

対数関数

§1 対数の導入

まずは以下の3つの指数方程式について考えてみましょう。

$$\textcircled{1} \quad 2^x = 8 \qquad \textcircled{2} \quad 2^x = \frac{1}{2} \qquad \textcircled{3} \quad 2^x = 3$$

まず①, ②は,

$$\textcircled{1} \quad 2^x = 2^3 \qquad \textcircled{2} \quad 2^x = 2^{-1}$$

となるので, 指数を比較することで, 答えが求まります。

$$\textcircled{1} \quad x = 3 \qquad \textcircled{2} \quad x = -1$$

しかし③に関しては, 同じようにいきません。なぜなら, 3を2の累乗の形で表すことができないからです。

$$3 = 2^{???}$$

しかし, グラフを見ても分かる通り確かに答えは存在します。今はそれを**表現することができない**というだけです。このようなとき, 数学では

『**新たな記号を導入することで解をとらえる**』

ということをしていきます。今までもそうでしたね。

今回, この方程式③の解を $x = \log_2 3$ と表します(「**ログ2の3**」と読む)。

$$2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$$

つまり, $2^{\log_2 3} = 3$ というわけです。

また, この記号を用いると, ①, ②の解は

$$2^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_2 8 (= 3)$$

$$2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{2} (= -1)$$

と表すことができます。

一般的に $a > 0, a \neq 1, M > 0$ とするとき,

$a^x = M$ を満たす x はただ1つ存在して, それを $x = \log_a M$ と表す。

この x を, a を底とする M の**対数**といい, M を $\log_a M$ の**真数**という。

対数の定義

$a > 0, a \neq 1, M > 0$ のとき

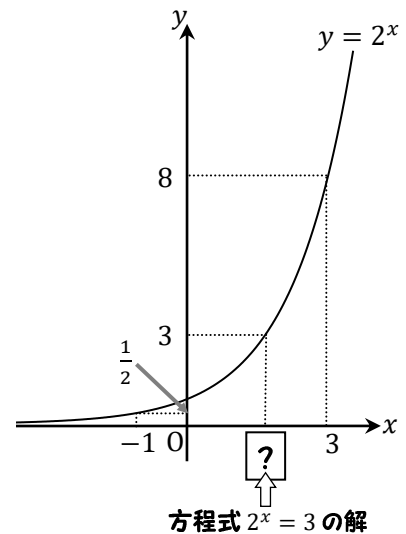
$$a^x = M \Leftrightarrow x = \log_a M$$

これより, $a^{\log_a M} = M$ となる。

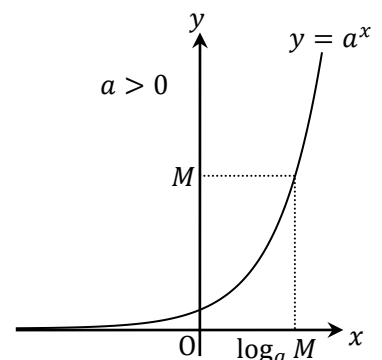
また, $a^1 = a, a^0 = 1$ から, 任意の正の数 a に対して,

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

が成り立つ。



例えば, $x^2 = 2$ という方程式の解は, 中学2年生になって初めて $\sqrt{\quad}$ という記号を用いて, 表現できるようになりましたね。今回の $\log_a \Delta$ もそれと同じです。



対数に慣れよう①

次の等式を $x = \log_a M$ の形に直しなさい。

- (1) $3^5 = 243$ (2) $5^{-2} = 0.04$ (3) $8^{\frac{4}{3}} = 16$ (4) $25^{-\frac{1}{2}} = 0.2$

対数に慣れよう②

次の等式を $a^x = M$ の形に直しなさい。

- (1) $4 = \log_2 16$ (2) $\frac{1}{2} = \log_9 3$ (3) $-3 = \log_5 \frac{1}{125}$ (4) $-\frac{3}{2} = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{9}$

対数に慣れよう③

対数の定義を用いて、次の式の値を求めなさい。

- (1) $\log_3 81$ (2) $\log_8 4$ (3) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{4}$ (4) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{3}$

○ 対数の性質

対数には以下のような性質がある。

⊛ 対数の性質 ⊛

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0, r$ が実数のとき

$$\textcircled{1} \quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\textcircled{2} \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\textcircled{3} \quad \log_a M^r = r \log_a M$$

証明

$$\textcircled{1} \quad \log_a M = p, \log_a N = q \text{ とおくと, } a^p = M, a^q = N \text{ より,}$$

$$MN = a^p \cdot a^q = a^{p+q} \Leftrightarrow \log_a MN = p + q$$

よって, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

$$\textcircled{2} \quad \log_a M = p, \log_a N = q \text{ とおくと, } a^p = M, a^q = N \text{ より,}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \Leftrightarrow \log_a \frac{M}{N} = p - q$$

