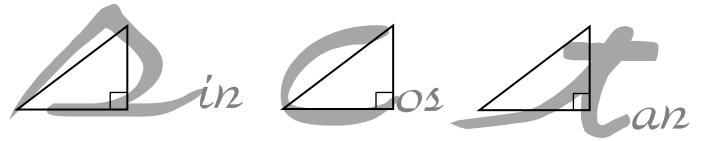


三角関数

以前学んだように、直角三角形 ABC において、

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB}, \quad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

と定義した。

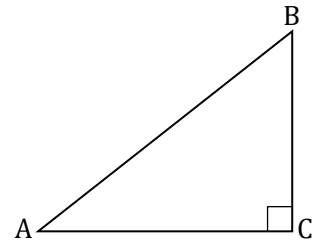


ここで $\angle A$ と三角比の値は**一対一の対応**があるので $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ は $\angle A$ の関数とすることができる。ここでは三角比を用いているので、この関数のことを**三角関数**と呼ぶ。

上記の定義のもとでは、 $\angle A$ のとりうる値の範囲は

$$0^\circ < \angle A < 90^\circ$$

となるが、ここではまず、この $\angle A$ の範囲を任意の実数まで拡張することから始める。

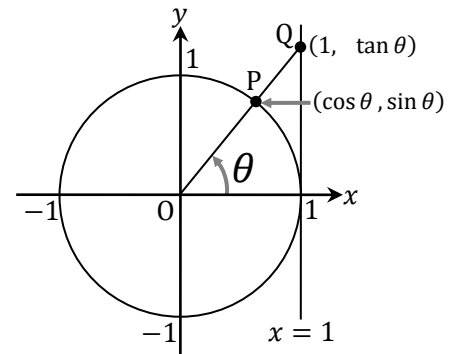


§1 一般角と弧度法

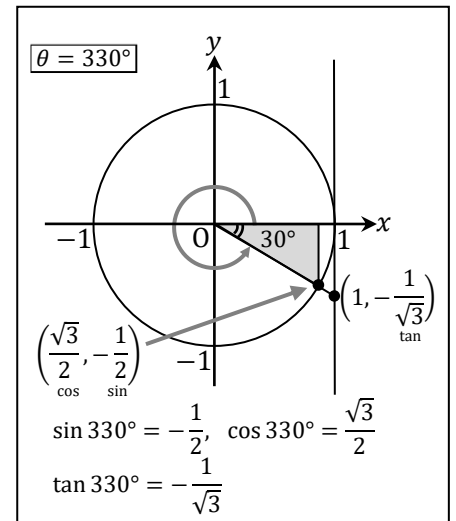
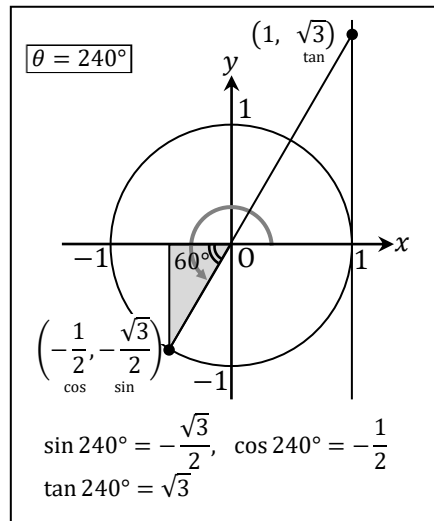
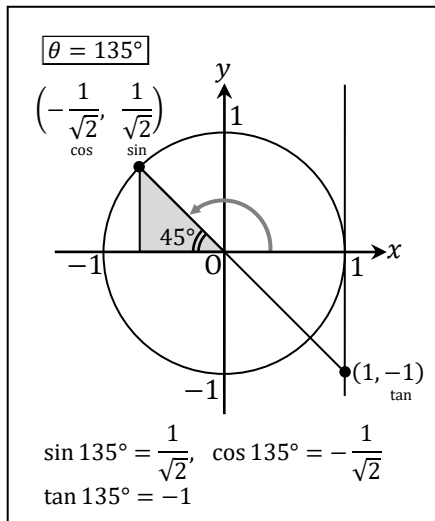
○ 一般角の三角関数

座標平面上において、中心が原点で、半径 1 の円(単位円)上に動点 P をとり、直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を Q とする。

このとき、 x 軸の正の部分から**左回り**に角 θ をとり、点 P の x 座標を $\cos \theta$, y 座標を $\sin \theta$, 点 Q の y 座標を $\tan \theta$ と定義する。

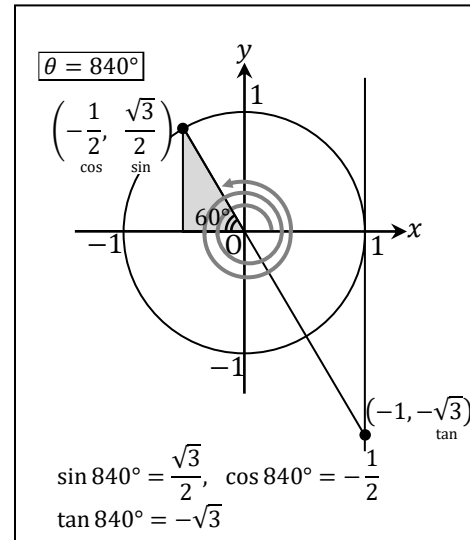
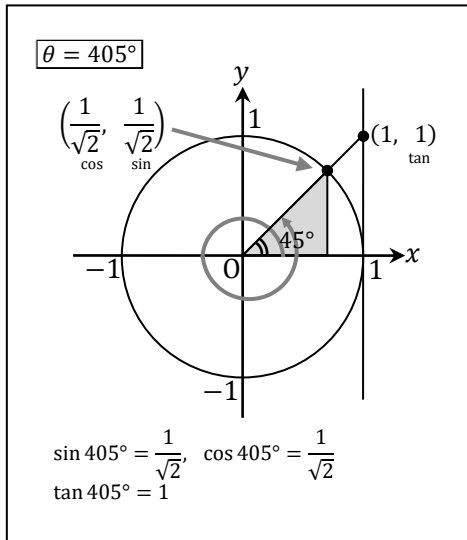


それでは、いくつか例を見ていきましょう。

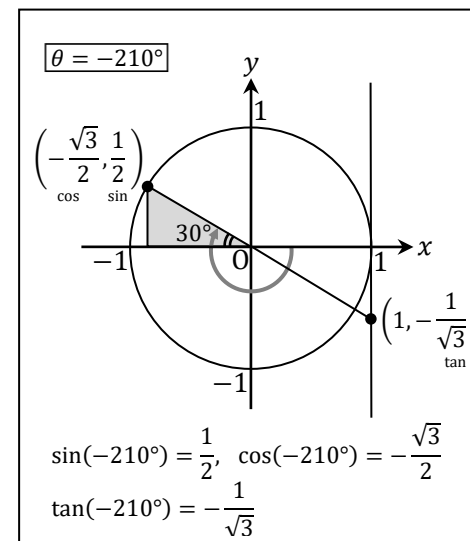
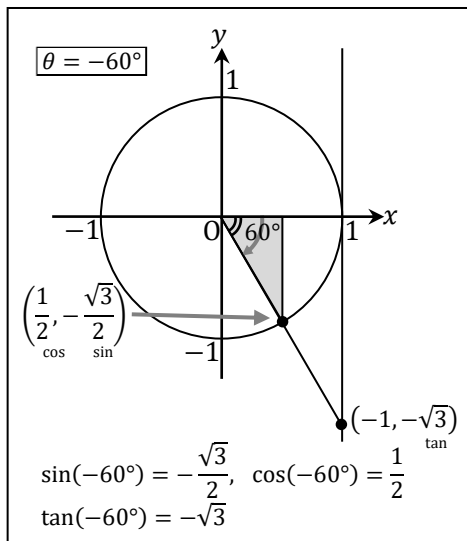


角度 θ が 360° を超える場合は、1 周より多く動くことで定義する。

例えば、 $405^\circ = 360^\circ + 45^\circ$ なので、1 周とさらに 45° 進んだ位置となる。



また、角度 θ が負になったときは、 x 軸の正の部分から**右回り**に点 P を動かすことで定義する。



単位円周上を点 P が動くことから、 $\cos \theta, \sin \theta$ の値の範囲は

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1, \quad -1 \leq \sin \theta \leq 1$$

となることが分かり、 $x = 1$ 上を点 Q が動くことから、 $\tan \theta$ の値の範囲は**全実数**となる。

§2 三角関数の性質

ここでは、三角関数の性質を調べていきます。それぞれ重要な性質ばかりですが、式を丸暗記するのではなく、なぜそのような性質が成り立つのかを理解するようにしましょう。

○ 三角関数の相互関係

相互関係

$$\textcircled{1} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\textcircled{3} \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

これは三角比を学んだ際にも出てきましたが、重要な式ですのでもう一度確認しておきます。

証明

① 円周上の任意の点が $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と表せるので、

$$OP^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

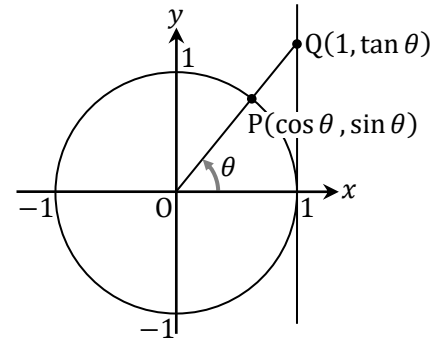
② 3点 O, P, Q は同一直線上にあるので、

$$(\text{直線 } OP \text{ の傾き}) = (\text{直線 } OQ \text{ の傾き})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

