数　列

§1　数列

　ある規則によって数を並べたものを**数列**といい，数列の各数のことを**項**という。
具体的には以下のようなものである。

①	1，2，4，8，16，32，64，128，256，…
②	1，3，5，7，9，11，13，15，17，…
③	1，4，1，4，2，1，3，5，…
④	2，3，5，7，11，13，17，19，…
⑤	1，1，2，3，5，8，13，21，34，…
⑥	1，2，6，7，11，13，14，17，22，…

○　数列の一般項

　数列の，最初の数から順番に**初項(第 1 項)，第 2 項，第 3 項**，… といい，a_1，a_2，a_3，…のように，文字の横に小さく項の番号を書いて表す。n 番目の項は a_n と表し，これを用いて数列全体を $\{a_n\}$ と表す。この a_n を n の式で表したとき，その式を数列 $\{a_n\}$ の**一般項**という。また，項数が限られている数列(有限数列)の，最後の項を**末項**という。

　上の数列②を例に見てみると…
数列全体が，$\{a_n\}=\{1，3，5，7，9，11，13，15，17，\cdots\}$ と表されるとき，
各項は $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，$a_4=7$，$a_5=9$，… となり，一般項は，$a_n=2n-1$ となる。

　数列を見たとき，多くの人が**「いったいどのような規則で並んでいるのか?」**ということを考えるであろう。このことを，最も簡潔に表しているのが一般項の a_n であり，この分野を通して，この一般項 a_n を求めることが大変重要な課題となってくる。

○　数列の和

　数列を調べていくときに，その和を考えることも大変重要なことである。
一般的に数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和を S_n で表す。つまり，

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_n$$

である。

　例えば，上の数列②の場合，
　　第 2 項目までの和　$1+3=4=2^2$　　　第 3 項目までの和　$1+3+5=9=3^2$
　　第 4 項目までの和　$1+3+5+7=16=4^2$　　　第 5 項目までの和　$1+3+5+7+9=25=5^2$
となっているので，このことから $S_n=n^2$ となることが予想できる。

§2　等差数列

隣り合う項の差が常に一定である数列を**等差数列**という。つまり，記号で表すと

$$a_{n+1}-a_n=d \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1}=a_n+d \quad (d\text{ は定数})$$

となる。この d のことを**公差**という。

○　等差数列の一般項

等差数列は隣り合う項との差が常に d となるので，初項を a とすると

$$\begin{aligned} a_2 &= a+d \\ a_3 &= a+d+d=a+2d \\ a_4 &= a+d+d+d=a+3d \\ a_5 &= a+d+d+d+d=a+4d \end{aligned}$$

$$a_1,\ \underbrace{}_{+d}\ a_2,\ \underbrace{}_{+d}\ a_3,\ \underbrace{}_{+d}\ a_4,\ \underbrace{}_{+d}\ a_5,\ \cdots,\ a_{n-1},\ \underbrace{}_{+d}\ a_n$$

となる。

よって一般項 a_n は d を $n-1$ 回足せばよいので，次のようになる。

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n=a+d(n-1)$$

○　等差数列の和

カール・フリードリヒ・ガウス
(1777–1855)

ドイツの数学者ガウスは小学生のころ，授業中に

「1 から 100 までの数字を全て足しなさい。」

という課題を出されたとき，即座に**「5050」**と答え，教師を驚かせたという エピソードがある。当然，ガウスは 1 から 100 まで地道に足していたのではなく，次のような方法で即座に計算していた。

$$\begin{array}{rrcccccccccccccccc} & S= & \boxed{1} &+& 2 &+& 3 &+& \boxed{4} &+& 5 &+& \cdots &+& 96 &+& 97 &+& 98 &+& 99 &+& \boxed{100} \\ +) & S= & \boxed{100} &+& 99 &+& 98 &+& \boxed{97} &+& 96 &+& \cdots &+& 5 &+& 4 &+& 3 &+& 2 &+& \boxed{1} \\ \hline & 2S= & \multicolumn{21}{l}{\underbrace{101+101+101+101+101+\cdots+101+101+101+101+101}_{100\text{ 個}}} \end{array}$$

よって，$S=10100\div 2=5050$

等差数列の和はまさにこの方法を利用する。初項 a，公差 d の等差数列の第 n 項までの和 S_n とすると，

$$\begin{array}{rrl} & S_n= & a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n \\ +) & S_n= & a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \\ \hline & 2S_n= & \underbrace{(a_n+a)+(a_n+a)+(a_n+a)+\cdots+(a_n+a)+(a_n+a)+(a_n+a)}_{n\text{ 個}} \\ & = & n(a_n+a) \end{array}$$

よって，$S_n=\dfrac{n(a+a_n)}{2}$

つまり，等差数列の和の公式は以下のように表すことができる。

等差数列の和①

等差数列の和 S_n は

$$S_n = \frac{(\text{初項}+\text{末項})\times\text{項数}}{2}$$

また，等差数列の一般項 $a_n = a + d(n-1)$ を用いると，S_n は次のようになる。

$$S_n = \frac{n(a+a_n)}{2} = \frac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

等差数列の和②

初項 a，公差 d の等差数列の第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

○ 調和数列

各項の逆数が等差数列になっている数列を**調和数列**という。つまり，記号で表すと

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = d \quad (d \text{ は定数})$$

となる。調和数列の一般項は $a_1 = \frac{1}{a}$ とすると，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ が初項 a，公差 d の等差数列となるので，

$$\frac{1}{a_n} = a + d(n-1) \iff a_n = \frac{1}{a+d(n-1)}$$

となる。

例1 調和数列 -14，28，7，4，$\cdots$ の一般項 a_n を求めなさい。

各項の逆数 $-\frac{1}{14}$，$\frac{1}{28}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{4}$ $\cdots$ が等差数列となる。

隣り合う項の差が $\frac{3}{28}$ となるので，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ の一般項は

$$\frac{1}{a_n} = -\frac{1}{14} + \frac{3}{28}(n-1) = \frac{3n-5}{28}$$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = \frac{28}{3n-5}$

§3　等比数列

隣り合う項の比が常に一定である数列を**等比数列**という。つまり，記号で表すと

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r \iff a_{n+1}=ra_n \quad (r\text{ は定数})$$

となる。この r のことを**公比**という。

○　等比数列の一般項

等差数列は隣り合う項との比が常に r となるので，初項を a とすると

$$a_2=a\times r=ar$$
$$a_3=a\times r\times r=ar^2$$
$$a_4=a\times r\times r\times r=ar^3$$
$$a_5=a\times r\times r\times r\times r=ar^4$$

$$a_1,\ \underset{\times r}{}\ a_2,\ \underset{\times r}{}\ a_3,\ \underset{\times r}{}\ a_4,\ \underset{\times r}{}\ a_5,\ \cdots,\ a_{n-1},\ \underset{\times r}{}\ a_n$$

となる。よって一般項 a_n は r を $n-1$ 回かければよいので，次のようになる。

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}$$

○　等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和 S_n は次のようにして求める。

（i）　$r=1$ のとき

$$S_n=\underbrace{a+a+a+a+\ \cdots\ +a+a+a+a}_{n\text{ 個}}=na$$

（ii）　$r\neq 1$ のとき

$$\begin{array}{rrl}
 & S_n = & a+ar+ar^2+ar^3+\ \cdots\ +ar^{n-3}+ar^{n-2}+ar^{n-1} \\
+) & rS_n = & \quad\ ar+ar^2+ar^3+\ \cdots\ +ar^{n-3}+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n \\
\hline
 & S_n-rS_n = & a+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -ar^n
\end{array}$$