よって, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$$\textcircled{3} \quad \log_a M = p \text{ とおくと, } a^p = M \text{ より,}$$

$$M^r = (a^p)^r = a^{pr} \Leftrightarrow \log_a M^r = pr$$

よって, $\log_a M^r = r \log_a M$

○ 底の変換公式

ここでは対数の底を自由に操ることができる公式を紹介する。

⊛ 底の変換公式 ⊛

a, b, c は正の数で $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\text{特に, } b = c \text{ のときは, } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

証明

$$\log_a b = p \text{ とおくと, } a^p = b \text{ となる。}$$

両辺正より, 底 c の対数をとると,

$$\log_c a^p = \log_c b \Leftrightarrow p \log_c a = \log_c b \Leftrightarrow p = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\text{よって, } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

例 1 $\log_2 24 - \log_4 36$ の値を求めなさい。

まずは 2 つの対数の底が異なっているので、それをそろえることから始めます。

$$\log_2 24 - \log_4 36 = \log_2 24 - \frac{\log_2 36}{\log_2 4}$$

底の変換公式

$$= \log_2 24 - \frac{2 \log_2 6}{2}$$

$$= \log_2 24 - \log_2 6$$

$$= \log_2 \frac{24}{6}$$

$$= \log_2 4 = 2$$

$$\log_2 36 = \log_2 6^2 = 2 \log_2 6, \\ \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2$$

底をそろえたからこそ、対数の性質が使えるわけです。

例 2 $\log_2 3$ が無理数であることを示しなさい。

背理法を用いて示します。

$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると、 $\log_2 3 = \frac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数) とおける。

$$\text{このとき, } \log_2 3 = \frac{n}{m} \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{m}} = 3$$

$$\text{両辺 } m \text{ 乗すると, } \left(2^{\frac{n}{m}}\right)^m = 3^m \Leftrightarrow 2^n = 3^m$$

m, n は自然数より、左辺は 2 の倍数であるが、右辺は 3 の倍数となり矛盾。

これは $\log_2 3$ が有理数であると仮定したためである。

以上より、 $\log_2 3$ が無理数であることを示された。

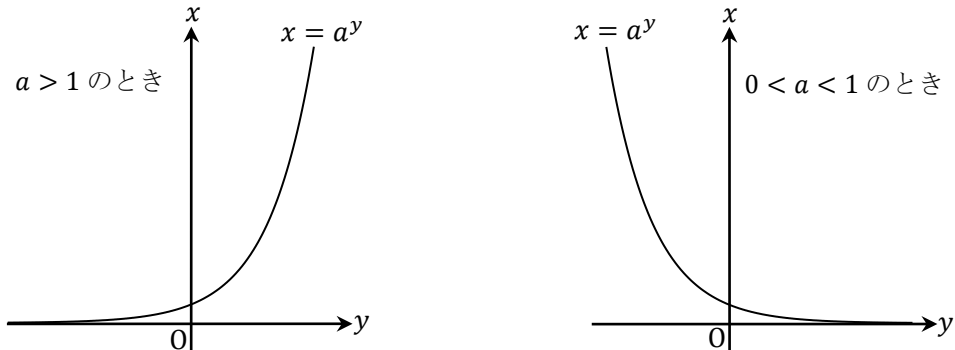
一般的に、底と真数が互いに素であれば、対数は必ず無理数になります。

§ 2 対数関数のグラフ

ここでは、対数関数 $y = \log_a x$ のグラフを考える。

これは、 $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ と変形すれば指数関数となる。

縦軸を x 、横軸を y とすると、グラフは下図のようになる。

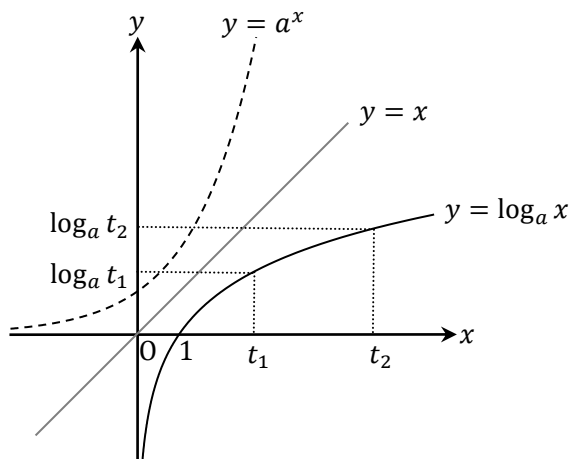


これを通常通り、縦軸を y 、横軸を x とすると、 $y = \log_a x$ のグラフとなる。

対数関数のグラフ

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

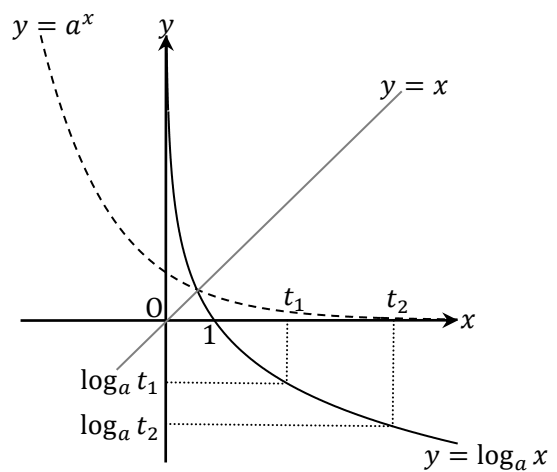
① $a > 1$ のとき



$t_1 < t_2$ のとき $\log_a t_1 < \log_a t_2$

単調増加関数

② $0 < a < 1$ のとき



$t_1 < t_2$ のとき $\log_a t_1 > \log_a t_2$

単調減少関数

点 $(1, 0)$ を通る

y 軸は漸近線

$y = \log_a x$ と $y = a^x$ は $y = x$ に関して対称である ($y = \log_a x$ は $y = a^x$ の逆関数)。