③ $\cos \theta \neq 0$ のとき、①の両辺を $\cos^2 \theta$ で割ると、

$$1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



○ 三角関数の性質

① $\theta + 2n\pi$ (n は整数) の三角関数

1周が 2π であることから周期 2π で、円周上の点は再び同じ位置にくる。

このことから、次の公式が成立する。

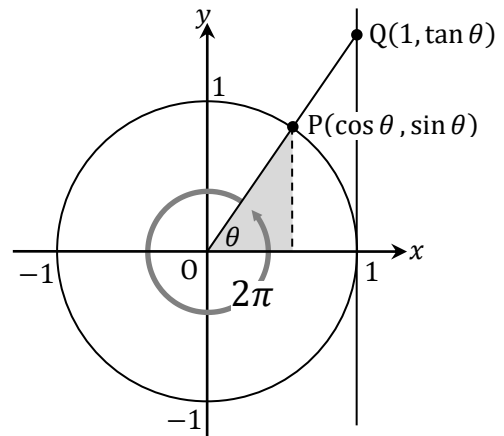
$\theta + 2n\pi$ の三角関数

n を整数とする

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan \theta$$



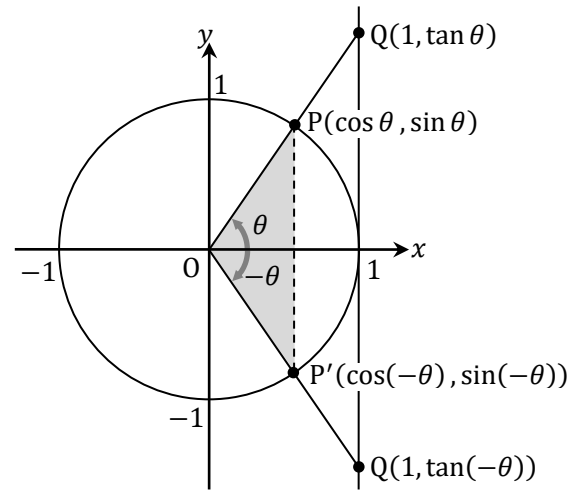
② $-\theta$ の三角関数

単位円周上において x 軸の正の部分から θ , $-\theta$ 移動した点をそれぞれ P , P' , 直線 $x=1$ との交点を Q , Q' とするとそれらの2点は x 軸に関して対称となっている。よって,

$$P'(\cos \theta, -\sin \theta), Q'(1, -\tan \theta)$$

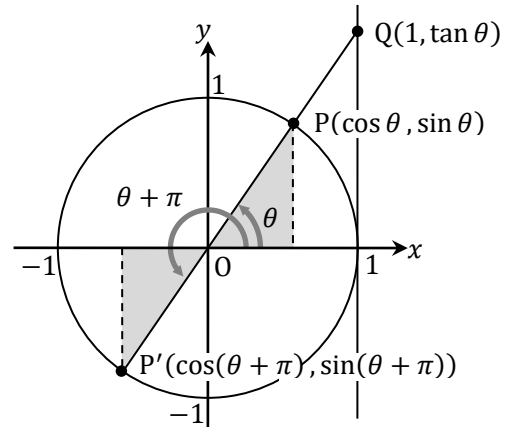
と表すことができる。このことから次の公式が成り立つ。

\odot $-\theta$ の三角関数 \odot
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
$\cos(-\theta) = \cos \theta$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$

③ $\theta + \pi$ の三角関数

単位円周上において x 軸の正の部分から θ , $\theta + \pi$ 移動した点をそれぞれ P , P' とすると2点は原点に関して対称となっている。よって, $P'(-\cos \theta, -\sin \theta)$ と表すことができる。直線 $x=1$ 上の点の位置は θ と $\theta + \pi$ で変わらない。このことから次の公式が成り立つ。

\odot $\theta + \pi$ の三角関数 \odot
$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$
$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$
$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$

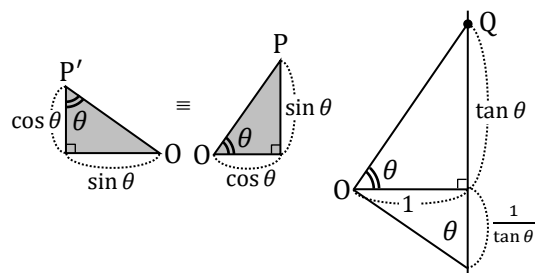
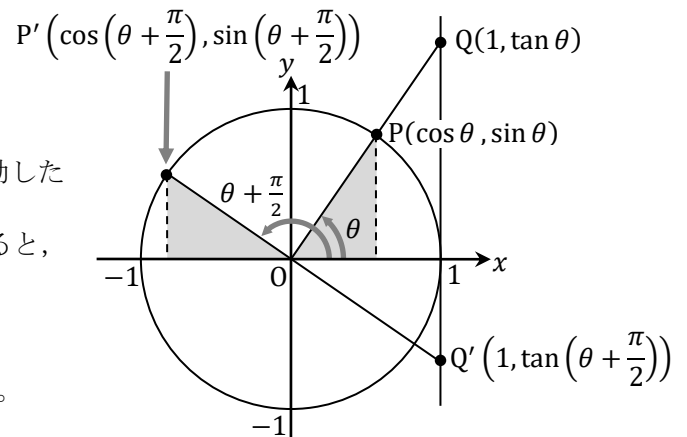
④ $\theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数

単位円周上において x 軸の正の部分から θ , $\theta + \frac{\pi}{2}$ 移動した点をそれぞれ P , P' , 直線 $x=1$ との交点を Q , Q' とすると,

$$P'(-\sin \theta, \cos \theta), Q'\left(1, -\frac{1}{\tan \theta}\right)$$

と表すことができる。このことから次の公式が成り立つ。

\odot $\theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数 \odot
$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$
$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$
$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$



②, ③の θ を $-\theta$ に置き換え, ①を利用すれば, 三角比において学んだ性質が得られる。

⚽ $\frac{\pi}{2} - \theta$ の三角関数 ⚽

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

⚽ $\pi - \theta$ の三角関数 ⚽

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

これらの性質を用いると一般角の三角関数が, 必ず $0 \sim \frac{\pi}{4}$ の三角関数を用いて表すことができる。

$$\sin \frac{23}{5} \pi = \sin \left(\frac{3}{5} \pi + 2\pi \times 2 \right) = \sin \frac{3}{5} \pi = \begin{cases} \sin \left(\frac{1}{10} \pi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{10} \\ \sin \left(\pi - \frac{2}{5} \pi \right) = \sin \frac{2}{5} \pi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \right) = \sin \frac{\pi}{10} \end{cases}$$

$\theta + 2n\pi$ の
三角関数

$\theta + \frac{\pi}{2}$ の
三角関数

$\pi - \theta$ の
三角関数

$\frac{\pi}{2} - \theta$ の
三角関数

ここで上げた三角関数の性質は無理に覚えようとしなさい。どれも似通った式で覚えにくありませんか？必ず、単位円を想像しながら導くようにしておきましょう。



例題 1 次の角の動径を図示しなさい。また, 第何象限の角か答えなさい。

- (1) 650° (2) 800° (3) -630° (4) -1280°

練習 1 次の角の動径を図示しなさい。また, 第何象限の角か答えなさい。

- (1) 580° (2) 1200° (3) -540° (4) -780°

例題 2 (1) 次の角を，度数は弧度法に，弧度は度数に，それぞれ書き直しなさい。

(ア) 72° (イ) -320° (ウ) $\frac{4}{15}\pi$ (エ) $-\frac{13}{4}\pi$

(2) 半径 4，中心角 150° の扇形の弧の長さ l と面積を求めなさい。

練習 2 (1) 次の角を，度数は弧度法に，弧度は度数に，それぞれ書き直しなさい。

(ア) 84° (イ) -750° (ウ) $\frac{7}{12}\pi$ (エ) $-\frac{56}{45}\pi$

(2) 半径 6，中心角 108° の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めなさい。

例題 3 θ が次の値のとき， $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ ， $\tan \theta$ の値を求めなさい。

(1) $\frac{23}{6}\pi$ (2) $-\frac{5}{4}\pi$

練習 3 θ が次の値のとき， $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ ， $\tan \theta$ の値を求めなさい。

(1) $\frac{7}{3}\pi$ (2) $-\frac{13}{4}\pi$ (3) $\frac{13}{2}\pi$ (4) -7π

例題 4 次の値を求めなさい。

(1) $\sin \frac{10}{3}\pi$ (2) $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$ (3) $\tan \frac{13}{4}\pi$

(4) $\sin \frac{17}{18}\pi + \cos \frac{13}{18}\pi + \sin \frac{7}{9}\pi - \sin \frac{\pi}{18}$

練習 4 次の値を求めなさい。

(1) $\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$ (2) $\cos \frac{17}{6}\pi$ (3) $\tan\left(-\frac{11}{6}\pi\right)$

(4) $\sin\left(-\frac{23}{6}\pi\right) + \tan \frac{13}{6}\pi + \cos \frac{11}{2}\pi + \tan\left(-\frac{25}{6}\pi\right)$

例題 5 (1) $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ とする。 $\cos \theta = \frac{5}{13}$ のとき， $\sin \theta$ ， $\tan \theta$ の値を求めなさい。

(2) $\tan \theta = 7$ のとき， $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ の値を求めなさい。

練習 5 (1) $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ とする。 $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ のとき， $\cos \theta$ ， $\tan \theta$ の値を求めなさい。

(2) $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ のとき， $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ の値を求めなさい。

例題 6 (1) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ を証明しなさい。

(2) $\cos^2 \theta + \sin \theta - \tan \theta (1 - \sin \theta) \cos \theta$ を計算しなさい。

練習 6 (1) 次の等式を証明しなさい。

$$(ア) \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = 1 - 2 \cos^2 \theta \quad (イ) \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

(2) 次の計算をしなさい。

$$(ア) (\sin \theta + 2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta - \cos \theta)^2 \quad (イ) \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

例題 7 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、次の式の値を求めなさい。

$$(1) \sin \theta \cos \theta, \sin^3 \theta + \cos^3 \theta \quad (2) \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ のとき, } \cos \theta - \sin \theta$$