よって，等比数列の和 S_n は次のようになる。

$$(1-r)S_n=a-ar^n \iff S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の和 S_n は

$$S_n=\begin{cases} na & (r=1) \\ \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r\neq 1)\end{cases}$$

§4　数列の和

ここでは数列の和を表す記号Σの性質について学んでいく。

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和 S_n は記号を用いて次のように表すことができる。

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ \cdots\ + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

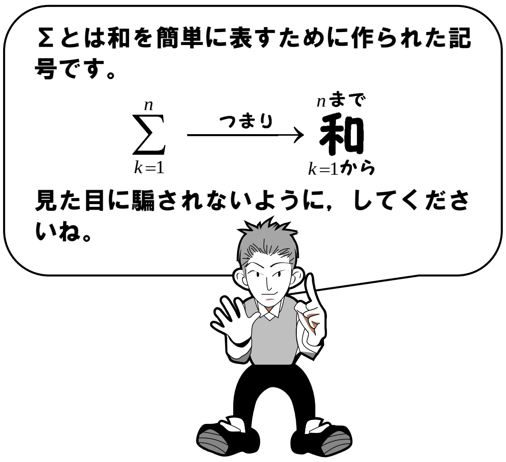
具体的に見ていくと次のようになる。特に 3 番目を見てもらえるとこの記号の便利さが分かるであろう。

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\sum_{l=5}^{10} (3l + 2) = 17 + 20 + 23 + 26 + 29 + 32$$

$$\sum_{m=1}^{100} m^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ \cdots$$

$$+ 95^2 + 96^2 + 97^2 + 98^2 + 99^2 + 100^2$$



○　Σ記号の性質

Σ記号には次のような性質がある。

Σ記号の性質

（ｉ）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

（ⅱ）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$　（c は定数）

これは，記号の意味を考えれば，ごく当たり前の性質である。

証明

（ｉ）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ \cdots\ + (a_n + b_n)$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \ \cdots + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

（ⅱ）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ \cdots + ca_n$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \ \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

○ Σ記号の公式

Σ記号には以下のような公式がある。しっかり覚えて，使えるようにしておこう。

Σ記号の公式

（ｉ） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$ $(c$ は定数$)$　　（ⅱ） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

（ⅲ） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　（ⅳ） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

証明

（ｉ） Σ記号の中が定数の場合はその数を n 回足したものになる。つまり，

$$\sum_{k=1}^{n} c = \overbrace{c+c+c+\ \cdots\ +c+c+c}^{n\text{個}} = nc$$

（ⅱ） これは，初項 1，公差 1 の等差数列の第 n 項までの和となるので，

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ \cdots\ +n = \frac{n(n+1)}{2}$$

（ⅲ） この和は

$$(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1 \quad \Leftrightarrow \quad (k+1)^3-k^3 = 3k^2+3k+1$$

であることを利用して求める。これを用いると，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\} = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) \quad \cdots(*)$$

ここで，左辺の和を考えると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\} &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n}k^3 \quad (\because \Sigma\text{記号の性質(ｉ)})\\ &= \{2^3+3^3+\ \cdots\ +n^3+(n+1)^3\}-(1^3+\ 2^3+3^3+\ \cdots\ +n^3)\\ &= (n+1)^3-1\end{aligned}$$

よって，$(*)$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle (n+1)^3-1 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}k^2 &= \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-1-3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1\right\}\\ &= \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-1-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}\\ &= \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}\right\}\\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

証明

(ⅳ)　この和は(ⅲ)のときと同様に，

$$(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1 \quad \Leftrightarrow \quad (k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$$

であることを利用して求める。これより，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1) \quad \cdots(**)$$

ここで，左辺の和を考えると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}&=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4-\sum_{k=1}^{n}k^4\\&=\{2^4+3^4+\ \cdots\ +n^4\ +(n+1)^4\}-(1^4+\ 2^4+3^4+\ \cdots\ +n^4)\\&=(n+1)^4-1\end{aligned}$$

よって，$(**)$　$\Leftrightarrow$　$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{n}k^3&=\frac{1}{4}\left\{(n+1)^4-1-6\sum_{k=1}^{n}k^2\ -4\sum_{k=1}^{n}k\ -\sum_{k=1}^{n}1\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{(n+1)^4-1-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}\\&=\frac{1}{4}\{(n+1)^4-(n+1)-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)\}\\&=\frac{1}{4}(n+1)\{(n+1)^3-(n+1)(2n+1)\}\\&=\frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+2n+1-2n-1)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

例 2　次の数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めなさい。

$$-2,\quad -2+3,\quad -2+3+8,\quad -2+3+8+13,\quad \cdots$$

数列の各項が等差数列の和になっている数列です。

数列 $\{a_n\}$ の第 k 項は

$$-2+3+8+13+\ \cdots\ +(5k-7)=\frac{k(-2+5k-7)}{2}=\frac{5k^2-9k}{2}$$

$\frac{(\text{初項}+\text{末項})\times\text{項数}}{2}$

となるので，この数列の第 n 項までの和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{5k^2-9k}{2}&=\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{9}{2}\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{9}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{12}n(n+1)(10n+5-27)=\frac{1}{6}n(n+1)(5n-11)\end{aligned}$$

○ 部分分数分解

部分分数分解とは以下のように分数を分解することをいう。

$$\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)\quad (a\neq b)$$

これを利用した和の計算を紹介しましょう。

例 3　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}$ を求めなさい。

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+3}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ \cdots\ +\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ \cdots\ +\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{4n^2+5n}{3(2n+1)(2n+3)}\end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成立する。

○ (等差)×(等比)

例 4　和 $S=1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\ \cdots\ +n\cdot 3^{n-1}$ を求めなさい。

数列 $\{1,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 3^2,\ 4\cdot 3^3,\ \cdots,\ n\cdot 3^{n-1}\}$ は

初項 1，公差 1 の**等差数列** $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n\}$ と

初項 1，公比 3の**等比数列** $\{1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ \cdots,\ 3^{n-1}\}$ の各項の積とみることができます。

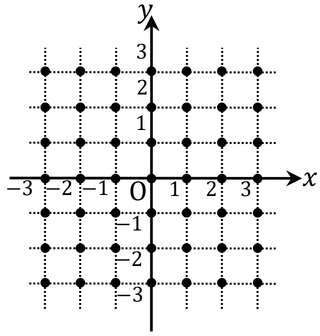
このようなタイプの数列の和は，等比数列の公比 3 を用いて，$S-3S$ を計算することで求まります。

$$\begin{array}{rrl} & S= & 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\ \cdots\ +n\cdot 3^{n-1}\\ -) & 3S= & \qquad 1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\ \cdots\ +(n-1)\cdot 3^{n-1}+n\cdot 3^n\\ \hline & -2S= & \underbrace{1+1\cdot 3+1\cdot 3^2+1\cdot 3^3+\ \cdots\ +1\cdot 3^{n-1}}_{\text{初項1，公比3の等比数列}}\qquad -n\cdot 3^n\\ & = & \dfrac{3^n-1}{3-1}-n\cdot 3^n\end{array}$$