例 3 次の各組の数の大小を比べなさい。

(1) $\frac{1}{2}, \log_9 5, -1 - \log_3 \frac{1}{6}$

(2) $\log_{0.5}(\log_4 8), \log_{0.5}(\log_2 3)$

対数の大小関係 $\begin{cases} a > 1 \text{ のとき, } t_1 < t_2 \Leftrightarrow \log_a t_1 < \log_a t_2 \\ 0 < a < 1 \text{ のとき, } t_1 < t_2 \Leftrightarrow \log_a t_1 > \log_a t_2 \end{cases}$ を利用します。

まず、底をそろえることから始めましょう。

(1) $\frac{1}{2} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{3}$

$\log_9 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 9} = \frac{\log_3 5}{2} = \log_3 5^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{5}$ **底を 3 にそろえる**

$-1 - \log_3 \frac{1}{6} = -1 + \log_3 6 = \log_3 6 - \log_3 3 = \log_3 2$

底 $3 > 1$ より、 $y = \log_3 x$ は増加関数で、 $\sqrt{3} < 2 < \sqrt{5}$ であるから、

$\log_3 \sqrt{3} < \log_3 2 < \log_3 \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < -1 - \log_3 \frac{1}{6} < \log_9 5$

(2) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 8}{2} = \log_2 2\sqrt{2}$ **底を 2 にそろえる**

底 $2 > 1$ より、 $y = \log_2 x$ は増加関数で、 $2\sqrt{2} < 3$ であるから、

$\log_2 2\sqrt{2} < \log_2 3 \Leftrightarrow \log_4 8 < \log_2 3$

底 $0.5 < 1$ より、 $y = \log_{0.5} x$ は減少関数であるから、

$\log_{0.5}(\log_4 8) > \log_{0.5}(\log_2 3)$



底が 1 より小さいので、
大小関係が逆転します。
間違いやすいので注意
が必要です。

§ 3 対数関数の利用

まずは底の変換公式を用いて、底をそろえることから始めるとよいでしょう。

○ 方程式・不等式

ここでは、対数を含む方程式・不等式を解いていく。ここで最も大切なのが、与えられた式が成立するための前提条件

$$\text{対数 } \log_a M \text{ について, } \begin{cases} M > 0 \text{ (真数条件)} \\ a > 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ (底の条件)} \end{cases}$$

を満たすような解を求めていくということです。

例 4 次の方程式を解きなさい。

(1) $\log_3 x = \log_9(x+2)$

(2) $\log_3 x = \log_x 9 + 1$

(1) 真数条件より, $x > 0, x+2 > 0$ よって, $x > 0 \cdots \textcircled{1}$

まずは真数条件のチェック!

このとき, $\log_3 x = \log_9(x+2) \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}$

底を 3 にそろえる

$$\Leftrightarrow 2 \log_3 x = \log_3(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x^2 = \log_3(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x+2$$

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \log_a \alpha = \log_a \beta$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 2$$

① より, $x = 2$

最後に真数条件を満たしているか確認!

(2) 真数, 底の条件より, $x > 0, x \neq 1 \cdots \textcircled{1}$

まずは真数, 底の条件のチェック!

このとき, $\log_3 x = \log_x 9 + 1 \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{\log_3 9}{\log_3 x} + 1$

底を 3 にそろえる

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0$$

ここで, $\log_3 x = t$ とおくと,

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = -1, 2$$

よって, $\log_3 x = -1, 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, 9$

これは①を満たす。

最後に真数, 底の条件を満たしているか確認!

例 5 次の不等式を解きなさい。

(1) $\log_3(x-3) + \log_3(x+5) < 2$

(2) $2\log_a(x-4) < \log_a 2x$ (ただし, $a > 0, a \neq 1$)

(1) 真数条件より, $x-3 > 0, x+5 > 0$ よって, $x > 3$...①

このとき, $\log_3(x-3) + \log_3(x+5) < 2 \Leftrightarrow \log_3(x-3)(x+5) < \log_3 9$

底 $3 > 1$ より, $(x-3)(x+5) < 9 \Leftrightarrow (x-4)(x+6) < 0$

$\Leftrightarrow -6 < x < 4$

①より, $3 < x < 4$

この確認は重要!
1 より大きいので, 真数と対数の
大小が一致します。
(2) は 1 との大小が不明なので
場合分けをします。

(2) 真数条件より, $x-4 > 0, 2x > 0$ よって, $x > 4$...①

このとき, $2\log_a(x-4) < \log_a 2x \Leftrightarrow \log_a(x-4)^2 < \log_a 2x$

(i) $a > 1$ のとき

$\log_a(x-4)^2 < \log_a 2x \Leftrightarrow (x-4)^2 < 2x$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-8) < 0$