練習 7 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、次の式の値を求めなさい。

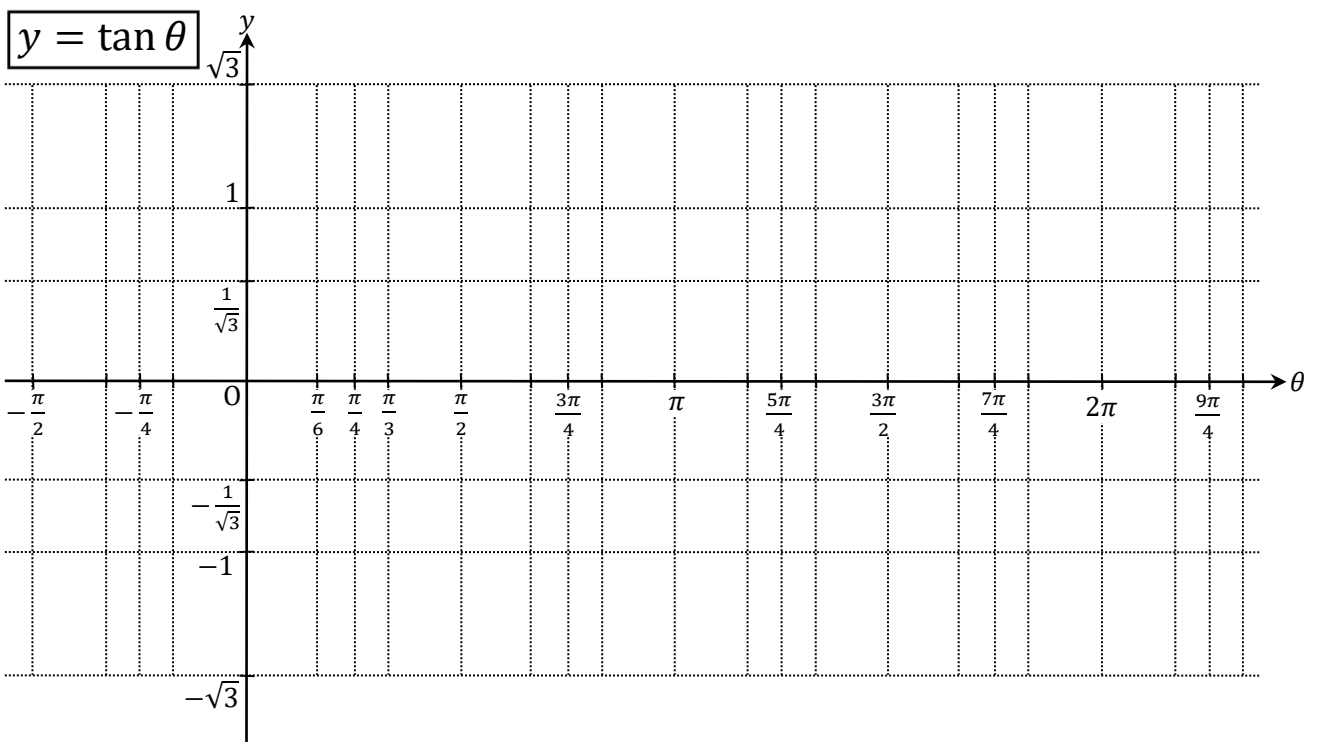
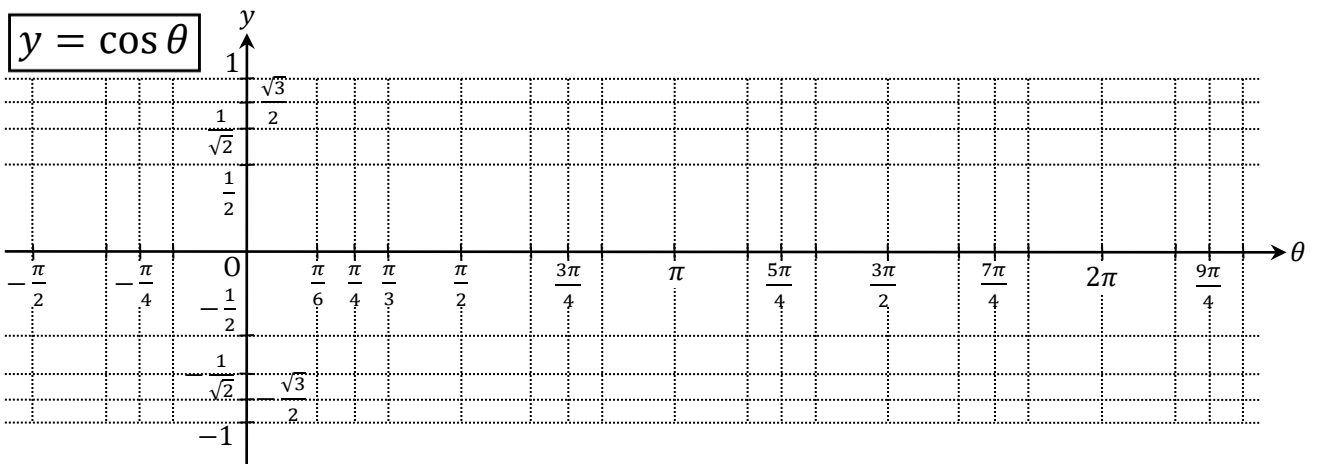
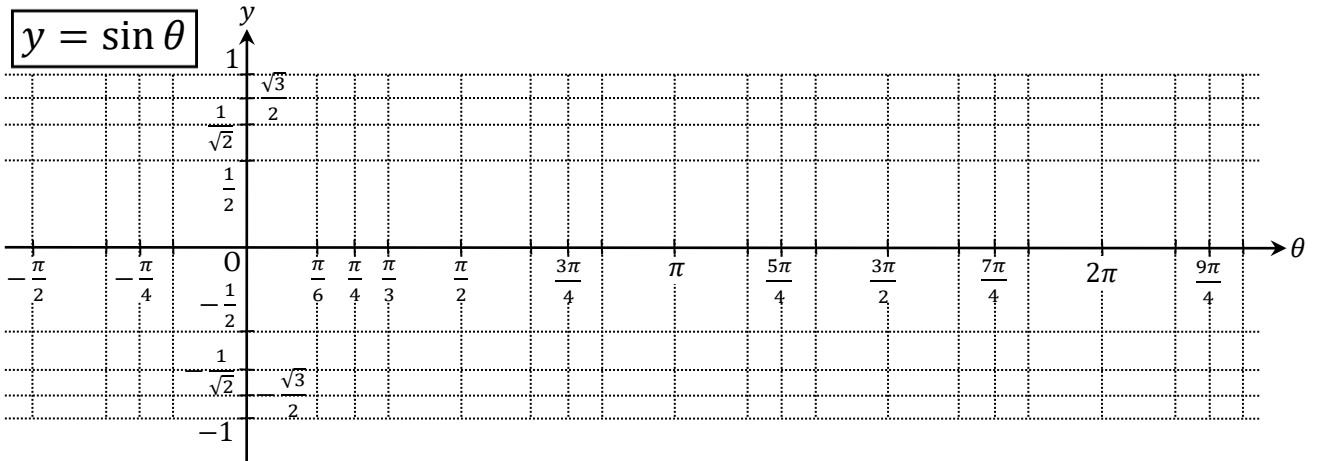
$$(1) \sin \theta \cos \theta, \sin^3 \theta + \cos^3 \theta \quad (2) \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \text{ のとき, } \sin \theta - \cos \theta$$

例題 8 a を正の定数とし、 θ を $0 \leq \theta \leq \pi$ を満たす角とする。2次方程式 $2x^2 - 2(2a - 1)x - a = 0$ の2つの解が $\sin \theta, \cos \theta$ であるとき、 $a, \sin \theta, \cos \theta$ の値をそれぞれ求めなさい。

練習 8 k は定数とする。2次方程式 $25x^2 - 35x + 4k = 0$ の2つの解が $\sin \theta, \cos \theta$ ($\cos \theta > \sin \theta, 0 < \theta < \pi$) で表されるとき、 k の値と $\sin \theta, \cos \theta$ の値を求めなさい。

○ 三角関数のグラフをかいてみよう

3 ページの表をもとに以下の座標平面上に点をプロットし、それらの点を滑らかな曲線で結んでみよう。

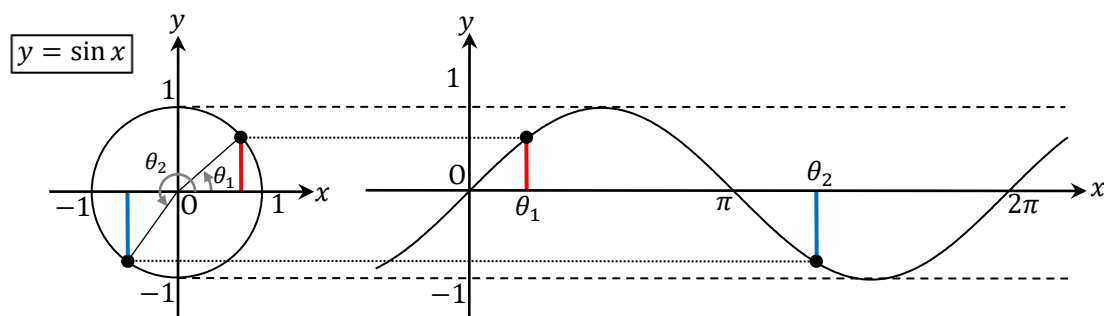


MEMO

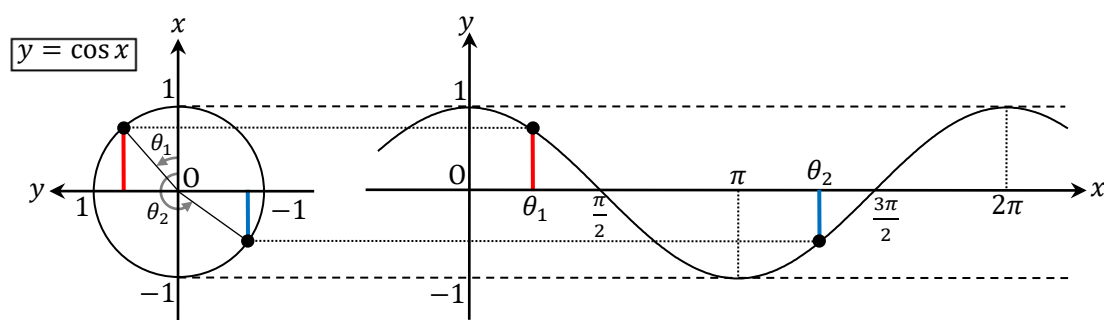
§3 三角関数のグラフ

○ $y = \sin x$, $y = \cos x$ のグラフ

$y = \sin x$ のグラフは単位円周上の点の y 座標の変化を見ることができている。



$y = \cos x$ のグラフは単位円周上の点の x 座標の変化を見ることができている。



$y = \cos x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ 平行移動すると、

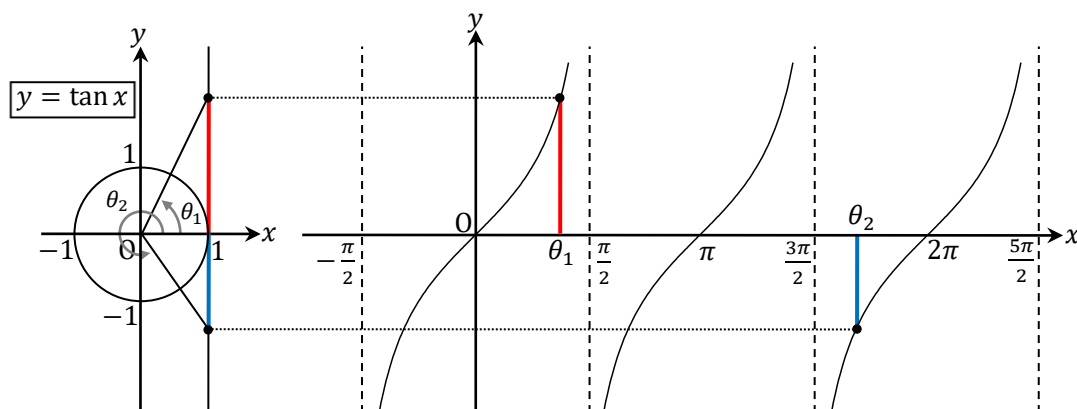
$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow y = \sin x$$

となり、 $y = \sin x$ と一致する。このような形の曲線を**正弦曲線**という。

$y = f(x)$ を x 軸方向に a ,
 y 軸方向に b 平行移動
 $y - b = f(x - a)$

○ $y = \tan x$ のグラフ

$y = \tan x$ のグラフは直線 $x = 1$ 上の点の y 座標の変化を見ることができている。



x が $\frac{\pi}{2}$ に近づくと $\tan x$ の値は限りなく大きくなるが、そのとき値は存在しないため、そこでグラフ

が切れる。このとき、直線 $x = \frac{\pi}{2}$ を $y = \tan x$ の**漸近線**という。漸近線は $x = \frac{\pi}{2}$ から π おきに現れる。