よって，$S=\dfrac{(2n-1)3^n+1}{4}$

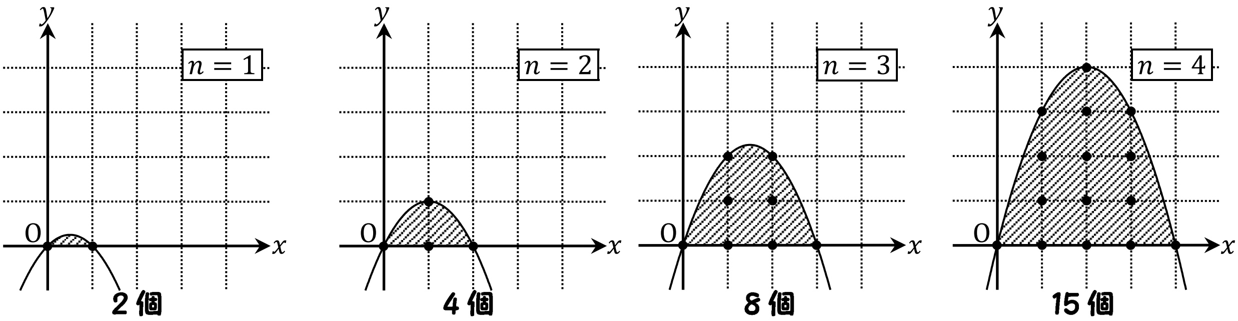
○　格子点

座標平面において，x 座標，y 座標がともに整数である点を**格子点**という。ここでは，ある条件を満たす格子点の個数を数える問題を考える。



例 5　不等式 $0 \leqq y \leqq x(n-x)$ で表される領域を D とする。このとき，領域 D 上の格子点の個数を求めなさい。

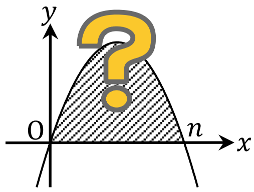
具体的に考えると次のようになります。



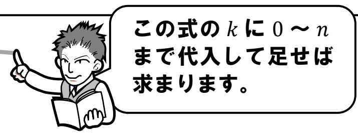
n に具体的な数値を入れると簡単な問題になりますが，
n のまま考えるのは少し難しそうです。
そこで，y 軸に平行な直線

$$x=0,\ x=1,\ x=2,\ \cdots,\ x=n$$

上の格子点の個数をそれぞれ求めて，それの総和を求めていきます。



$x=k$ 上の格子点の個数は，$k(n-k)+1$ 個



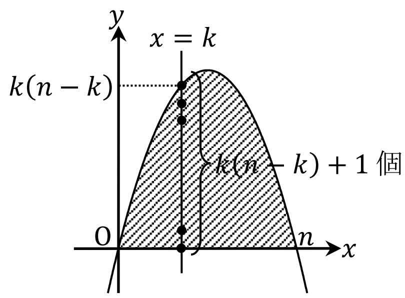
よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}\{k(n-k)+1\}=\sum_{k=0}^{n}(kn-k^2+1)$$

$$=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n+1$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{3n^2-n(2n+1)+6\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$$



§5　いろいろな数列

○　階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項の差

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を項とする数列$\{b_n\}$を**階差数列**という。

例えば…

$$\{a_n\} = \{1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ \cdots\}$$

という数列を考えると隣り合う項の差は

$$\{b_n\} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots\}$$

となり，階差数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公差 2 の等差数列となっている。

つまり，$a_{n+1} - a_n = 2n - 1$ と表せる。

$\{a_n\} = \{1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ \cdots\}$

$\{b_n\} \Rightarrow$ $+1$　$+3$　$+5$　$+7$　$+9$　$+10$

$+2$　$+2$　$+2$　$+2$　$+2$

それでは階差数列を用いて，$\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

$b_n = a_{n+1} - a_n$ より，

$$a_2 = a_1 + b_1$$
$$a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + b_2$$
$$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3$$
$$a_5 = a_4 + b_4 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

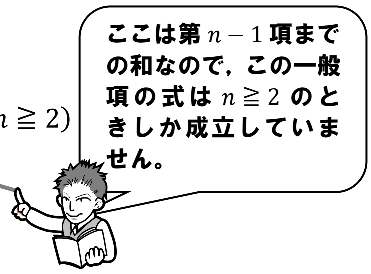
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n$

b_1　b_2　b_3　b_4　b_{n-1}

これより，一般項 a_n は次のように表せる。

$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \ \cdots\ + b_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)$$

となる。



例 6　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

$$2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\} = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots\}$

これより，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列となるので，$b_n = 2^{n-1}$

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1 \quad \cdots(*)$$

これは，$n = 1$ のときも成立する。

以上より，$a_n = 2^{n-1} + 1$

$(*)$ は $n \geqq 2$ のときしか成立していないので，最後に $n = 1$ のときを調べる必要がある。

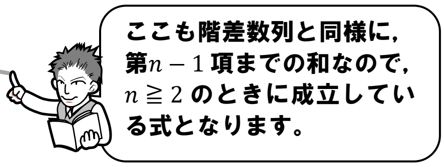
○ 数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$n \geqq 2$ のとき，S_n と S_{n-1} の差をとることで和 S_n と一般項 a_n の関係式が得られる。

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \ \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ +)\ \ S_{n-1} = & a_1 + a_2 + a_3 + \ \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} \\ \hline S_n - S_{n-1} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_n \end{array}$$

以上より，$n \geqq 2$ のとき，$S_n - S_{n-1} = a_n$

また，$n = 1$ のとき，$S_1 = a_1$



例 7　初項から第 n 項までの和が $S_n = 2n^2 + 3n + 1$ となるとき，一般項 a_n を求めなさい。

$a_1 = S_1 = 2 + 3 + 1 = 6$

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n = S_n - S_{n-1} &= 2n^2 + 3n + 1 - \{2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\} \\ &= 2n^2 + 3n + 1 - (2n^2 - n) \\ &= 4n + 1 \end{aligned}$$

これは，$n = 1$ のときは成り立たないので，$a_n = \begin{cases} 6 \ (n = 1) \\ 4n + 1 \ (n \geqq 2) \end{cases}$

○ 群数列

次の数列を見てみよう。

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{1}, \ \frac{2}{1}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{3}{1}, \ \frac{2}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{4}{1}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{5}{1}, \ \frac{4}{2}, \ \frac{3}{3}, \ \frac{2}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{6}{1}, \ \frac{5}{2}, \ \cdots\right\}$$

一見，複雑そうに見えるが，実は何本か仕切り線を入れるだけで，その規則性が容易に見えてくる。
下を見てみよう。

$$\frac{1}{1}, \left| \ \frac{2}{1}, \ \frac{1}{2}, \right| \ \frac{3}{1}, \ \frac{2}{2}, \ \frac{1}{3}, \left| \ \frac{4}{1}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{1}{4}, \right| \ \frac{5}{1}, \ \frac{4}{2}, \ \frac{3}{3}, \ \frac{2}{4}, \ \frac{1}{5}, \left| \ \frac{6}{1}, \ \frac{5}{2}, \ \cdots \right.$$

今度はその明らかな規則性に気づくであろう。このように，数列をある規則に従って，群に分けたものを**群数列**といい，左から n 番目の群を第 n 群と呼ぶことにする。