$\Leftrightarrow 2 < x < 8$

①より, $4 < x < 8$

(ii) $0 < a < 1$ のとき

$\log_a(x-4)^2 < \log_a 2x \Leftrightarrow (x-4)^2 > 2x$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-8) > 0$

$\Leftrightarrow x < 2, x > 8$

①より, $x > 8$

以上より, $\begin{cases} a > 1 \text{ のとき, } 4 < x < 8 \\ 0 < a < 1 \text{ のとき, } x > 8 \end{cases}$

○ 最大・最小

例 6 次の関数の最大値・最小値を求めなさい。

$$(1) \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(4-x) \qquad (2) \quad y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 - 2 \quad \left(\frac{1}{4} \leq x \leq 16\right)$$

(1) 真数条件より, $x > 0$, $4-x > 0$ よって, $0 < x < 4$ … ①

$$\text{このとき, } y = \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(4-x) = \log_{\frac{1}{2}} x(4-x) = \log_{\frac{1}{2}}\{-(x-2)^2 + 4\}$$

①より, 真数の最大値は4 ($x=2$), 最小値は存在しない。

底 $\frac{1}{2} < 1$ より, 最小値は $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ ($x=2$), 最大値は存在しない。



底が1より小さいので, 真数と対数の最大・最小が逆転します。

(2) $\log_2 x = t$ とおく。

底 $2 > 1$ より, $\frac{1}{4} \leq x \leq 16$ のとき, $\log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 16 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 4$

$$\begin{aligned} y &= (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 - 2 \\ &= (\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x - 2 \\ &= t^2 - 4t - 2 \\ &= (t-2)^2 - 6 \end{aligned}$$

よって, $t = -2$ つまり, $x = \frac{1}{4}$ のとき, 最大値 10

$t = 2$ つまり, $x = 4$ のとき, 最小値 -6

MEMO

§ 4 常用対数

豊臣秀吉に御伽衆として仕えた商人「曾呂利新左衛門」のお話です。
秀吉から褒美を下される際、何を希望するか尋ねられた新左衛門は、

『今日は米 2 粒, 明日はその 2 倍の 4 粒, その次の日はその倍の 8 粒,
倍々が増えて, 1 ヶ月の間お米を賜りたい』

と答えました。秀吉は、その望みの小ささに二つ返事で快諾したのですが、その結果はいかに…。



具体的に計算してみると、30 日後にもらうお米の量は 2^{30} 粒なので、もらう米粒の総量は以下のようになります。

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{29} + 2^{30} = \frac{2(2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{31} - 2 \text{ 粒}$$

さて、ここで問題になるのは「 2^{31} がどれくらいの値になるのか?」ということです。

この数をまともに計算すると、とてつもなく大きな数になってしまうので、ここでは**常用対数**を利用して概数を計算していきます。常用対数とは**底が 10 である対数**のことで、その詳しい値は p.15,16 にある**常用対数表**に記されています。

常用対数表には $1.00 \leq a \leq 9.99$ における $\log_{10} a$ の小数第 5 位を四捨五入した値が記されています。
例えば、 $\log_{10} 1.81$ の値は、縦の列の「1.8」と横の列の「1」が交差したところを書いてある値 0.2577 になります(正確には小数第 5 位を四捨五入した値が 0.2577 なので、 $\log_{10} 1.81$ は $0.25765 \leq \log_{10} 1.81 < 0.25775$ を満たす値です)。

この表を用いると、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ となるので、

$$\log_{10} 2^{31} = 31 \log_{10} 2 = 31 \times 0.3010 = 9.331$$

これより、 $\log_{10} 2^{31} = 9.331 \Leftrightarrow 2^{31} = 10^{9.331}$ となることから

$$10^9 < 10^{9.331} < 10^{10} \Leftrightarrow 10^9 < 2^{31} < 10^{10}$$

を満たすので、 2^{31} は **10 桁の数**であることが分かります。

	0	1	2
1.0	0.0000	0.0043	0.0086
1.1	0.0414	0.0453	0.0492
1.2	0.0792	0.0828	0.0864
1.3	0.1139	0.1173	0.1206
1.4	0.1461	0.1492	0.1523
1.5	0.1761	0.1790	0.1818
1.6	0.2041	0.2068	0.2095
1.7	0.2304	0.2330	0.2355
1.8	0.2553	0.2577	0.2601
1.9	0.2788	0.2810	0.2833
2.0	0.3010	0.3032	0.3054