○ 三角関数のグラフ特徴

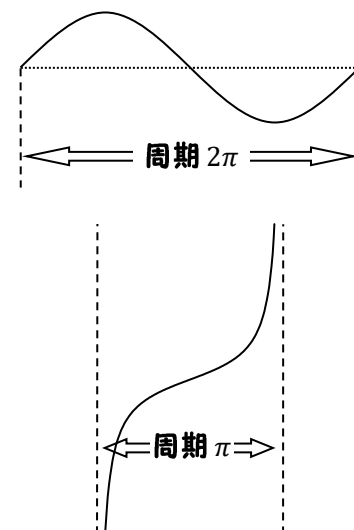
周期性

$y = \sin x$, $y = \cos x$ のグラフは 2π おきに同じ形が繰り返される。
 このような関数を**周期関数**といい、 $y = \sin x$, $y = \cos x$ の周期は 2π である。同様に、 $y = \tan x$ は π おきに同じ形が繰り返されるのでその周期は π である。

これらのことは、次の公式

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \tan(x + \pi) = \tan x$$

からも、その周期を確認することができる。



一般的に関数 $y = f(x)$ において、0 でない定数を k があって

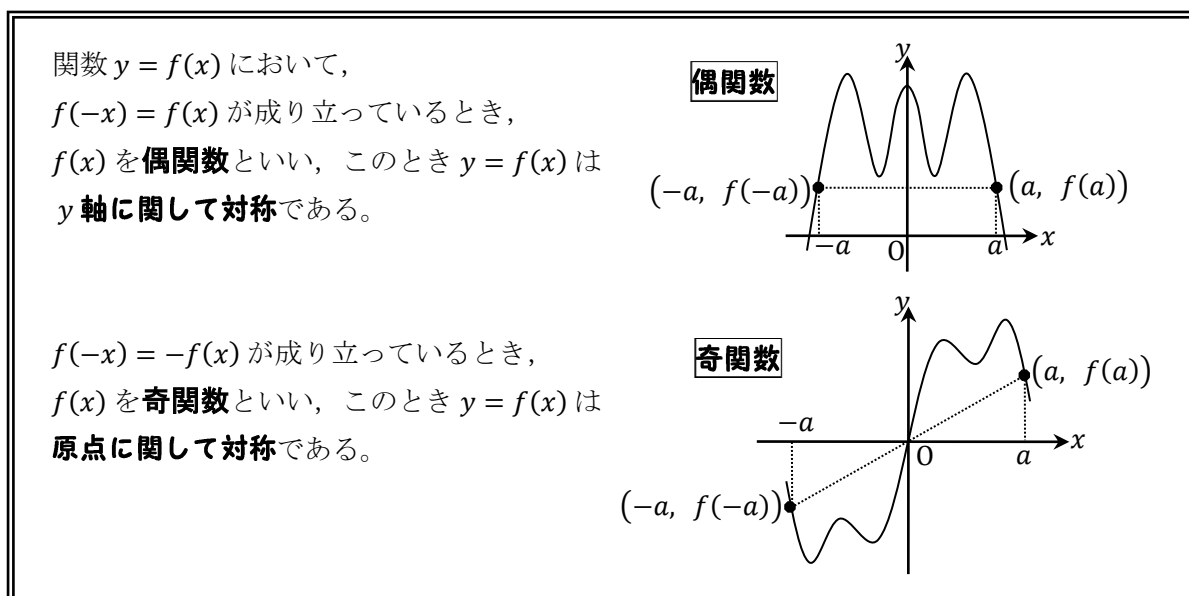
$$f(x + k) = f(x)$$

が成立しているとき、 $y = f(x)$ は周期関数であり、その周期は k であるという。周期が k であるとき、その定数倍も周期となるが、一般的に**周期とは、正の周期のうちの最小のものを選ぶものとする。**

対称性

$y = \sin x$, $y = \tan x$ は**原点对称**、 $y = \cos x$ は **y 軸対称**のグラフである。

この対称性に関しては一般的に次のようにまとめることができる。



三角関数の性質から

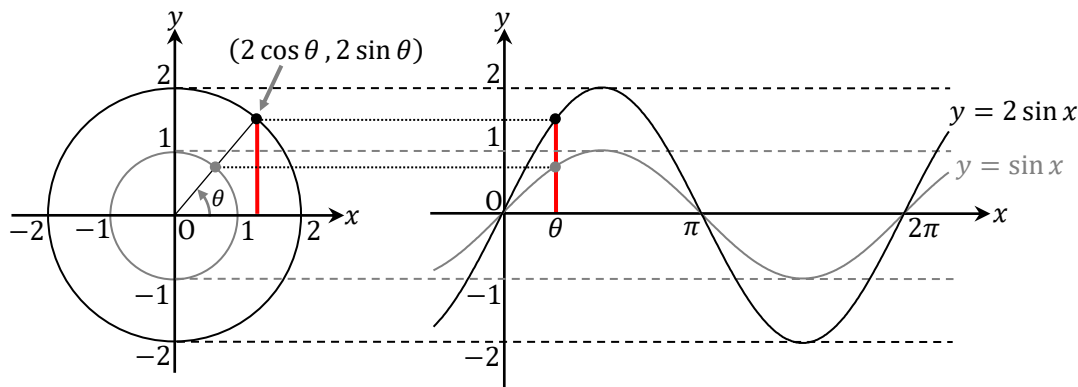
$\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$ より、 $y = \sin x$, $y = \tan x$ は奇関数

$\cos(-x) = \cos x$ より、 $y = \cos x$ は偶関数となることが分かる。

○ いろいろな三角関数

$y = 2 \sin x$ のグラフ

原点中心で半径が2の円周上の点が $(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ と表されるので、その点の y 座標を見ることでグラフをかくことができる。

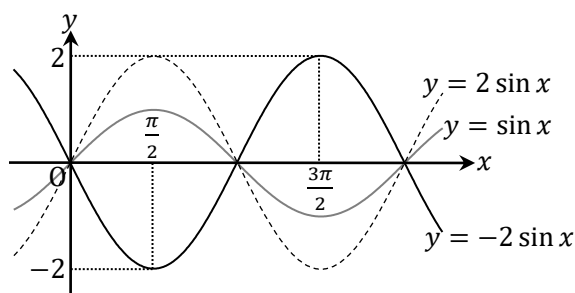


なお、 $y = -2 \sin x$ のグラフは、 $y = 2 \sin x$ を x 軸に関して対称移動したグラフとなる。

一般的に $y = a \sin x$ のグラフは…

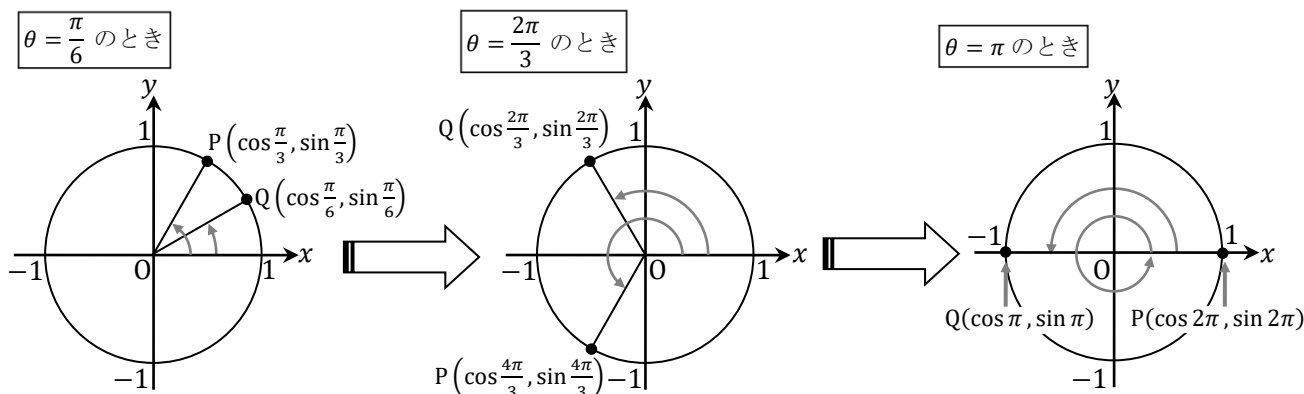
- $a > 0$ のとき、 $y = \sin x$ を y 軸方向に a 倍したもの
- $a < 0$ のとき、 $y = \sin x$ を y 軸方向に $|a|$ 倍し、さらに x 軸に関して対称移動したもの

となる。



$y = \sin 2x$ のグラフ

$(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ は単位円周上の点である。この点の動きを見ることで $y = \sin 2x$ のグラフをかくことができる。 $P(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $Q(\cos \theta, \sin \theta)$ とおき、具体的に点を動かしてみよう。



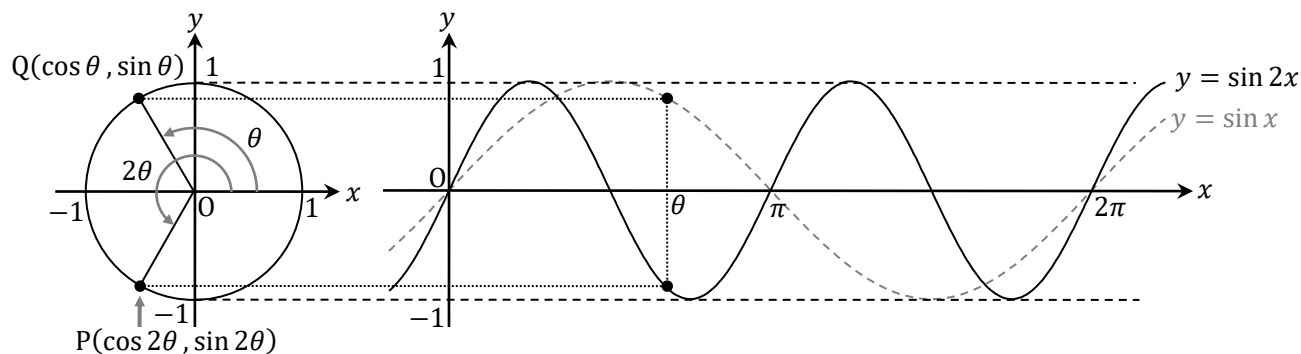
これを見てわかる通り、点 P は点 Q に比べると単位円周上を **2 倍の早さ** で動く。

つまり、単位円周上を点 Q が半周動く間に、点 P は **1 周** 動く。

よって、 $y = \sin x$ を半周期分描く間に、 $y = \sin 2x$ は **1 周期** 分描かれる。

このことから、 $y = \sin 2x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍したものとなる。

このことから、グラフは下図の実線となる。



一般的に $y = \sin ax$ ($a > 0$) のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{a}$ 倍したものとなり、

周期は $\frac{2\pi}{a}$ となる。

例1 関数 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ のグラフをかきなさい。また、その周期を求めなさい。

