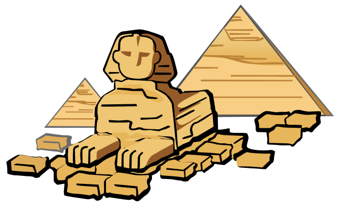
積　分(数学Ⅱ)

§0　河の氾濫の果てに…



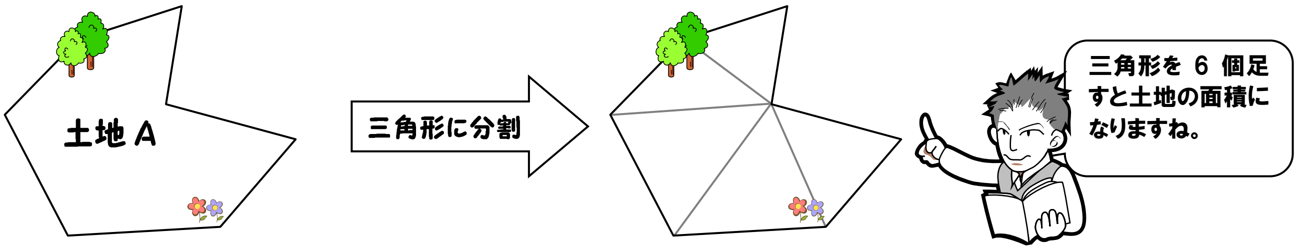
紀元前 3000 年頃に始まった古代エジプト文明。この文明の繁栄を支えていたのは，全長 6650 ㎞の世界最長の河川ナイル川。毎年起こるナイル川の洪水が上流から栄養分をたっぷり含んだ土をもたらし，肥沃な土壌と水がエジプトの豊かな農業を可能にしたといわれています。

ところが，川が氾濫すると全てを押し流してしまい，どこが自分の土地だか分からなくなってしまいました。そこで，昔の人は**正確に土地を測量する技術**を発達させていったのです。

それでは，実際の測量の様子 2 例を見てみましょう。

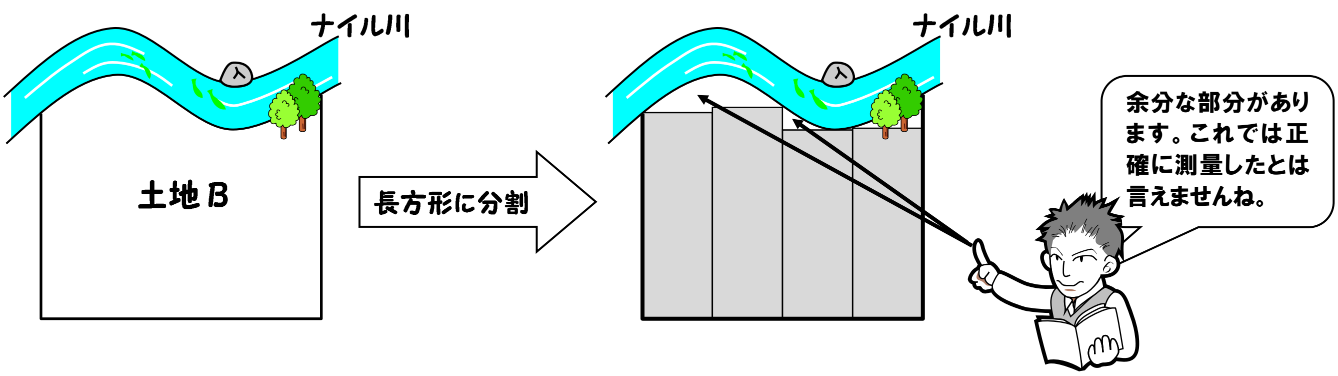
①　多角形の土地 A の場合

多角形の場合は必ず三角形に分割することができます。
三角形の面積は(底辺)×(高さ)÷2 で求まるので，この場合は簡単に測量できます。

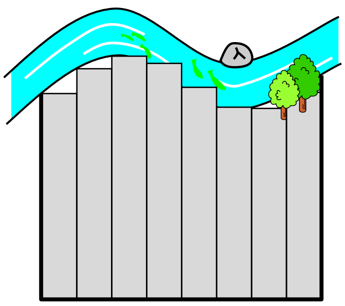


②　川沿いの土地 B の場合

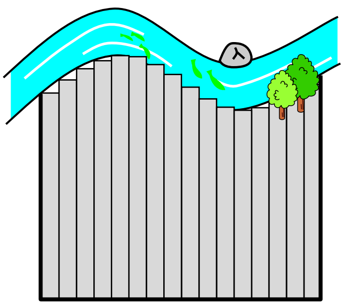
この場合，土地は川に沿ってくねくね曲がっていて，先ほどのように単純にはいきそうにありません。
そこで，ここではとりあえず，**長方形に分割**してみましょう。