さらに、常用対数表を用いることで、もう少し詳しく値を調べることができます。

$10^{9.331} = 10^9 \cdot 10^{0.331}$ と分けて、 $10^{0.331}$ の部分を調べていきます。

常用対数表から、 $\log_{10} 2.14 = 0.3304$, $\log_{10} 2.15 = 0.3324$ となるので、

$$\begin{aligned} 0.3304 < 0.331 < 0.3324 &\Leftrightarrow 10^{0.3304} < 10^{0.331} < 10^{0.3324} \\ &\Leftrightarrow 2.14 < 10^{0.331} < 2.15 \end{aligned}$$

これより、

$$2.14 \cdot 10^9 < 10^9 \cdot 10^{0.331} < 2.15 \cdot 10^9 \Leftrightarrow 2.14 \cdot 10^9 < 2^{31} < 2.15 \cdot 10^9$$

となるので、 $2^{31} = \underbrace{214 \text{ ****}}_{10 \text{ 桁}}$ となります。

つまり、 2^{31} は **上 3 ケタが 214 である 10 桁の数**であると分かるのです。

(実際は、 $\log_{10} 2$ は $0.30095 \leq \log_{10} 2 < 0.30105$ を満たす値なので、

$$9.32945 \leq 31 \log_{10} 2 < 9.33255 \Leftrightarrow 10^{9.32945} < 2^{31} < 10^{9.33255}$$

となります。これを用いると桁数が 10 桁であることは分かりますが、最高位は 2 桁までしか分かりません。)

この結果は米俵 1000 俵に相当するそうで、膨大な量になる事に途中で気付いた秀吉は、急いで他の褒美に変えてもらったとのこと。



このように常用対数表を用いると、どんなに大きな数の計算であっても、そのだいたいの値を簡単に知ることができるわけです。もちろん、現代において使う場面はほぼないのですが、まだ計算機の発達していなかった時代には、画期的な計算方法として、物理学者や天文学者に広く使われました。

参考のために、その当時、主に使われていた計算方法を紹介しておきましょう。

$$\begin{aligned}
 1640 \times 1750 &= 1.64 \times 10^3 \times 1.75 \times 10^3 \\
 &= 10^{0.2148} \times 10^{0.2430} \times 10^6 \\
 &= 10^{0.2148+0.2430} \times 10^6 \\
 &= 10^{0.4578} \times 10^6 \\
 &\approx 2.87 \times 10^6 \\
 &= 2870000
 \end{aligned}$$

常用対数表より

$$1.64 = 10^{0.2148}, 1.75 = 10^{0.2430}$$

常用対数表より

$$10^{0.4578} = 2.87$$

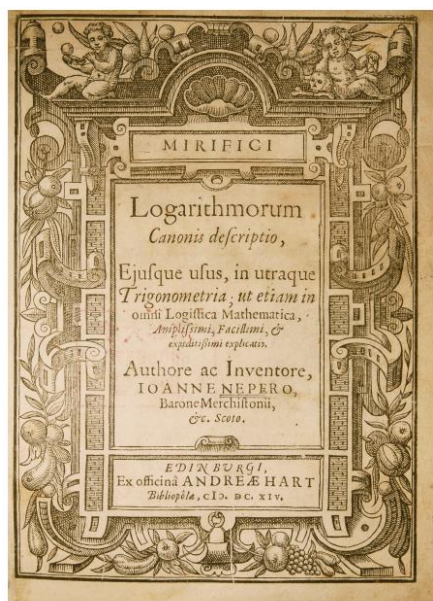


ジョン・ネイピア
(1550~1617)

$$\begin{array}{r}
 1640 \\
 \times 1750 \\
 \hline
 8200 \\
 114800 \\
 164000 \\
 \hline
 287000
 \end{array}$$

実際に確認してみるとよいでしょう。正確な値が毎回出てくるわけではないのですが、この場合はぴったりと一致しているはず。

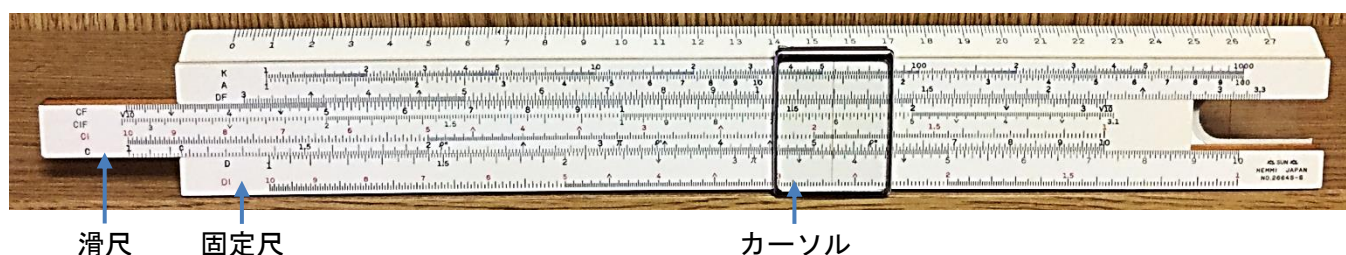
この常用対数表はジョン・ネイピアによって作られ、これにより、「天文学者の寿命が倍に延びた」と言われるほど画期的なものであったそうです。