ではここで，この群数列を用いた問題を 2 つ見ていく。

例 8 (1)　$\dfrac{15}{20}$ は数列 $\{a_n\}$ の第何項目か。　　(2)　数列 $\{a_n\}$ の第 250 項目は何ですか。

群数列を考える際に最も重要なのは，

『第 n 群の最初の項（または最後の項）は，その数列全体の何項目か。』

を調べるところにあります。これさえ分かれば，数列全体と群の関係が正確にとらえられるので，数列の構造を簡単に見抜くことができます。

(1)　この数列を，第 n 群の項数が n となるように群に分けると，第 $n-1$ 群までにある項数は

$$1+2+3+\ \cdots\ +(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}\text{ 項}$$

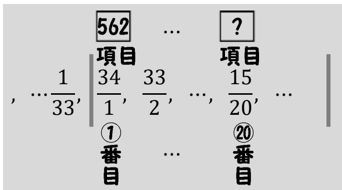
これより，第 $n-1$ 群の最後の項がこの数列全体の第 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 項目ということになるので，

第 n 群の最初の項はこの数列全体の第 $\dfrac{n(n-1)}{2}+1$ 項目となる。

また，第 n 群の分子と分母の和は $n+1$ になっており，さらに，分母の数がその群の中で何番目かを表していることから，$\dfrac{15}{20}$ は第 34 群の 20 番目の数であることが分かる。

第 34 群の最初の項は数列全体の $\dfrac{34(34-1)}{2}+1=562$ 項目

よって，$\dfrac{15}{20}$ は全体の 581 項目となる。



(2)　250 項目が第 n 群に属しているとすると，第 $n-1$ 群の最後の数は数列全体の $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 項目，

第 n 群の最後の数は数列全体の $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 項目となるので，

$$\frac{n(n-1)}{2}<250\leqq\frac{n(n+1)}{2}\quad\Leftrightarrow\quad n(n-1)<500\leqq n(n+1)$$

これに当てはまる n を考えると

$n=20$ のとき，$n(n-1)=20\cdot19=380$，$n(n+1)=20\cdot21=420$ より不適

$n=21$ のとき，$n(n-1)=21\cdot20=420$，$n(n+1)=21\cdot22=462$ より不適

$n=22$ のとき，$n(n-1)=22\cdot21=462$，$n(n+1)=22\cdot23=506$

これより，第 22 群に属していることが分かる。

第 22 群の最初の数は数列全体の $\dfrac{22(22-1)}{2}+1=232$ 項目

よって，第 250 項目は第 22 群の 19 番目になる。以上より求める項は $\dfrac{4}{19}$ となる。

§6　漸化式

以前見てきたように等差数列，等比数列，階差数列は定数 d，r を用いて

$\boxed{\textbf{等差数列}}$ $a_{n+1}=a_n+d$　　$\boxed{\textbf{等比数列}}$ $a_{n+1}=ra_n$　　$\boxed{\textbf{階差数列}}$ $b_n=a_{n+1}-a_n$

と表すことができる。このように，隣り合った項の関係により数列の性質を表す式を**漸化式**という。ここでは漸化式から数列の一般項を求める方法を学んでいく。

例 9　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n$　　(3)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2n$

(1)　これは初項 1，公差 3 の等差数列となるので，

$$a_n=1+3(n-1)=3n-2$$

(2)　これは初項 2，公比 3 の等差数列となるので，

$$a_n=2\cdot 3^{n-1}$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が $b_n=2n$ となるので，

$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}2k=3+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n+3$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n=n^2-n+3$

○　$a_{n+1}=pa_n+q$ 型漸化式の解法

まずは $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$ の一般項を考えてみよう。

具体的にどのような数列になるか調べてみる。

$$a_2=2a_1+1=2\cdot 1+1=3$$
$$a_3=2a_2+1=2\cdot 3+1=7$$
$$a_4=2a_3+1=2\cdot 7+1=15$$
$$a_5=2a_4+1=2\cdot 15+1=31$$

………………

これを繰り返していくと次のようになる。

$$\{a_n\}=\{1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ 255,\ \cdots\}$$

この数列の一般項を考えればよいのだが，ここでは 2 通りの方法で考えてみよう。

解法 1 **数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を利用する。**

$\{a_n\}=\{1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ \cdots\}$

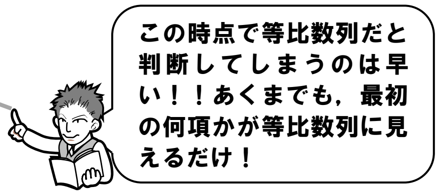
$\{b_n\} \Rightarrow\ +2\quad +4\quad +8\quad +16\quad +32\quad +64$

$\times 2\quad \times 2\quad \times 2\quad \times 2\quad \times 2$

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う数の差をとると，

$$\{b_n\}=\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots\}$$

となり，階差数列 $\{b_n\}$ が初項 2，公比 2 の等比数列になっているように見える。



実際，漸化式を使って確かめてみよう。

$a_{n+1}=2a_n+1\ \ \cdots①$

$a_{n+2}=2a_{n+1}+1\ \ \cdots②$ より

②－①から，$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，$a_{n+2}-a_{n+1}=b_{n+1}$ となるので

$$b_{n+1}=2b_n$$

これより，階差数列 $\{b_n\}$ が公比 2 の等比数列になることが分かった。

初項は $b_1=a_2-a_1=3-1=2$ より，

つまり，$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$$

これは，$n=1$ のときも成立する。以上より，$a_n=2^n-1$

解法 2 **数列 $\{a_n\}$ の各項に 1 を足してみる。**

$\{a_n\}=\{1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ \cdots\}$

$+1$

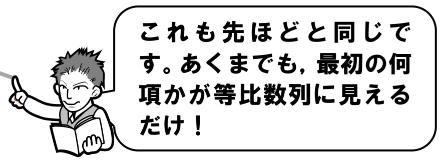
$\{a_n+1\}=\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \cdots\}$

$\times 2\quad \times 2\quad \times 2\quad \times 2\quad \times 2\quad \times 2$

数列 $\{a_n\}$ の各項に 1 を足した数列 $\{a_n+1\}$ は

$$\{a_n+1\}=\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \cdots\}$$

となるが，これは初項 2，公比 2 の等比数列になっているように見える。



これも実際に漸化式を用いて確かめてみよう。

$a_{n+1}=2a_n+1$ の両辺に 1 を足すと，

$$a_{n+1}+1=2a_n+2=2(a_n+1)$$

ここで，$a_n+1=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=a_{n+1}+1$ より

$$b_{n+1}=2b_n$$

数列 $\{a_n\}$ の各項に 1 を足した数列が公比 2 の等比数列になっていることが分かる。

初項 $b_1=a_1+1=2$ より，$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

よって，$b_n=2^n \iff a_n+1=2^n \iff a_n=2^n-1$

さて，この解法を見て不思議に思うことは

なぜ数列全体に1を足すと等比数列になるのか？

ということでしょう。ここでは，このことについて詳しく触れておきます。

この型の漸化式の解法は，先ほど見たように

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad \cdots ① \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \quad \cdots ②$$

と変形し，$a_n-\alpha=b_n$ とおくと，公比 p の等比数列となるので，解くことができる。

$$a_{n+1}=pa_n+q$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{a_{n+1}-\alpha}_{b_{n+1}}=p\,\underbrace{(a_n-\alpha)}_{b_n}$$
$$\Downarrow$$
$$b_{n+1}=pb_n \Leftarrow$$ **等比数列**