与えられたグラフをいきなり描こうとせずに、いくつかの手順に分け、少しずつ描いていきます。

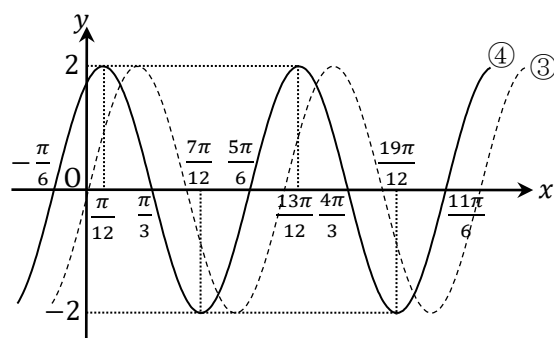
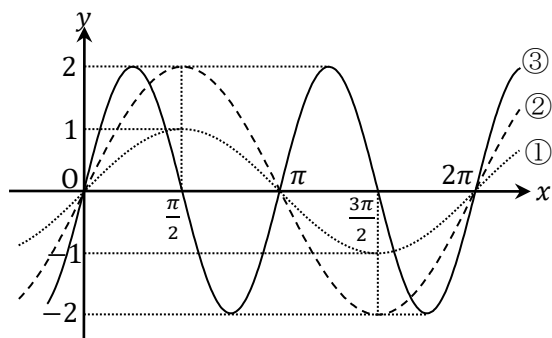
《手順1》 $y = \sin x$ …①のグラフをかく。

《手順2》 ①を y 軸方向に2倍する ($y = 2 \sin x$ …②)。

《手順3》 ②を x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍する ($y = 2 \sin 2x$ …③)。

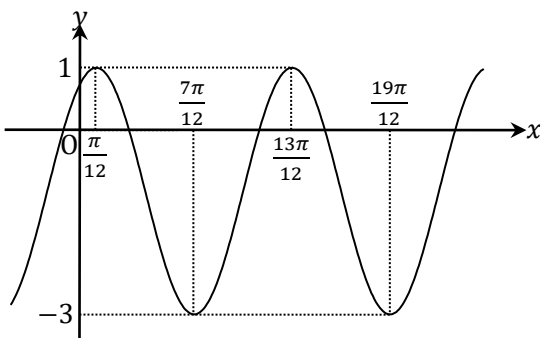
《手順4》 ③を x 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$ 平行移動する。 ($y = 2 \sin\left\{2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right\}$ …④)。

《手順5》 ④を y 軸方向に -1 平行移動する。 ($y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$)。



なお、周期の変化は上記の《手順3》の際に起こる。

つまり、 $2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$ となる。



なお、《手順3》, 《手順4》を入れ替えて、次のようにしてもよい。

《手順3》②を x 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ 平行移動する。 $(y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) \dots \textcircled{3})$ 。

《手順4》③を x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍する $(y = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \dots \textcircled{4})$ 。

ただし、このときは先ほどと平行移動する幅が違うので注意してほしい。

例題9 $y = \sin \theta$ のグラフをもとに、次の関数のグラフをかきなさい。また、その周期を求めなさい。

(1) $y = \sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ (2) $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ (3) $y = \sin \frac{\theta}{2}$

練習9 次の関数のグラフをかきなさい。また、その周期を求めなさい。

(1) $y = \cos(\theta + \frac{\pi}{3})$ (2) $y = \sin \theta + 2$ (3) $y = 2 \tan \theta$ (4) $y = \cos 2\theta$

例題10 関数 $y = 2 \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6})$ のグラフをかきなさい。また、その周期を求めなさい。

練習10 次の関数のグラフをかきなさい。また、その周期を求めなさい。

(1) $y = 2 \cos(2\theta - \pi)$ (2) $y = \frac{1}{2} \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})$

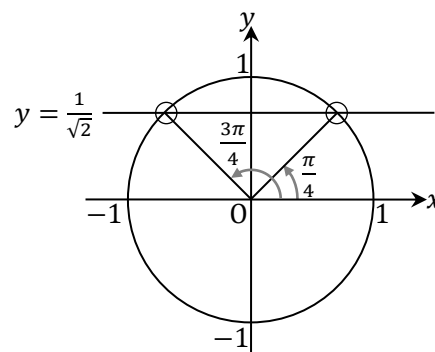
§4 三角方程式・不等式

ここでは $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を含んだ方程式・不等式の解法について学んでいきましょう。

例2 $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解きなさい。

単位円周上の点の y 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ になるところを探せばよい。

右図より, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\pi$

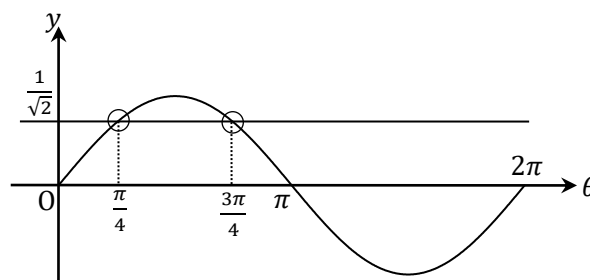


この方程式の解は,

$y = \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の交点の

x 座標となるので, 右図のようになります。

方程式の解をグラフで考えていくのは大切ですので, 少しずつ慣れていく必要があるでしょう。



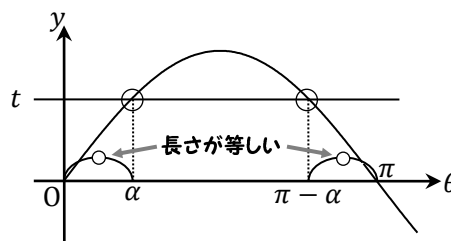
なお, グラフを用いて値を読んでいく場合は,

グラフの対称性を用いると簡単です。

例えば, 方程式 $\sin \theta = t$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の1つの解が

$\theta = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) と分かったならば, 対称性から,

$\theta = \pi - \alpha$ も解になるというわけです。



仮に, この問題で θ に範囲がない場合, 三角関数の周期性から解は無数に現れる。

$\sin \theta$ の周期が 2π であることから,

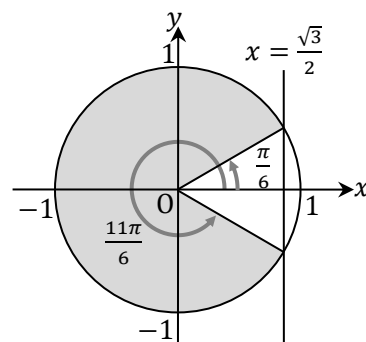
$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

と表すことができ, これを**一般解**という。

例3 $\cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解きなさい。

単位円周上の点の x 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 以下になるところを探せばよい。

右図より、 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$

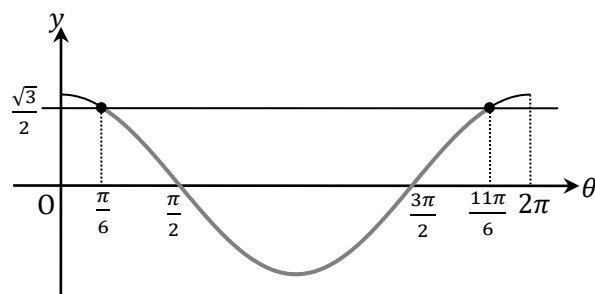


これも**例2**と同様にグラフを用いて考えると、下図のようになります。

なお、 $y = \cos \theta$ と $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の交点の x 座標の

1つが $\theta = \frac{\pi}{6}$ と分かれば、残りは対称性から

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ と読み取ることができます。



方程式・不等式を解く際には、単位円を用いても構わないのですが、そもそも『方程式の解』とは、グラフの『交点の x 座標』を表すので、グラフを用いて解をとらえる方が自然と言えます。よって今後、方程式を解く際には、グラフを用いて考えていきます。

例題11 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解きなさい。また、その一般解を求めなさい。

(1) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$

(2) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan \theta = -\sqrt{3}$

練習11 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解きなさい。また、その一般解を求めなさい。

(1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sqrt{2} \cos \theta - 1 = 0$

(3) $\sqrt{3} \tan \theta = -1$

(4) $\sin \theta = -1$

(5) $\cos \theta = 0$

(6) $\tan \theta = 0$

例題12 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解きなさい。

(1) $\sin \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan \theta \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

練習12 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解きなさい。

(1) $\sqrt{2} \cos \theta > -1$

(2) $\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan \theta \leq \sqrt{3}$

○ 置き換えによる解法

例 4 $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解きなさい。

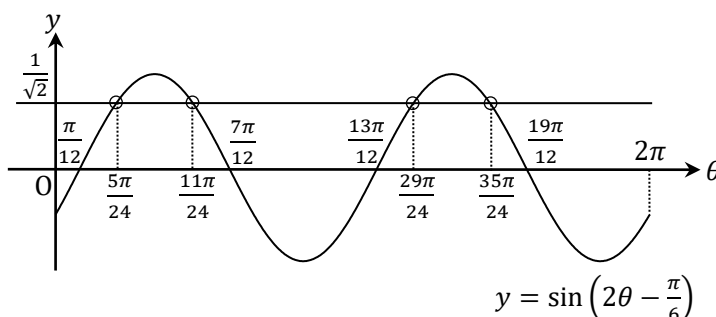
この場合、 $y = \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ と $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の交点

を考えればよいが、この方法だと

- ① グラフをかくのに時間がかかる。
- ② 交点の x 座標の値が分かりづらい。

などの問題がある。

そこで、この問題では置き換えをすることで解いていきます。



$$2\theta - \frac{\pi}{6} = t \text{ とおくと, } \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} \dots (*)$$

$$\text{このとき, } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{23\pi}{6}$$

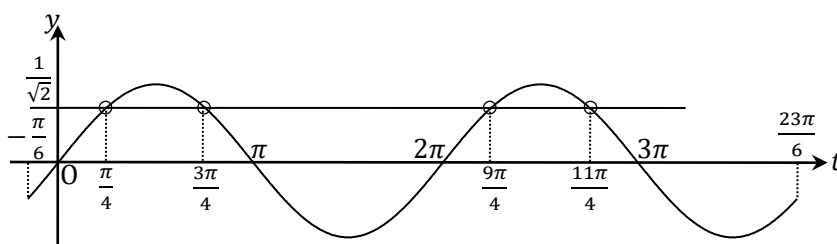
右図より,

$$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$$

θ に戻して,

$$2\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}, \frac{35\pi}{24}$$



置き換えをしたら、新しい文字の範囲を必ず考えるようにしましょう。

なお、方程式(*)の解の1つが $t = \frac{\pi}{4}$ と分かれば、残りの解は以下のように求めることができます。

$$\text{対称性から, } t = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{周期性から, } t = \frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{3\pi}{4} + 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$$

例題 13 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解きなさい。

(1) $\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

(2) $2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$

練習 10 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式・不等式を解きなさい。

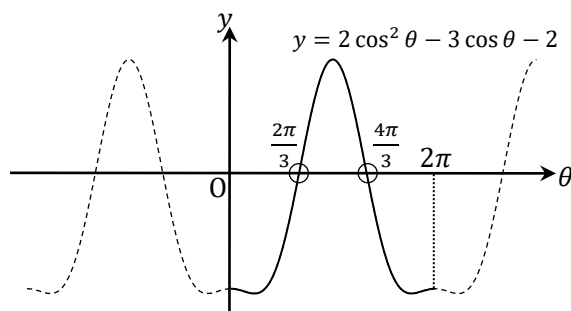
(1) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$