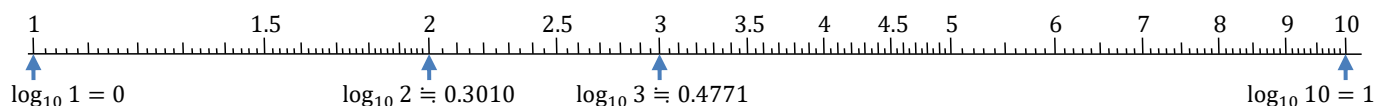
Gr.	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
Sum	1000000	999999	999998	999997	999996	999995	999994	999993	999992	999991	999990	999989	999988	999987	999986	999985	999984	999983	999982	999981	999980	999979	999978	999977	999976	999975	999974	999973	999972	999971	999970	999969	999968	999967	999966	999965	999964	999963	999962	999961	999960	999959	999958	999957	999956	999955	999954	999953	999952	999951	999950	999949	999948	999947	999946	999945	999944	999943	999942	999941	999940	999939	999938	999937	999936	999935	999934	999933	999932	999931	999930	999929	999928	999927	999926	999925	999924	999923	999922	999921	999920	999919	999918	999917	999916	999915	999914	999913	999912	999911	999910	999909	999908	999907	999906	999905	999904	999903	999902	999901	999900	999899	999898	999897	999896	999895	999894	999893	999892	999891	999890	999889	999888	999887	999886	999885	999884	999883	999882	999881	999880	999879	999878	999877	999876	999875	999874	999873	999872	999871	999870	999869	999868	999867	999866	999865	999864	999863	999862	999861	999860	999859	999858	999857	999856	999855	999854	999853	999852	999851	999850	999849	999848	999847	999846	999845	999844	999843	999842	999841	999840	999839	999838	999837	999836	999835	999834	999833	999832	999831	999830	999829	999828	999827	999826	999825	999824	999823	999822	999821	999820	999819	999818	999817	999816	999815	999814	999813	999812	999811	999810	999809	999808	999807	999806	999805	999804	999803	999802	999801	999800	999799	999798	999797	999796	999795	999794	999793	999792	999791	999790	999789	999788	999787	999786	999785	999784	999783	999782	999781	999780	999779	999778	999777	999776	999775	999774	999773	999772	999771	999770	999769	999768	999767	999766	999765	999764	999763	999762	999761	999760	999759	999758	999757	999756	999755	999754	999753	999752	999751	999750	999749	999748	999747	999746	999745	999744	999743	999742	999741	999740	999739	999738	999737	999736	999735	999734	999733	999732	999731	999730	999729	999728	999727	999726	999725	999724	999723	999722	999721	999720	999719	999718	999717	999716	999715	999714	999713	999712	999711	999710	999709	999708	999707	999706	999705	999704	999703	999702	999701	999700	999699	999698	999697	999696	999695	999694	999693	999692	999691	999690	999689	999688	999687	999686	999685	999684	999683	999682	999681	999680	999679	999678	999677	999676	999675	999674	999673	999672	999671	999670	999669	999668	999667	999666	999665	999664	999663	999662	999661	999660	999659	999658	999657	999656	999655	999654	999653	999652	999651	999650	999649	999648	999647	999646	999645	999644	999643	999642	999641	999640	999639	999638	999637	999636	999635	999634	999633	999632	999631	999630	999629	999628	999627	999626	999625	999624	999623	999622	999621	999620	999619	999618	999617	999616	999615	999614	999613	999612	999611	999610	999609	999608	999607	999606	999605	999604	999603	999602	999601	999600	999599	999598	999597	999596	999595	999594	999593	999592	999591	999590	999589	999588	999587	999586	999585	999584	999583	999582	999581	999580	999579	999578	999577	999576	999575	999574	999573	999572	999571	999570	999569	999568	999567	999566	999565	999564	999563	999562	999561	999560	999559	999558	999557	999556	999555	999554	999553	999552	999551	999550	999549	999548	999547	999546	999545	999544	999543	999542	999541	999540	999539	999538	999537	999536	999535	999534	999533	999532	999531	999530	999529	999528	999527	999526	999525	999524	999523	999522	999521	999520	999519	999518	999517	999516	999515	999514	999513	999512	999511	999510	999509	999508	999507	999506	999505	999504	999503	999502	999501	999500	999499	999498	999497	999496	999495	999494	999493	999492	999491	999490	999489	999488	999487	999486	999485	999484	999483	999482	999481	999480	999479	999478	999477	999476	999475	999474	999473	999472	999471	999470	999469	999468	999467	999466	999465	999464	999463	999462	999461	999460	999459	999458	999457	999456	999455	999454	999453	999452	999451	999450	999449	999448	999447	999446	999445	999444	999443	999442	999441	999440	999439	999438	999437	999436	999435	999434	999433	999432	999431	999430	999429	999428	999427	999426	999425	999424	999423	999422	999421	999420	999419	999418	999417	999416	999415	999414	999413	999412	999411	999410	999409	999408	999407	999406	999405	999404	999403	999402	999401	999400	999399	999398	999397	999396	999395	999394	999393	999392	999391	999390	999389	999388	999387	999386	999385	999384	999383	999382	999381	999380	999379	999378	999377	999376	999375	999374	999373	999372	999371	999370	999369	999368	999367	999366	999365	999364	999363	999362	999361	999360	999359	999358	999357	999356	999355	999354	999353	999352	999351	999350	999349	999348	999347	999346	999345	999344	999343	999342	999341	999340	999339	999338	999337	999336	999335	999334	999333	999332	999331	999330	999329	999328	999327	999326	999325	999324	999323	999322	999321	999320	999319	999318	999317	999316	999315	999314	999313	999312	999311	999310	999309	999308	999307	999306	999305	999304	999303	999302	999301	999300	999299	999298	999297	999296	999295	999294	999293	999292	999291	999290	999289	999288	999287	999286	999285	999284	999283	999282	999281	999280	999279	999278	999277	999276	999275	999274	999273	999272	999271	999270	999269	999268	999267	999266	999265	999264	999263	999262	999261	999260	999259	999258	999257	999256	999255	999254	999253	999252	999251	999250	999249	999248	999247	999246	999245	999244	999243	999242	999241	999240	999239	999238	999237	999236	999235	999234	999233	999232	999231	999230	999229	999228	999227	999226	999225	999224	999223	999222	999221	999220	999219	999218	999217	999216	999215	999214	999213	999212	999211	999210	999209	999208	999207	999206	999205	999204	999203	999202	999201	999200	999199	999198	999197	999196	999195	999194	999193	999192	999191	999190	999189	999188	999187	999186	999185	999184	999183	999182	999181	999180	999179	999178	999177	999176	999175	999174	999173	999172	999171	999170	999169	999168	999167	999166	999165	999164	999163	999162	999161	999160	999159	999158	999157	999156	999155	999154	999153	999152	999151	999150	999149	999148	999147	999146	999145	999144	999143	999142	999141	999140	999139	999138	999137	999136	999135	999134	999133	999132	999131	999130	999129	999128	999127	999126	999125	999124	999123	999122	999121	999120	999119	999118	999117	999116	999115	999114	999113	999112	999111	999110	999109	999108	999107	999106	999105	999104	999103	999102	999101	999100	999099	999098	999097	999096	999095	999094	999093	999092	999091	999090	999089	999088	999087	999086	999085	999084	999083	999082	999081	999080	999079	999078	999077	999076	999075	999074	999073	999072	999071	999070	999069	999068	999067	999066	999065	999064	999063	999062	999061	999060	999059	999058	999057	999056	999055	999054	999053	999052	999051	999050	999049	999048	999047	999046	999045	999044	999043	999042	999041	999040	999039	999038	999037	999036	999035	999034	999033	999032	999031	999030	999029	999028	999027	999026	999025	999024	999023	999022	999021	999020	999019	999018	999017	999016	999015	999014	999013	999012	999011	999010	999009	999008	999007	999006	999005	999004	999003	999002	999001	999000	999999	999998	999997	999996	999995	999994	999993	999992	999991	999990	999989	999988	999987	999986	999985	999984	999983	999982	999981	999980	999979	999978	999977	999976	999975	999974	999973	999972	999971	999970	999969	999968	999967	999966	999965	999964	999963	999962	999961	999960	999959	999958	999957	999956	999955	999954	999953	999952	999951	999950	999949	999948	999947	999946	999945	999944	999943	999942	999941	999940	999939	999938	999937	999936	999935	999934	999933	999932	999931	999930	999929	999928	999927	999926	999925	999924	999923	999922	999921	999920	999919	999918	999917	999916	999915	999914	9999

