OB})$$

$$\frac{1}{2}t = t', 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'} \text{ とおくと, } \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t'\overrightarrow{OB'} \quad (s + t' = 1)$$

となるので, 点 P は直線 AB' 上にある。

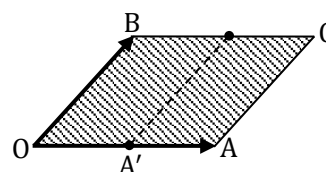


(3) $s\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ とおくと, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + t\overrightarrow{OB}$

これより, 点 P は点 A' を通り, $\overrightarrow{OB}$ に平行な直線のうち, $0 \leq t \leq 1$ を満たす線分上の点となる。

また, $0 \leq s \leq 1$ より, 点 A' は線分 OA 上の点となる。

ここで, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, 求める図形は, 右図の平行四辺形 $AOCB$ の周または内部となる。



○ 円のベクトル方程式

① 中心が $A(\vec{a})$, 半径 r の円 C_1

円周上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすると, 点 P は常に, $|\overrightarrow{AP}| = r$ を満たすので,

$$|\vec{p} - \vec{a}| = r$$

と表すことができる。そして, これが円 C_1 のベクトル方程式となる。

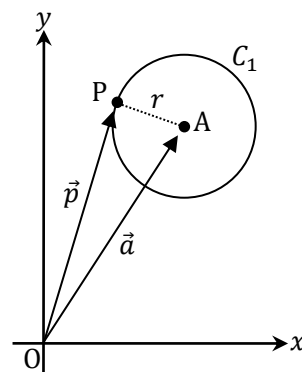
成分表示

$A(a, b)$, $P(x, y)$ とするとき, 成分を用いて表す。

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \text{ より, } |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$\text{よって, } |\overrightarrow{AP}|^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

となり, これは中心 (a, b) , 半径 r の円の方程式がとなっている。



② 直径の両端が $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ である円 C_2

円周上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすると, 点 P は点 A または点 B と一致するか, または $\angle APB = 90^\circ$ を満たすので,

$$\vec{p} = \vec{a} \text{ または } \vec{p} = \vec{b} \text{ または } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

と表すことができる。そして, これが円 C_2 のベクトル方程式となる。

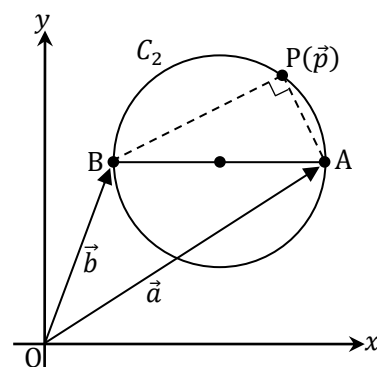
成分表示

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x, y)$ とするとき, 成分を用いて表す。

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

となる。これは, 比較的よく出てくる形なので覚えておくと便利である。



例 10 定点 O, A, B と任意の点 P に対し、次のベクトル方程式はどのような図形を表しますか。

(1) $|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = 3$ (2) $|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ (3) $2|\overrightarrow{OP}|^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB})$

(1) $|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = 3 \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{OP} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \right| = 1$

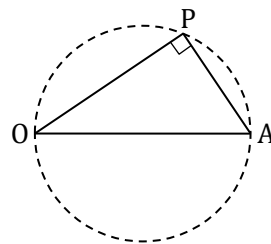
$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{CP}| = 1$

これより求める図形は、線分 OA を $1:2$ に内分した点を中心とする半径 1 の円となる。

(2) $|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

よって, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AP}$ または $\overrightarrow{OP} = \vec{0}$ または $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$

これより求める図形は、線分 OA を直径とする円となる。



(3) $2|\overrightarrow{OP}|^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$
 $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 0$
 $\Leftrightarrow (2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \right) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 0$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

よって, $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{BP}$ または $\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ または $\overrightarrow{BP} = \vec{0}$

これより求める図形は、線分 OA の中点を C とすると、線分 BC を直径とする円となる。

(2)の別解です。平方完成することで解くこともできます。

(2)

$|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \right|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2 \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \right| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CP}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$

これより求める図形は、線分 OA の中点を中心とする半径 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$ の円となる。