そして，②式は α についての1次方程式 $\alpha=p\alpha+q$ …③ と①式の差をとることで求まる。

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=pa_n+q \quad \cdots ① \\ -) & \quad\ \ \alpha=p\,\alpha+q \quad \cdots ② \\ \hline & a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \end{array}$$

つまり，この型の漸化式を解くためには，方程式③を解けばよいことが分かるが，この方程式は，

元の漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ の a_{n+1}，a_n を α に置き換える

ことで簡単に得ることができる。

$$\boxed{a_{n+1}}=p\boxed{a_n}+q$$
$$\Downarrow \qquad\quad \Downarrow$$
$$\boxed{\alpha}=p\boxed{\alpha}+q$$

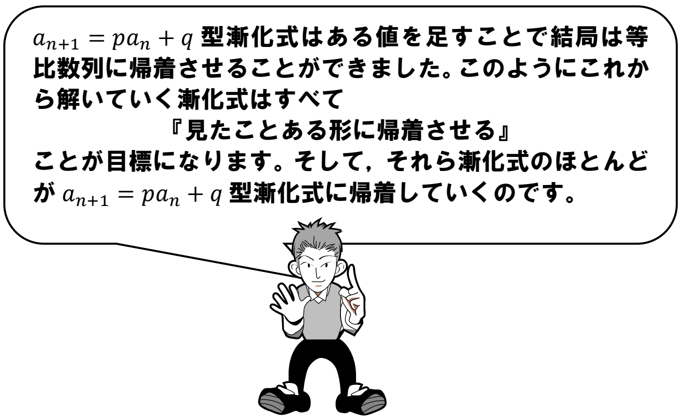
具体的に見ていくと

$a_{n+1}=3a_n-2$ のとき，$\alpha=3\alpha-2$より $\alpha=1$　　よって，$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$a_{n+1}=4a_n+9$ のとき，$\alpha=4\alpha+9$より $\alpha=-3$　　よって，$a_n+3=4(a_n+3)$

$a_{n+1}=5a_n+10$ のとき，$\alpha=5\alpha+10$ より$\alpha=-\dfrac{5}{2}$　　よって，$a_{n+1}+\dfrac{5}{2}=5\left(a_n+\dfrac{5}{2}\right)$

となる。この変形によって，公比3，4，5の等比数列になることが分かる。



○ $\boldsymbol{a_{n+1}=pa_n+f(n)}$ 型漸化式の解法

$p=1$ のとき, $a_{n+1}=a_n+f(n)$ となるが, これは $f(n)$ が数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**であることを意味している。よって，この場合，一般項 a_n は $n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

で求めることができる。よって，ここでは $p \neq 1$ の場合を考えることとする。

この漸化式は主に以下の 2 つのパターンに分けられる。それでは，具体的に見ていこう。

【1】$\boldsymbol{f(n)=an+b}$ のとき

2 通りの解法を示しておこう。

解法 1（階差数列を作る）

$a_{n+1}=pa_n+an+b$ と n を $n+1$ に変えた漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+a(n+1)+b$ の差をとる。

$$\begin{array}{rl} & a_{n+2}=pa_{n+1}+a(n+1)+b \\ +) & a_{n+1}=pa_n \quad +an \qquad +b \\ \hline & a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+a \end{array}$$

ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=pb_n+a$$

となり，$a_{n+1}=pa_n+q$ 型漸化式に帰着できる。

b_n が求まれば，これが数列 $\{a_n\}$ の階差数列となるので，a_n も求まる。

解法 2（解ける形を無理やり作る）

$a_{n+1}=pa_n+an+b \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1}+g(n+1)=p\{a_n+g(n)\}$ となるような $g(n)$ を見つければよい。

このような $g(n)$ が見つかれば，$a_n+g(n)=b_n$ とおくことで,

$$b_{n+1}=pb_n$$

となるので，$\{b_n\}$ は等比数列となる。

この場合 $g(n)$ は明らかに 1 次式なので

$$g(n)=\alpha n+\beta$$

とおくことができ，あとは係数比較をすることで α，β を見つければよい。

例 10　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2n+1$ の一般項を求めなさい。

まず，解法１で解きます。階差数列を利用した解法です。

解①

$a_{n+1}=3a_n+2n+1\ \cdots$①，$a_{n+2}=3a_{n+1}+2(n+1)+1\ \cdots$②

②－①より，$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n+2$　　$a_{n+1}=pa_n+q$ **型漸化式**

ここで，

$$b_{n+1}=3b_n+2 \iff b_{n+1}+1=3(b_n+1)$$　　$\alpha=3\alpha+2 \Leftrightarrow \alpha=-1$

と変形することができる。

数列 $\{b_n+1\}$ は公比 3 の等比数列であり，その初項は

$$b_1+1=a_2-a_1+1=6-1+1=6$$

よって，

$$b_n+1=6\cdot 3^{n-1} \iff b_n=2\cdot 3^n-1$$

ここで，a_n に戻して，

$$a_{n+1}-a_n=2\cdot 3^n-1$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2\cdot 3^k-1)=1+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)=3^n-n-1$$

これは $n=1$ のときも成立する。

以上より，$a_n=3^n-n-1$

次に，解法２で解きます。

解②

$a_{n+1}=3a_n+2n+1\ \cdots$①　$\Leftrightarrow$　$a_{n+1}+p(n+1)+q=3(a_n+pn+q)\ \cdots$②

となるように p，q を定める。

②より，$a_{n+1}=3a_n+2pn+2q-p$

①と比較すると $\begin{cases}2p=2\\2q-p=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p=1\\q=1\end{cases}$

よって，

$$a_{n+1}=3a_n+2n+1 \iff a_{n+1}+(n+1)+1=3(a_n+n+1)$$

$a_n+n+1=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n$

となるので，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列であり，その初項は

$$b_1=a_1+1+1=3$$

よって，$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

ここで，a_n に戻して，

$$a_n+n+1=3^n \iff a_n=3^n-n-1$$

【2】$f(n) = q^n$ のとき

これは，$a_{n+1} = pa_n + q^n$ の両辺を q^{n+1} で割ることで解決する。

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{pa_n}{q^{n+1}} + \frac{q^n}{q^{n+1}} \iff \frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q}$$

ここで，$\dfrac{a_n}{q^n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = \dfrac{p}{q} b_n + \dfrac{1}{q}$

となり，$a_{n+1} = pa_n + q$ 型漸化式に帰着できる。b_n が求まれば，$a_n = q^n b_n$ となる。

例 11　$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ の一般項を求めなさい。

両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

$\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと，$b_{n+1} = \dfrac{3}{2} b_n + \dfrac{1}{2}$　　$a_{n+1} = pa_n + q$ **型漸化式**

$$b_{n+1} = \frac{3}{2} b_n + \frac{1}{2} \iff b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$$　　$\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = -1$

よって，数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列となり，その初項は $b_1 + 1 = \dfrac{a_1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$

よって，$b_n + 1 = \dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \iff b_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1$

ここで，a_n に戻して，

$$\frac{a_n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \iff a_n = 3^n - 2^n$$

一般的には…

$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型漸化式は大きく 2 つのパターンに分けて解法を考えたが，
一般的には両辺を p^{n+1} で割ることで一般項を求めることができる。