(2) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$

(3) $\sqrt{2} \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) > 1$

例5 $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解きなさい。

この場合、 $y = 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2$ と x 軸の交点を考えればよいが、このグラフは数Ⅲの知識がないとかくことができません。そこで、ここでも置き換えをすることで解いていきます。



$\cos\theta = t$ とおく。

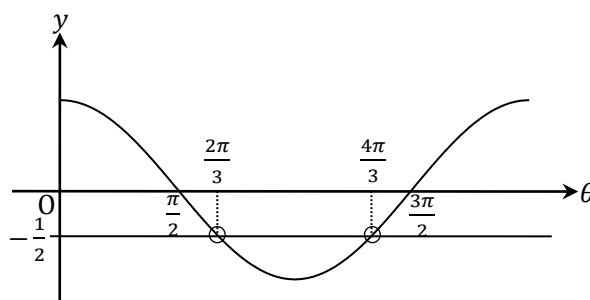
このとき、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $-1 \leq t \leq 1$

これより、

$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0 &\Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2t+1)(t-2) = 0 \end{aligned}$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{ より、} t = -\frac{1}{2}$$

$$\text{よって、} \cos\theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$



例題14 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解きなさい。

(1) $2\cos^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

(2) $2\sin^2\theta + 5\cos\theta - 4 > 0$

練習14 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解きなさい。

(1) $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

(2) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

(3) $2\cos^2\theta + \sin\theta - 2 \leq 0$

(4) $2\sin\theta \tan\theta = -3$

例題15 θ の方程式 $\sin^2\theta + a\cos\theta - 2a - 1 = 0$ を満たす θ があるような定数 a の値の範囲を求めなさい。

練習15 θ の方程式 $2\cos^2\theta + 2k\sin\theta + k - 5 = 0$ を満たす θ があるような定数 k の値の範囲を求めなさい。

例題16 a は定数とする。 θ に関する方程式 $\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0$ について、次の問いに答えなさい。

ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) この方程式が解をもつための a の条件を求めなさい。

(2) この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べなさい。

練習16 θ に関する方程式 $2\cos^2\theta - \sin\theta - a - 1 = 0$ の解の個数を、定数 a の値の範囲によって調べなさい。

ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

§5 三角関数の最大・最小

例6 関数 $y = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$) の最大値, 最小値を求めなさい。

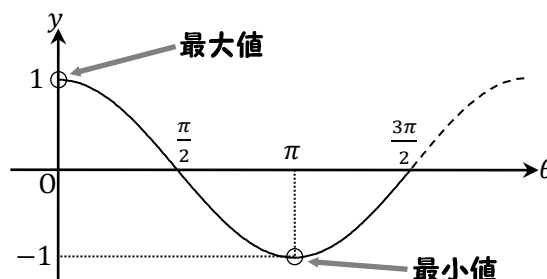
グラフは右図のようになる。

これより,

最大値 1 ($\theta = 0$)

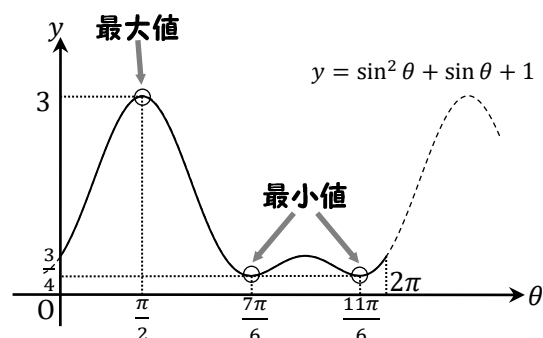
最小値 -1 ($\theta = \pi$)

となる。



例7 関数 $y = \sin^2 \theta + \sin \theta + 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値, 最小値を求めなさい。

この問題の場合, グラフをかくには数Ⅲの知識が必要になります。よって, ここでも置き換えによる解法を用いていきます。



$\sin \theta = t$ とおく。このとき, $0 \leq \theta < 2\pi$ より, $-1 \leq t \leq 1$

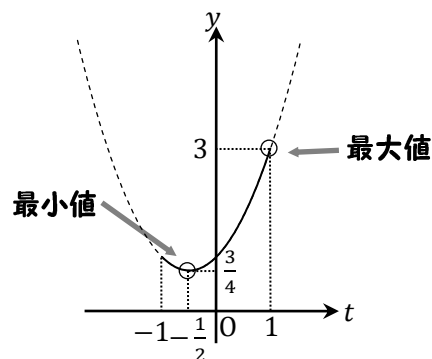
よって,

$$y = \sin^2 \theta + \sin \theta + 1 \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \Leftrightarrow y = t^2 + t + 1 \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$y = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ より,}$$

$t = 1$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき, 最大値 3

$t = -\frac{1}{2}$ すなわち $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ のとき, 最小値 $\frac{3}{4}$



例題 17 関数 $y = 4 \sin^2 \theta - 4 \cos \theta + 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値と最小値を求めなさい。また、そのときの θ の値を求めなさい。

練習 17 関数 $y = \cos^2 \theta + \sin \theta - 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値と最小値を求めなさい。また、そのときの θ の値を求めなさい。

例題 18 $y = 2a \cos \theta + 2 - \sin^2 \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値を a の式で表しなさい。

練習 18 $y = \cos^2 \theta + a \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) の最大値を a の式で表しなさい。

§ 6 加法定理

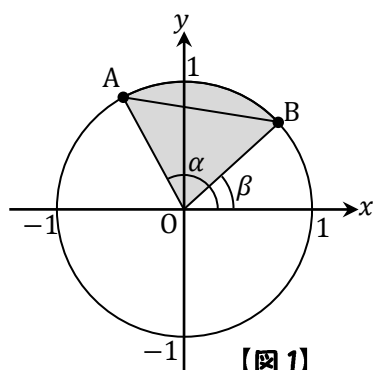
ここでは**加法定理**という、とても大切な定理を学んでいきます。今後、この定理を用いて様々な公式を導くこととなりますので、確実に覚えておきましょう。

まず、正弦・余弦の加法定理とは次のような定理である。

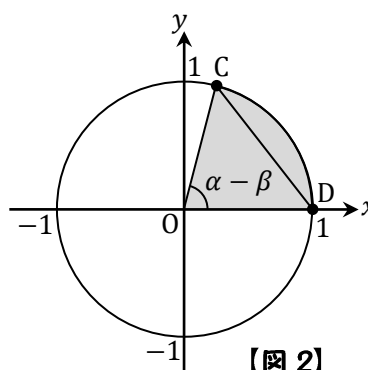
◆ 正弦・余弦の加法定理 ◆

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \textcircled{2} \quad & \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

証明



【図 1】



【図 2】

【図 1】において、 $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B(\cos \beta, \sin \beta)$ より

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta} \\ &= \sqrt{2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)} \end{aligned}$$

【図 2】において、 $C(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$, $D(1, 0)$ より

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{\{1 - \cos(\alpha - \beta)\}^2 + \sin^2(\alpha - \beta)} \\ &= \sqrt{1 - 2 \cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

$$AB = CD \text{ より } \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \quad \dots \textcircled{1}$$

①において、 β を $-\beta$ に置き換えると

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) \Leftrightarrow \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

①, ②において、 α を $\frac{\pi}{2} - \alpha$ に置き換えると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta \Leftrightarrow \boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta \Leftrightarrow \boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}$$

正接の加法定理は次のようになる。

正接の加法定理

$$\textcircled{3} \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

証明

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} & \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

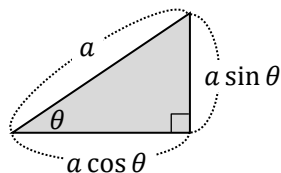
よって、
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

β を $-\beta$ に置き換えると

$$\tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} \Leftrightarrow \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

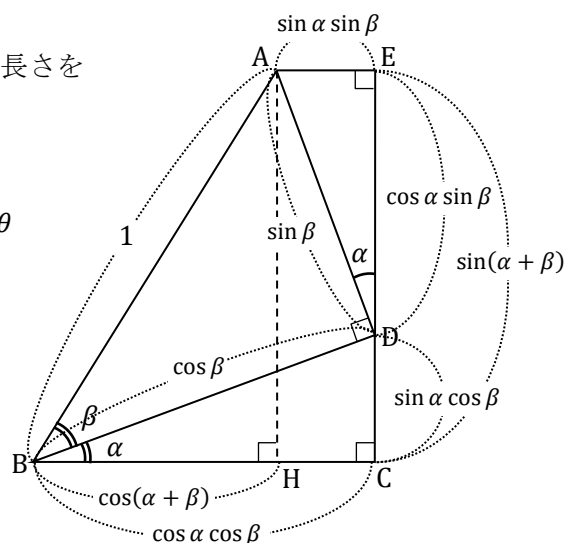
一般性には欠けるが右図に含まれる4つの直角三角形の辺の長さを考えていけば、 $\cos(\alpha + \beta)$ 、 $\sin(\alpha + \beta)$ を導くことができる。

直角三角形の3つの辺の関係は右のようになっているので、



$$EC = ED + DC \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$BH = BC - AE \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$



ちなみに、この加法定理を用いると

$$\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

というように、今まで求めることができなかった三角関数の値も求められるようになる。

例題 19 加法定理を用いて、次の値を求めなさい。

(1) $\sin 15^\circ$

(2) $\tan 75^\circ$

(3) $\cos \frac{\pi}{12}$

練習 19 加法定理を用いて、次の値を求めなさい。

(1) $\sin 105^\circ$

(2) $\cos 165^\circ$

(3) $\tan \frac{7\pi}{12}$

例題 20(1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$ のとき, $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$ の値をそれぞれ求めなさい。

(2) $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{5}{4}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{5}{4}$ のとき, $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めなさい。

練習 20(1) α は鋭角, β は鈍角とする。 $\tan \alpha = 1$, $\tan \beta = -2$ のとき, $\tan(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ の値をそれぞれ求めなさい。

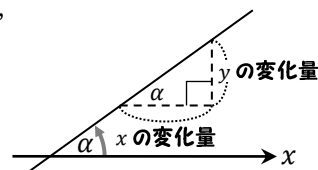
(2) $2(\sin x - \cos y) = \sqrt{3}$, $\cos x - \sin y = \sqrt{2}$ のとき, $\sin(x + y)$ の値を求めなさい。

例 8 2直線 $y = \frac{1}{3}x + 1$, $y = 2x - 1$ のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) を求めなさい。

直線 $y = ax + b$ と x 軸の正の向きとのなす角を右図のように α とおくと、

$$a = \frac{(y \text{ の変化量})}{(x \text{ の変化量})} = \tan \alpha$$

となります。これを用いて解いてみましょう。



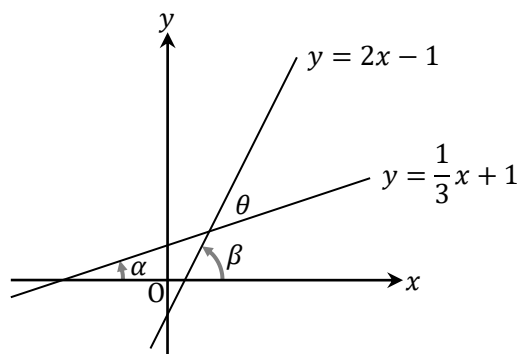
$y = \frac{1}{3}x + 1$, $y = 2x - 1$ と x 軸の正の向きとのなす角を