column (計算尺とは?)

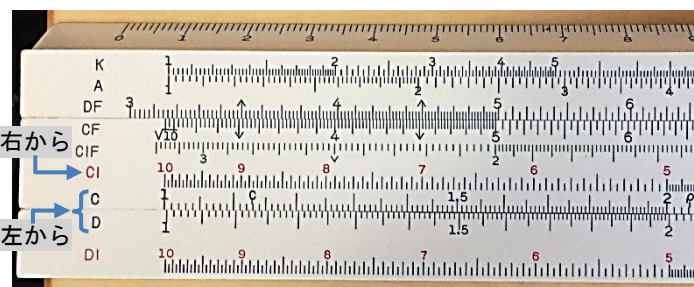
その昔、今のように便利な電卓がなかった頃、理系の学生は計算をするのに計算尺という道具を使って計算をしていました(1960年代の後半ぐらいまで使われていたようです)。



計算尺は上の写真のように、滑尺、固定尺、カーソルの3つの部分からできていて、滑尺、カーソルを動かしながら目盛りを読むことで計算結果を知ることができます。そして、計算尺に記されている目盛りには対数目盛というものが使われています。対数目盛とは「数直線上の $\log_{10} x$ の位置に x と印した目盛り」になります(つまり、 $\log_{10} 1 = 0$ なので数直線上の0の位置に1と印し、 $\log_{10} 10 = 1$ なので数直線上の1の位置に10と印す)。