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{pa_n}{p^{n+1}}+\frac{f(n)}{p^{n+1}} \iff \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{f(n)}{p^{n+1}}$$

$a_{n+1}=pa_n+f(n)$

この値の $n+1$ 乗で割る

ここで，$\dfrac{a_n}{p^n}=b_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+\frac{f(n)}{p^{n+1}}$$

となる。これは数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\frac{f(n)}{p^{n+1}}$ であることを表しているので，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)}{p^{k+1}}$$

で求めることができる。b_n が求まれば，$a_n=p^nb_n$ となる。

例 12　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+n\cdot 3^n$ の一般項を求めなさい。

この漸化式は $f(n)=pn+q$，$f(n)=q^n$ のどちらのパターンにも当てはまりませんが，一般的な解法をとることで解決します。

両辺を 3^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{3a_n}{3^{n+1}}+\frac{n\cdot 3^n}{3^{n+1}} \iff \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{n}{3}$$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+\dfrac{n}{3}$

$b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$ より，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{6}$$

これは$n=1$ のときも成立する。

a_n に戻すと

$$a_n=3^nb_n \iff a_n=\frac{3^n(n^2-n+2)}{6}$$

○ $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+t}$ 型漸化式の解法

ここでは分数型の漸化式について扱う。

例 13 $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+2}$ の一般項を求めなさい。

とりあえず，初めの何項かを書き並べてみる。

$$a_2=\frac{a_1}{3a_1+2}=\frac{1}{5},\ a_3=\frac{a_2}{3a_2+2}=\frac{1}{13},\ a_4=\frac{a_3}{3a_3+2}=\frac{1}{29},\ a_5=\frac{a_4}{3a_4+2}=\frac{1}{61},\ \cdots$$

この数列をみて，何か気づかないだろうか？

実は分母のみに注目すると，

$$\{1,\ 5,\ 13,\ 29,\ 61,\ \cdots\}$$

となっており，この数列の階差数列は初項 4，公比 2 の等比数列になっている。

$$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{29},\ \frac{1}{61},\ \cdots\right\}$$

$+4\quad +8\quad +16\quad +32$

$\times 2\quad \times 2\quad \times 2$

数列の各項の分母がある規則で並んでいるということは，この数列の各項の**逆数に注目**すればよいのでは？ ということになる。つまり，この型の漸化式は両辺の逆数をとることで解決する。

$a_{n+1}=0$ と仮定すると，漸化式より $a_n=0$ となる。

これより，$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_2=a_1=0$

これは，$a_1=1$ に矛盾する。

よって，数列 $\{a_n\}$ に 0 は含まれない。

これより，漸化式の両辺の逆数をとると，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+2}{a_n}=\dfrac{2}{a_n}+3$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n+3$　　$a_{n+1}=pa_n+q$ **型漸化式**

$b_{n+1}=2b_n+3 \iff b_{n+1}+3=2(b_n+3)$　　$\alpha=2\alpha+3 \iff \alpha=-3$

より，数列 $\{b_n+3\}$ は公比 2 の等比数列となり，その初項は

$$b_1+3=\frac{1}{a_1}+3=4$$

よって，$b_n+3=4\cdot 2^{n-1} \iff b_n=2^{n+1}-3$

ここで，a_n に戻して，$\dfrac{1}{a_n}=2^{n+1}-3 \iff a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}-3}$

○ $\boldsymbol{a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n}$ 型漸化式の解法

今までは隣り合う2項の関係を表した漸化式の解法を考えてきたが，ここでは隣接する3項の関係を表した漸化式の解法を学んでいく。今まで学んできたものを**隣接2項間漸化式**といい，これから学ぶものを**隣接3項間漸化式**という。

この漸化式の解法も『**今までに見たことがある形**』にすることを目標とする。

隣接3項間漸化式は，

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \quad \cdots ① \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \quad \cdots ②$$

と変形することができれば，$a_{n+1}-\alpha a_n=b_n$ とおくことにより，

$$b_{n+1}=\beta b_n$$

となる。これは公比 β の等比数列なので，$\{b_n\}$ の一般項を求めることができる。

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{a_{n+2}-\alpha a_{n+1}}_{b_{n+1}}=\beta\underbrace{(a_{n+1}-\alpha a_n)}_{b_n}$$
$$\Downarrow$$
$$b_{n+1}=\beta b_n \Leftarrow$$ **等比数列**

それでは，この変形をするための α，β の求め方を考えよう。

特性方程式

②より，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$

これと①の辺々を比較すると次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\-\alpha\beta=q\end{cases}$$

この連立方程式の解 α，β は解と係数の関係より，次の2次方程式の解となっている。

$$x^2-px-q=0$$

つまり，この2次方程式を解くことで，α，β を求めることができる。

この方程式を**特性方程式**といい，α，β を**特性解**という。

実は，この特性方程式は元の漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ において，

a_{n+2} **を** x^2，a_{n+1} **を** x，**そして** a_n **を** 1 **に置き換える**

ことで得られる。

$$\boxed{a_{n+2}}-p\boxed{a_{n+1}}-q\boxed{a_n}=0$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$\boxed{x^2}-p\boxed{x}-q\boxed{\cdot 1}=0$$

例 14 $a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ の一般項を求めなさい。

解①

$x^2-5x+6=0 \iff (x-2)(x-3)=0 \iff x=2,\ 3$ より

$$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n \iff a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$$ $\alpha=2,\ \beta=3$ のとき

$a_{n+1}-2a_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n$

と変形することができるので，$\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，その初項は

$$b_1=a_2-2a_1=2$$

よって，$b_n=2\cdot 3^{n-1}$

a_n に戻して，$a_{n+1}-2a_n=2\cdot 3^{n-1}$ …①

また，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n \iff a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ $\alpha=3,\ \beta=2$ のとき

$a_{n+1}-3a_n=c_n$ とおくと，$c_{n+1}=2c_n$

と変形することができるので，$\{c_n\}$ は公比 2 の等比数列で，その初項は

$$c_1=a_2-3a_1=1$$

よって，$c_n=2^{n-1}$

a_n に戻して，$a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}$ …②

①−②より，$a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}$

解②（解①の①式から）

$a_{n+1}-2a_n=2\cdot 3^{n-1} \iff a_{n+1}=2a_n+2\cdot 3^{n-1}$ $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ **型漸化式**

両辺を 3^{n+1} で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2a_n}{3^{n+1}}+2\cdot\dfrac{3^{n-1}}{3^{n+1}} \iff \dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{2}{9}$

ここで，$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおく。

$$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{2}{9} \iff b_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left(b_n-\frac{2}{3}\right)$$ $\alpha=\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{2}{9} \iff \alpha=\dfrac{2}{3}$

より，数列 $\left\{b_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列となり，その初項は

$$b_1-\frac{2}{3}=\frac{a_1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$$

よって，$b_n-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \iff b_n=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$

a_n に戻して，$\dfrac{a_n}{3^n}=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3} \iff a_n=2\cdot 3^{n-1}-2^{n-1}$

○ 連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ の解法

2 通りの解法を示しておこう。

解法 1(1 文字消去)

この漸化式が今までと違うのは，漸化式の中に a_n，b_n の 2 文字があるということである。
よって，『**今までに見たことがある形**』に変形するには，**1 文字を消去する**ことが必要となる。