それぞれ, α , β とすると, $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan \beta = 2$ 。

$\theta = \beta - \alpha$ より, $\tan \theta = \tan(\beta - \alpha)$

$$= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $\theta = \frac{\pi}{4}$



例題 21(1) 2直線 $\sqrt{3}x - 2y + 2 = 0$, $3\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ のなす鋭角 θ を求めなさい。

(2) 直線 $y = 2x - 1$ と $\frac{\pi}{4}$ の角をなす直線の傾きを求めなさい。

練習 21(1) 2直線 $x + 3y - 6 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$ のなす鋭角 θ を求めなさい。

(2) 直線 $y = -x + 1$ と $\frac{\pi}{3}$ の角をなし, 点 $(1, \sqrt{3})$ を通る直線の方程式を求めなさい。

例題 22 点 $P(3, 1)$ を, 点 $A(1, 4)$ を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点を Q とする。

(1) 点 A が原点 O に移るような平行移動により, 点 P が点 P' に移るとする。点 P' を原点 O を中心として,

$\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 Q' の座標を求めなさい。

(2) 点 Q の座標を求めなさい。

練習 22(1) 点 $P(-2, 3)$ を, 原点を中心として $\frac{5\pi}{6}$ だけ回転させた点 Q の座標を求めなさい。

(2) 点 $P(3, -1)$ を, 点 $A(-1, 2)$ を中心として $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 Q の座標を求めなさい。

§7 2倍角, 3倍角, 半角の公式

ここでは、加法定理より導かれる様々な公式を紹介していく。重要なことは公式を覚えるのではなく、**導かれる過程**をしっかりと見ておくことです。必ず、自ら手を動かして確認してみてください。

○ 2倍角の公式

② 2倍角の公式

- ① $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- ② $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- ③ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

証明 加法定理の $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$ の β を α に変換すればよい。

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \Leftrightarrow \boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \Leftrightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \text{ より, } \boxed{\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \text{ より, } \boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha}$$

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} \Leftrightarrow \boxed{\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}$$

○ 3倍角の公式

③ 3倍角の公式

- ① $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
- ② $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

証明 加法定理の $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ の β を 2α に変換すればよい。

$$\sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha$$

$$= \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \quad \text{よって, } \boxed{\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}$$

$$\cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha$$

$$= \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \quad \text{よって, } \boxed{\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}$$

○ 半角の公式

左辺が□²になっているのが特徴の公式です。

● 半角の公式 ●

$$\textcircled{1} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \textcircled{2} \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \textcircled{3} \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

証明 これはコサインの2倍角の公式から導くことができる

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 \Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\beta}{2}$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta \Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{1 - \cos 2\beta}{2}$$

ここで、 $\beta = \frac{\alpha}{2}$ とすると、 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$

また、 $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ より、 $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$

例9 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ ($t \neq \pm 1$) のとき次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

これは三角関数を有理関数にする有名な置き換えです。まずは、倍角の公式を使っていきましょう。

解①

$$\tan \theta = \tan 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cos \theta = \cos 2 \cdot \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\sin \theta = \cos \theta \cdot \tan \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

次に図形的な性質を用いて解いてみます。

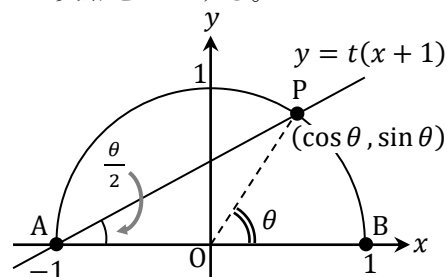
解②

点A(-1, 0)を通り、傾きtの直線 $y = t(x+1)$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点をPとする。

$\angle PAB = \frac{\theta}{2}$ となるので、円周角の定理より、 $\angle POB = \theta$

よって、点Pの座標は $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と表せる。

つまり、直線 $y = t(x+1)$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点の座標を求めればよいことが分かる。



2式から y を消去すると,

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow (1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\{(1+t^2)x + t^2 - 1\} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

このとき, $y = 0, \frac{2t}{1+t^2}$

$$\text{よって, } \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{これより, } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

例題 23 (1) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき, $\cos 2\theta, \sin 2\theta, \tan \frac{\theta}{2}$ の値を求めなさい。

(2) $t = \tan \frac{\theta}{2}$ のとき, 次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2} \quad (t \neq \pm 1)$$

練習 23 (1) $0 < \alpha < \pi$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ のとき, $2\alpha, \frac{\alpha}{2}$ の正弦, 余弦, 正接の値を求めなさい。

(2) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ のとき, $\cos \theta, \tan \theta, \tan 2\theta$ の値を求めなさい。

例題 24 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解きなさい。

(1) $\sin 2\theta = \cos \theta$

(2) $\cos 2\theta - 3\cos \theta + 2 \geq 0$

練習 24 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解きなさい。

(1) $\sin 2\theta - \sqrt{2}\sin \theta = 0$

(2) $\cos 2\theta + \cos \theta + 1 = 0$

(3) $\cos 2\theta - \sin \theta \leq 0$

例題 25 半径 1 の円に内接する正五角形 ABCDE の 1 辺の長さを a とし, $\theta = \frac{2}{5}\pi$ とする。

(1) 等式 $\sin 3\theta + \sin 2\theta = 0$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) $\cos \theta$ の値を求めなさい。

(3) a の値を求めなさい。

(4) 線分 AC の長さを求めなさい。

練習 25 (1) $\theta = 36^\circ$ のとき, $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ が成り立つことを示し, $\cos 36^\circ$ の値を求めなさい。

(2) $\theta = 18^\circ$ のとき, $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ が成り立つことを示し, $\sin 18^\circ$ の値を求めなさい。

§8 三角関数の合成

$\sin(\alpha + \beta)$ を $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ とするのが加法定理でしたが、ここでは逆に $a \sin \theta + b \cos \theta$ というような形が与えられたときに $\sin(\theta + \circ)$ にする方法を考えてみましょう。

この操作のことを**三角関数の合成**といいます。

$$\sin(\alpha + \beta) \xrightleftharpoons[\text{合成}]{\text{加法定理}} \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

では、さっそく考えていきましょう。

ここでの目標は $a \sin \theta + b \cos \theta$ を $\sin(\theta + \circ)$ に変形することです。

加法定理から、 $\sin(\theta + \circ) = \sin \theta \cos \circ + \cos \theta \sin \circ$ となるので、

$$a \Rightarrow \cos \circ, \quad b \Rightarrow \sin \circ$$

という置き換えができればよさそうです。

このことをふまえて合成の手順を見ていきましょう。

合成の手順

- ① 座標平面上に点 $P(a, b)$ をとる。

必ず $\cos \circ$ に置き換えた方を x 座標、 $\sin \circ$ 置き換えたい方を y 座標にする。

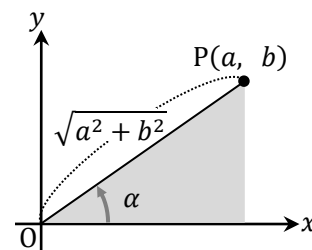
- ② 線分 OP が x 軸の正の方向となす角を α とする。

$OP = \sqrt{a^2 + b^2}$ より、 $a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha$ 、 $b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha$ が成立。

なお、角 α は必ず左回り正の向きとする。

- ③ ②でできた関係式を $a \sin \theta + b \cos \theta$ に代入し、加法定理を利用する。

$$\begin{aligned} a \sin \theta + b \cos \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha \sin \theta + \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha \cos \theta \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \quad (\text{合成終了!}) \end{aligned}$$



では、具体的にいくつか例を見ていきましょう。

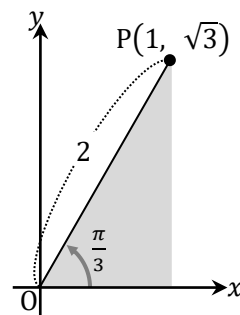
例10 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を合成しなさい。

点 $P(1, \sqrt{3})$ をとる。このとき、 $OP = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

また、 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ より、 $1 = 2 \cos \frac{\pi}{3}$ 、 $\sqrt{3} = 2 \sin \frac{\pi}{3}$

以上より、 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{3} \sin \theta + 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \theta$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin \theta + \sin \frac{\pi}{3} \cos \theta \right) = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$



実際は…

今の例を見ても分かる通り、

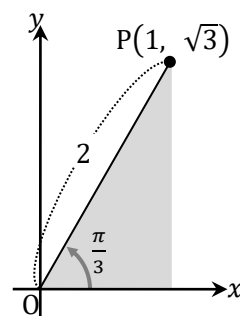
$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = OP \sin(\theta + \alpha)$$

となっているので、合成をするには OP と α の値さえ分かればよいことが分かります。

点 $P(1, \sqrt{3})$ をとる。

このとき、 $OP = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ 、 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ となるので、

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$



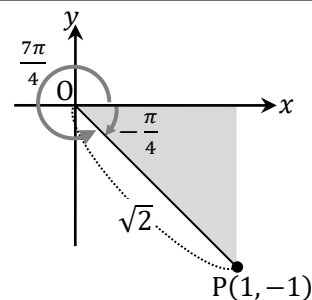
最初のうちは、合成の手順をしっかりと踏まえて変形していく必要がありますが、慣れてきたら、上記の解答ぐらいに手早く終わらせるようにしましょう。

例 11 $\sin \theta - \cos \theta$ を合成しなさい。

点 $P(1, -1)$ をとる。

このとき、 $OP = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ 、 $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ となるので、

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$$



この場合、角度を左回りにとると、 $\frac{7\pi}{4}$ となるが、右回りにとると $-\frac{\pi}{4}$ となるので、

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

としてもかまいません。

一般的に角度は $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ の範囲にしておいた方が扱う値が小さくなるので便利です。

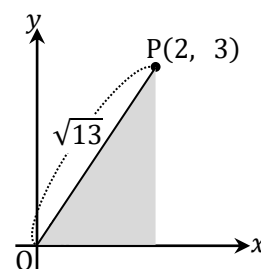
例 12 $2 \sin \theta + 3 \cos \theta$ を合成しなさい。

点 $P(2, 3)$ をとる。このとき、 $OP = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

x 軸の正の向きと OP のなす角を α とすると、

$$2 \sin \theta + 3 \cos \theta = \sqrt{13} \sin(\theta + \alpha)$$

ただし、 $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$



このように、角度 α がいつもきれいに求まるとは限りません。このようなときは、角度を文字でおき、最後に、その角がどのような値か説明するために、サインとコサインの値を求めておきます。

○ $\cos(\theta + \circ)$ への合成

基本的に $\sin(\theta + \circ)$ への合成ができれば十分ですが、コサインの加法定理もあるので、当然 $\cos(\theta + \circ)$ へ合成することもできます。