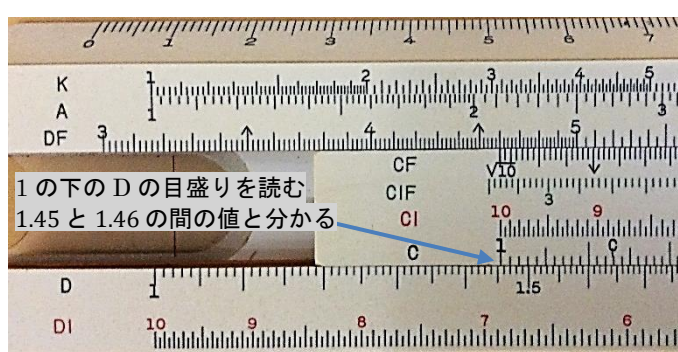
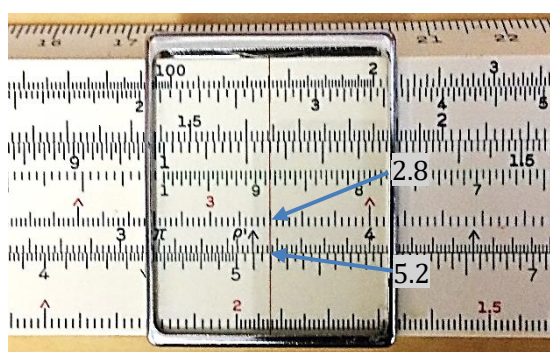


そして、この計算尺の中に対数目盛がいくつも書かれているのですが、CとDの列には左から1から10の目盛りが、CIの列には右から1から10の目盛りが記されています。では、このC,D,CIの目盛りを用いて実際に計算をしてみましょう。



例えば、 5.2×2.8 を計算しようと思ったら以下の手順で求めます。

- ① カーソル(カーソルの真ん中の赤い線)をDの目盛りの5.2に合わせる。
- ② 滑尺を動かしてCIの目盛りの2.8をカーソルに合わせる。
- ③ Cの目盛りの1のすぐ真下にあるDの目盛りを読む。



たった、これだけの手順で計算結果が分かるわけです。

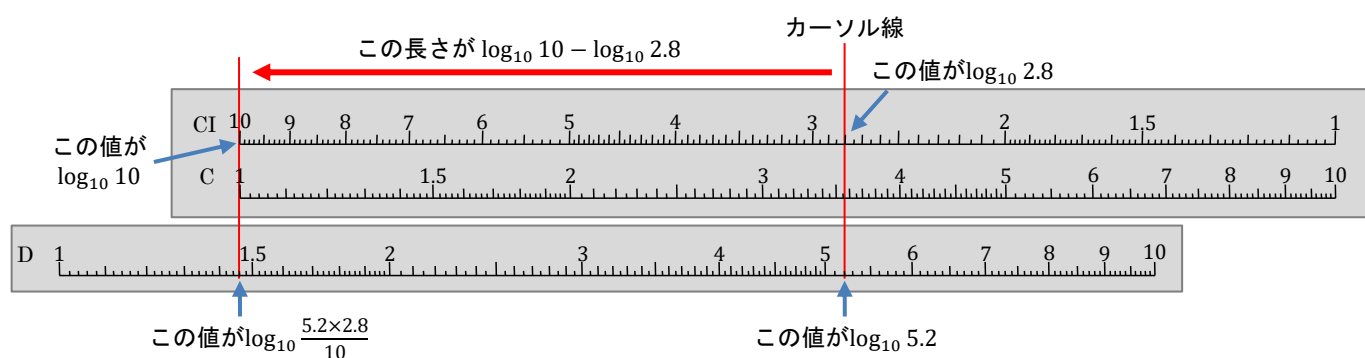
では、なぜこの手順で掛け算の値が求まるのかを説明していきましょう。

まず、「カーソルを D の目盛りの 5.2 に合わせる」というのは、実際は $\log_{10} 5.2$ にカーソルを合わせたということになります。そして、その位置から $\log_{10} 10 - \log_{10} 2.8$ だけ戻った位置に C の目盛りの 1 があります。 $\log_{10} 5.2$ から $\log_{10} 10 - \log_{10} 2.8$ だけ戻ったということは、

$$\log_{10} 5.2 - (\log_{10} 10 - \log_{10} 2.8) = \log_{10} 5.2 + \log_{10} 2.8 - \log_{10} 10 = \log_{10} \frac{5.2 \times 2.8}{10}$$

となるので、C の目盛りの 1 のすぐ下の D の目盛りには $\frac{5.2 \times 2.8}{10}$ が記されていることになります。

つまり、その目盛りの値を 10 倍したものが 5.2×2.8 の答えになるというわけです(答えは 14.56)。



このように計算尺では、「真数の掛け算が対数の足し算に変わる」性質を使うことによって掛け算の値を計算しているわけです。もちろん、「真数の割り算が対数の引き算に変わる」性質を使えば、割り算を簡単に計算することができます。ぜひ考えてみるとよいでしょう。

【常用対数表】

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996