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n & \cdots ② \end{cases}$$

①より，$b_n = \dfrac{1}{q}a_{n+1} - \dfrac{p}{q}a_n \quad \cdots ③$

③の n を $n+1$ にすると，$b_{n+1} = \dfrac{1}{q}a_{n+2} - \dfrac{p}{q}a_{n+1} \quad \cdots ④$

③，④を②式に代入すると

$$\frac{1}{q}a_{n+2} - \frac{p}{q}a_{n+1} = ra_n + s\left(\frac{1}{q}a_{n+1} - \frac{p}{q}a_n\right) \iff a_{n+2} = (p+s)a_{n+1} + (qr-ps)a_n$$

これは隣接 3 項間漸化式なので，先ほどの要領で解くことができる。

解法 2(解ける形を無理やり作る)

与式から，$a_{n+1} + qb_{n+1} = p(a_n + qb_n)$ を満たす p，q の組を見つければよい。
このような p，q が見つかれば，$a_n + qb_n = c_n$ とおくことで，

$$c_{n+1} = pc_n$$

となるので，$\{c_n\}$ は等比数列となる。

例 15 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = -6a_n - 4b_n & \cdots ② \end{cases}$ を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

まずは解法 1 を用いて解いていきます。①式を用いて，b_n，b_{n+1} を消去します。

解①

①より，$b_n = a_{n+1} - a_n$，$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$

②に代入すると，$a_{n+2} - a_{n+1} = -6a_n - 4(a_{n+1} - a_n) \iff a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

$a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \iff a_{n+2} + a_{n+1} = -2(a_{n+1} + a_n)$

$a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$ より，$a_{n+1} + a_n = 3\cdot(-2)^{n-1} \quad \cdots ③$

$a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \iff a_{n+2} + 2a_{n+1} = -(a_{n+1} + 2a_n)$

$a_2 + 2a_1 = 2 + 2 = 4$ より，$a_{n+1} + 2a_n = 4\cdot(-1)^{n-1} \quad \cdots ④$

$x^2 + 3x + 2 = 0$
$\iff (x+1)(x+2) = 0$
$\iff x = -1,\ -2$

④－③より，$a_n = 4\cdot(-1)^{n-1} - 3\cdot(-2)^{n-1}$

このとき，$b_n = a_{n+1} - a_n$

$= 4\cdot(-1)^n - 3\cdot(-2)^n - 4\cdot(-1)^{n-1} + 3\cdot(-2)^{n-1}$

$= 8\cdot(-1)^n + 9\cdot(-2)^{n-1}$

次に$\boxed{\text{解法２}}$を用いて解いていきます。

解②

$a_{n+1}+qb_{n+1}=p(a_n+qb_n)$ $\cdots(*)$ を満たす p，q を求める。

$(*)$ に①，②式を代入し，整理すると，

$$a_{n+1}+qb_{n+1}=p(a_n+qb_n) \iff a_n+b_n+q(-6a_n-4b_n)=p(a_n+qb_n)$$
$$\iff (1-6q)a_n+(1-4q)b_n=pa_n+pqb_n$$

これらが一致するので，$\begin{cases}p=1-6q\\pq=1-4q\end{cases} \iff (p,\ q)=\left(-2,\ \dfrac{1}{2}\right),\ \left(-1,\ \dfrac{1}{3}\right)$

$(p,\ q)=\left(-2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_{n+1}=-2\left(a_n+\dfrac{1}{2}b_n\right)$

$a_1+\dfrac{1}{2}b_1=\dfrac{3}{2}$ より，$a_n+\dfrac{1}{2}b_n=\dfrac{3}{2}\cdot(-2)^{n-1}$ $\cdots$③

$(p,\ q)=\left(-1,\ \dfrac{1}{3}\right)$ のとき，$a_{n+1}+\dfrac{1}{3}b_{n+1}=-1\cdot\left(a_n+\dfrac{1}{3}b_n\right)$

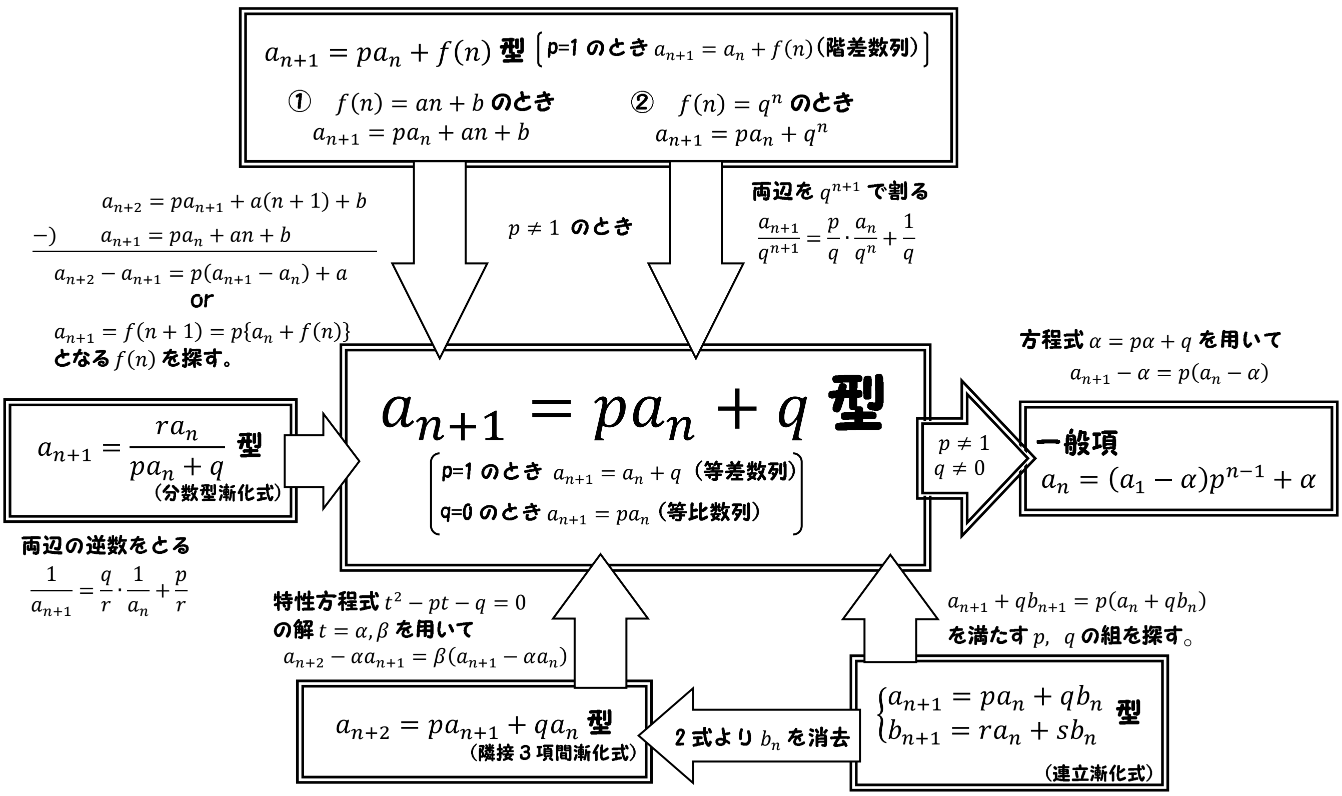
$a_1+\dfrac{1}{3}b_1=\dfrac{4}{3}$ より，$a_n+\dfrac{1}{3}b_n=\dfrac{4}{3}\cdot(-1)^{n-1}$ $\cdots$④