ここでこの目標は $a \sin \theta + b \cos \theta$ を $\cos(\theta + \circ)$ に変形することです。

加法定理から、 $\cos(\theta + \circ) = \cos \theta \cos \circ - \sin \theta \sin \circ$ となるので、今回は、

$$a \Rightarrow \sin \circ, b \Rightarrow \cos \circ$$

という置き換えができればよさそうです。

このことをふまえてコサインへの合成の手順を見ていきましょう。

コサインへの合成の手順

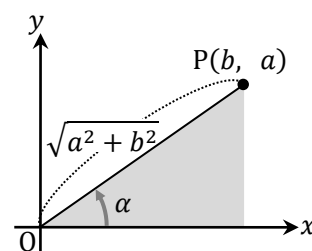
① 座標平面上に点 $P(b, a)$ をとる。 ← 先ほどと逆になる

② 線分 OP が x 軸の正の部分となす角を α とする。

$OP = \sqrt{a^2 + b^2}$ より、 $a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha$, $b = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha$ が成立。

③ ②でできた関係式を $a \sin \theta + b \cos \theta$ に代入し、加法定理を利用する。

$$\begin{aligned} a \sin \theta + b \cos \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha \sin \theta + \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha \cos \theta \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \alpha) \quad (\text{合成終了!}) \end{aligned}$$



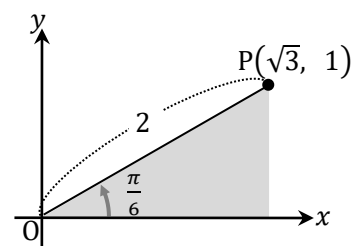
例 13 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を $r \cos(\theta + \alpha)$ の形に表しなさい。

点 $P(\sqrt{3}, 1)$ をとる。このとき、 $OP = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

また、 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ より、 $\sqrt{3} = 2 \cos \frac{\pi}{6}$ 、 $1 = 2 \sin \frac{\pi}{6}$

以上より、 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin \theta + 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \theta$

$$= 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \sin \theta + \cos \frac{\pi}{6} \cos \theta \right) = 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$$

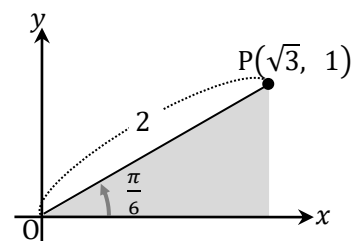


コサインの合成も、サインの合成と同様に、 OP となす角 α が分かれば合成できるので、以下のように手早く終わらせるが望ましい。

点 $P(\sqrt{3}, 1)$ をとる。

このとき、 $OP = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ 、 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ となるので、

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$$



例題 26 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に表しなさい。ただし、 $r > 0$ 、 $-\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

- (1) $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta$ (2) $\sin \theta - \cos \theta$ (3) $2 \sin \theta + 3 \cos \theta$

練習 26 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に表しなさい。ただし、 $r > 0$ 、 $-\pi < \alpha \leq \pi$ とする。

- (1) $\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta$ (2) $\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$ (3) $4 \sin \theta + 7 \cos \theta$

例題 27 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、次の方程式・不等式を解きなさい。

- (1) $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta + 1 = 0$ (2) $\cos 2\theta + \sin 2\theta + 1 > 0$

練習 27 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式・不等式を解きなさい。

- (1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = \sqrt{3}$ (2) $\cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta - 1 > 0$

例題 28 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。また、そのときの θ の値を求めなさい。
ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

$$(1) y = \cos \theta - \sin \theta \qquad (2) y = \sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right) - \cos \theta$$

練習 28 次の関数の最大値と最小値を求めなさい。また、そのときの θ の値を求めなさい。
ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

$$(1) y = \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta \qquad (2) y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \sin \theta$$

例題 29 関数 $f(\theta) = \sin 2\theta + 2(\sin \theta + \cos \theta) - 1$ を考える。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと、 $f(\theta)$ を t の式で表しなさい。
- (2) t のとりうる値の範囲を求めなさい。
- (3) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求め、そのときの θ の値を求めなさい。

練習 29 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき

- (1) $t = \sin \theta - \cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めなさい。
- (2) 関数 $y = \cos \theta - \sin 2\theta - \sin \theta + 1$ の最大値と最小値を求めなさい。

例題 30 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、関数 $y = \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$ の最大値と最小値を求めなさい。

また、そのときの θ の値を求めなさい。

練習 30 関数 $y = \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + 3 \sin^2 \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値と最小値を求めなさい。

また、そのときの θ の値を求めなさい。

例題 31 実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき、 $3x^2 + 2xy + y^2$ の最大値と最小値を求めなさい。

練習 31 平面上の点 $P(x, y)$ が単位円周上を動くとき、 $15x^2 + 10xy - 9y^2$ の最大値と、最大値を与える点 P の座標を求めなさい。

例題 32 $\triangle ABC$ において、辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c とする。 $\triangle ABC$ が半径 1 の円に内接し、

$\angle A = \frac{\pi}{3}$ であるとき、 $a + b + c$ の最大値を求めなさい。

練習 32 半径 1 の円に内接する $\triangle ABC$ において、 $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ とする。

- (1) $\triangle ABC$ の周の長さ L を $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ で表しなさい。
- (2) $\triangle ABC$ の面積 S を $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ で表しなさい。
- (3) $\triangle ABC$ の内接円の半径 R を $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ で表しなさい。
- (4) γ が一定のとき、 S の最大値とそのときの α , β を γ で表しなさい。
- (5) $\alpha = \beta$ のとき、 R を $\cos \alpha$ で表し、 R の最大値を求めなさい。

例題 33 点 P は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の第 1 象限を動く点であり、点 Q は円 $x^2 + y^2 = 16$ 上の第 2 象限を動く点である。ただし、原点 O に対して、常に $\angle POQ = 90^\circ$ であるとする。また、点 P から x 軸に垂線 PH を下ろし、点 Q から x 軸に垂線 QK を下ろす。更に $\angle POH = \theta$ とする。このとき、 $\triangle QKH$ の面積 S は $\tan \theta = \square$ のとき、最大値 \square をとる。

練習 33 O を原点とする座標平面上に点 $A(-3, 0)$ をとり、 $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲にある θ に対して、次の条件

(a), (b) を満たす 2 点 B , C を考える。

(a) B は $y > 0$ の部分にあり、 $OB = 2$ かつ $\angle AOB = 180^\circ - \theta$ である。

(b) C は $y < 0$ の部分にあり、 $OC = 1$ かつ $\angle BOC = 120^\circ$ である。

ただし、 $\triangle ABC$ は O を含むものとする。

- (1) $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいとき、 θ の値を求めなさい。
- (2) θ を $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で動かすとき、 $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和の最大値と、そのときの $\sin \theta$ の値を求めなさい。

§9 和積変換公式

ここでは三角関数の和から積へ、積から和へ変換する公式を紹介します。これも加法定理から簡単に導くことができるので、公式そのものを暗記するのではなく、その過程をしっかりと確認しておくことが大切です。

積→和の公式

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} & \textcircled{2} \quad \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \\ \textcircled{3} \quad \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} & \textcircled{4} \quad \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \end{aligned}$$

①の証明

加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

2式の辺々の和を考える。

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}}$$

他の公式も同様に加法定理の和、差により示すことができる。

和→積の公式

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} & \textcircled{2} \quad \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \textcircled{3} \quad \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} & \textcircled{4} \quad \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

①の証明

積和の公式より、 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$

ここで、 $\alpha + \beta = A$ 、 $\alpha - \beta = B$ とおくと、 $\alpha = \frac{A+B}{2}$ 、 $\beta = \frac{A-B}{2}$ となるので

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \Leftrightarrow \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \frac{1}{2} (\sin A + \sin B)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}$$

他の公式も同様の変換で示すことができる。

例14 方程式 $\cos 2\theta = \cos \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を解きなさい。

色々な解法が考えられる問題ですが、まずは倍角の公式を用いて解いていきます。

解①

$$\begin{aligned} \cos 2\theta = \cos \theta &\Leftrightarrow 2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0 && \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \\ &\Leftrightarrow (\cos \theta - 1)(2\cos \theta + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = 1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より, } \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

次に、これを和積の公式を用いて解きます。

解②

$$\begin{aligned} \cos 2\theta = \cos \theta &\Leftrightarrow \cos 2\theta - \cos \theta = 0 && \cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ &\Leftrightarrow -2\sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{3\theta}{2} = 0, \sin \frac{\theta}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$0 \leq \frac{3\theta}{2} < 3\pi \text{ より, } \sin \frac{3\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\theta}{2} = 0, \pi, 2\pi \Leftrightarrow \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$0 \leq \frac{\theta}{2} < \pi \text{ より, } \sin \frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$$

$$\text{以上より, } \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

最後に、この問題をもう少し単純にとらえていきます。

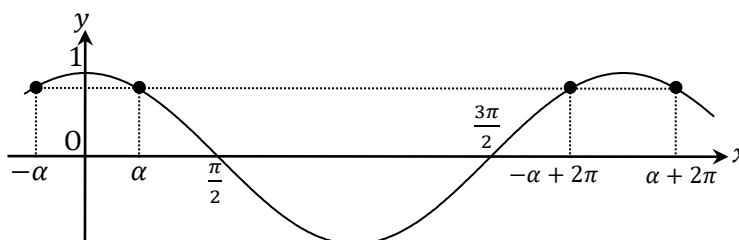
コサインの値が等しい ($\cos \circ = \cos \triangle$) ならば、当然角度も等しくなる ($\circ = \triangle$) だろうということです。しかし、三角関数には周期性・対称性があるので、少し微調整が必要です。

解③

$$\cos 2\theta = \cos \theta \Leftrightarrow 2\theta = \pm\theta + 2n\pi \quad (n: \text{整数})$$

$$\Leftrightarrow \theta = 2n\pi, \frac{2n\pi}{3}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より, } \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$



例題 34 (1) 積→和, 和→積の公式を用いて, 次の値を求めなさい。

(ア) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$ (イ) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ (ウ) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

(2) $\triangle ABC$ において, 次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

練習 34 (1) 積→和, 和→積の公式を用いて, 次の値を求めなさい。

(ア) $\cos 45^\circ \sin 75^\circ$ (イ) $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$ (ウ) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

(2) $\triangle ABC$ において, 次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1$$

例題 35 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, 次の方程式を解きなさい。

$$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$$

練習 35 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, 次の方程式を解きなさい。

$$\cos \theta + \sqrt{3} \cos 4\theta + \cos 7\theta = 0$$

三角関数・公式マップ

①③⑤の
 $\beta \rightarrow \alpha$
にする。

① $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

③ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

⑤ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

② $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

④ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

⑥ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

①③の
 $\beta \rightarrow 2\alpha$
にする。

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$= 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad \dots \textcircled{7}$

$= 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \dots \textcircled{8}$

$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

⑦⑧の
 $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$
にする。

$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$

$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$

$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$

① ± ②, ③ ± ④ より,

積和変換公式

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$

$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$

$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$

 $\alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B$
とおくと,

積和変換公式

$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

三角関数の合成

$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$

$\left(\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