③ − ④ より，$\dfrac{1}{6}b_n=\dfrac{3}{2}\cdot(-2)^{n-1}-\dfrac{4}{3}\cdot(-1)^{n-1} \iff b_n=8\cdot(-1)^n+9\cdot(-2)^{n-1}$

このとき，$a_n=4\cdot(-1)^{n-1}-3\cdot(-2)^{n-1}$

漸化式マップ

すべての漸化式は $a_{n+1}=pa_n+q$ 型に帰着できる。



§7　数学的帰納法

次の等式を証明したい。

$$1+3+5+7+\ \cdots\ +(2n-1)=n^2$$

これは，初項 1，公差 2 の等差数列の第 n 項までの和なので，公式を使えば簡単に証明ができるが，ここでは，別の証明法を考えてみよう。

まずは，地道に考えてみる。

$n=1$ のとき　$(\text{左辺})=1$，$(\text{右辺})=1^2=1$　　より成立

$n=2$ のとき　$(\text{左辺})=1+3=4$，$(\text{右辺})=2^2=4$　　より成立

$n=3$ のとき　$(\text{左辺})=1+3+5=9$，$(\text{右辺})=3^2=9$　　より成立

$n=4$ のとき　$(\text{左辺})=1+3+5+7=16$，$(\text{右辺})=4^2=16$　　より成立

$n=5$ のとき　$(\text{左辺})=1+3+5+7+9=25$，$(\text{右辺})=5^2=25$　　より成立

とりあえず，$n=5$ までは正しいことが確認できるが，ここで，

「こんなに調べているんだから,この結果は正しい!!」

としては誤りである。もしかしたら，$n=6$，7，…，100，10000 と n の値を増やしていくと成立していないかもしれないし，仮に，$n=10000$ で成立しているからといって，$n=10001$ では成立している保証はない。つまり，この方法ではどんなにがんばっても**全ての自然数 n** について調べることができず，一生かかっても証明が終わらないのである。

しかし，同じような方針でも，この問題を鮮やかに証明してくれる素晴らしい方法がある。

それが，**数学的帰納法**である。

数学的帰納法は，次のような手順で証明をつくっていく。

① $n=1$ のときを示す

② $n=k$ のとき成立していると仮定する

③ ②のとき，$n=k+1$ で成立していることを示す

この証明法のポイントは②，③の

『$n=k$ のときが成立していると仮定すれば,$n=k+1$ のときも成立する。』$\cdots(*)$

を示すところにある。これを示せれば，①で $n=1$ のときが成立しているのを示したので，$(*)$ より，$n=2$ のときも成立していることが示せる。そして，$n=2$ のときは成立していることを示せたので，$(*)$ より，$n=3$ のとき成立していることが示せる。

そして，これを繰り返していくことで，結局はすべての自然数 n について，命題が成り立つことが分かるのである。

数学的帰納法の原理は，よくドミノ倒しにたとえられます。
例えば，100 枚のドミノをバラバラに置いておくと，すべてを倒すには 100 回ドミノを押さないといけません。しかし，あるドミノが倒れたら，必ず次のドミノも倒れるように置いたら 1 番目のドミノを倒すだけですべてのドミノが倒れます。つまり，

『あるドミノが倒れたら次のドミノも倒れる』

という仕組みを作ることが大切なわけです。
これがまさに数学的帰納法です。

それではここで，具体的に証明法を見てきましょう。

例 16 n が自然数のとき，次の等式を数学的帰納法によって証明しなさい。

$$1+3+5+7+\ \cdots\ +(2n-1)=n^2 \quad \cdots(*)$$

（ｉ） $n=1$ のとき

$\left(\text{左辺}\right)=1$，$\left(\text{右辺}\right)=1^2=1$　　より成立

←ここは最初のドミノを倒すという重要な役割を担っている。

（ⅱ） $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。つまり，

$$1+3+5+7+\ \cdots\ +(2k-1)=k^2$$

←これが仮定。この式を利用して証明をしていく

が成り立つと仮定する。

このとき，$n=k+1$ のとき，すなわち

$$1+3+5+7+\ \cdots\ +(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

←これが結論。仮定からこの式を導く

が成立していることを示せばよい。

仮定の両辺に $2k+1$ を足すと

$$\begin{aligned}1+3+5+7+\ \cdots\ +(2k-1)+(2k+1)&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも成立していることが分かる。

(ｉ)，(ⅱ)より全ての自然数 n において $(*)$ は成立する。

←最後に結論を言って終了～♪

例 17　n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式を数学的帰納法によって証明しなさい。

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}\quad \cdots(*)$$

←$n \geqq 2$ なので $n=2$ からスタート

（ｉ）$n=2$ のとき

$$(\text{左辺})=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4},\ (\text{右辺})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$ より成立

（ⅱ）$n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。つまり，

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

が成り立つと仮定する。

このとき，$n=k+1$ のとき，すなわち

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}\quad \cdots①$$

が成立していることを示せばよい。

仮定の両辺に $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を足すと

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\quad \cdots②$$

ここで，①，②の右辺 $2-\dfrac{1}{k+1}$ と $2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$ の大小を比較する。

$$2-\frac{1}{k+1}-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=\frac{(k+1)^2-k(k+1)-k}{k(k+1)^2}=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$

よって，$2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}\quad \cdots③$

②，③より，①式は成立。つまり，$n=k+1$ のときも成立している。

（ｉ），（ⅱ）より，2 以上の自然数 n において $(*)$ は成立する。

例 18 $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{-3a_n-4}{a_n-7}$ の一般項を求めなさい。

初めの何項かを書き並べてみると，$a_2=\dfrac{3}{4}$，$a_3=\dfrac{5}{5}=1$，$a_4=\dfrac{7}{6}$，$a_5=\dfrac{9}{7}$，…

となっている。ここで分母のみ，分子のみを書き並べてみると，

分母→$\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \cdots\}$，分子→$\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\}$

となり，それぞれ等差数列になっていることが分かる。このことから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{2n-1}{n+2}$$

と類推できる。しかし，これはあくまでも類推なので証明が必要になります。

$a_n=\dfrac{2n-1}{n+2}$ $\cdots(*)$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

（ｉ） $n=1$ のとき

$$a_1=\frac{2\cdot1-1}{1+2}=\frac{1}{3}$$ より成立

（ii） $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。つまり，

$$a_k=\frac{2k-1}{k+2}$$

が成り立つと仮定する。

このとき，$n=k+1$ のとき，すなわち

$$a_{k+1}=\frac{2k+1}{k+3}$$

が成立していることを示せばよい。

$a_{k+1}=\dfrac{-3a_k-4}{a_k-7}$ に $a_k=\dfrac{2k-1}{k+2}$ を代入すると，

$$a_{k+1}=\frac{-3\cdot\dfrac{2k-1}{k+2}-4}{\dfrac{2k-1}{k+2}-7}=\frac{-3(2k-1)-4(k+2)}{2k-1-7(k+2)}=\frac{-10k-5}{-5k-15}=\frac{2k+1}{k+3}$$

これより，$n=k+1$ のときも成立していることが分かる。

（ｉ），（ii）より，すべての自然数 n において $(*)$ は成立する。