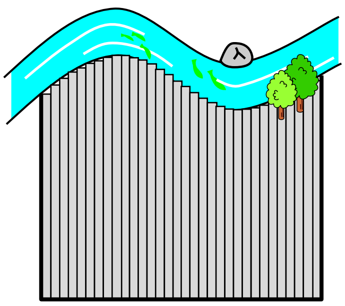
この 4 つの長方形の面積の和と土地 B を比べるとだいぶ違います。これでは正確に面積を測れたとは言えそうにありません。そこで，今度は分割する長方形の数を増やしてみましょう。



《長方形 8 個》



《長方形 16 個》

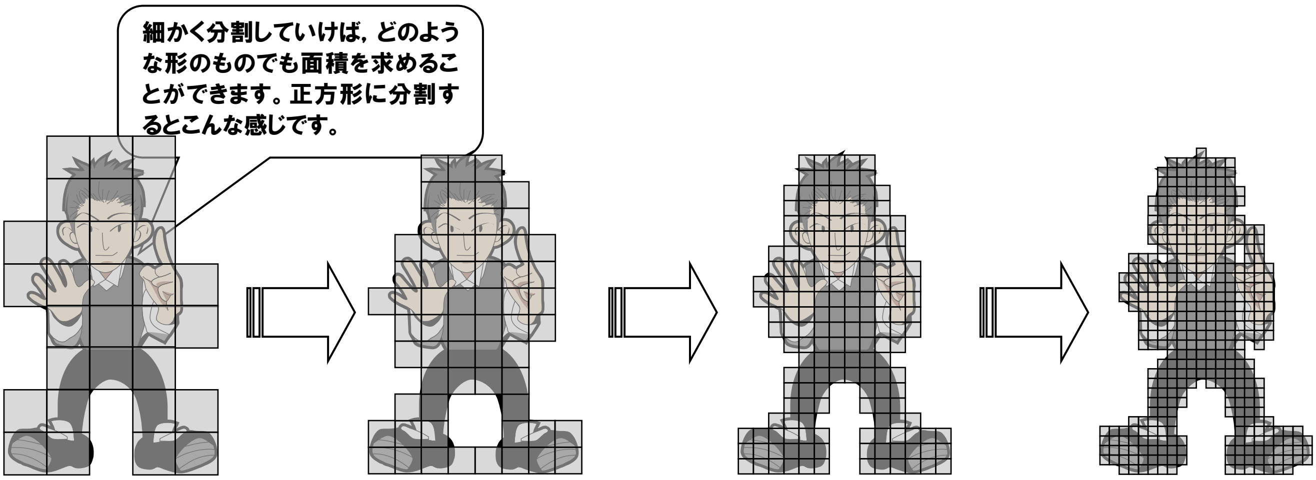


《長方形 32 個》

いかがでしょうか？分割する長方形の数を増やしていくと次第に

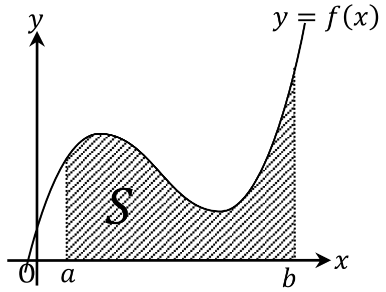
(長方形の面積の和) = (土地 B の面積)

となっていることがわかります。もう少し正確に測量したいという人は分割数をさらに増やして計算すればよりよい値が得られるはずです。この細かく分割していくという作業こそが，これから学んでいく**積分の心**なのです。



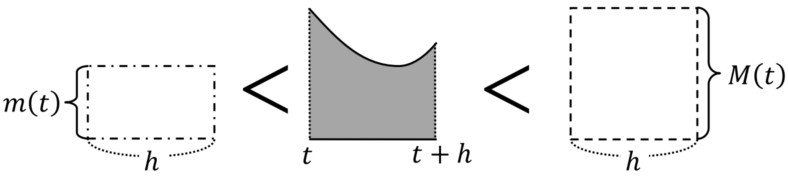
§1　不定積分

ここでは，【図 1】の斜線部分の面積 S について考える。

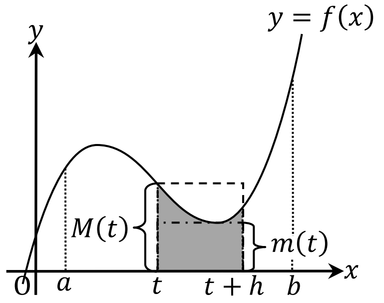


【図 1】

まず，$y=f(x)$ の $t \leqq x \leqq t+h$ における最大値を $M(t)$，最小値を $m(t)$ とする。このとき，$t \leqq x \leqq t+h$ の部分(【図 2】の灰色部)の面積は



という大小関係になっている。



【図 2】

ここで，$a \leqq x \leqq t$ の部分の面積を $S(t)$ とし，上記の関係を式で表すと，

$$m(t)\cdot h < S(t+h)-S(t) < M(t)\cdot h$$

となる。両辺を h で割ると

$$m(t) < \frac{S(t+h)-S(t)}{h} < M(t)$$

微分の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ここで，h を限りなく 0 に近づけると，不等式の真ん中は $S'(t)$，両端はともに $f(t)$ に近づくので

$$S'(t)=f(t)$$

という関係式が得られる。

以上のことから，$a \leqq x \leqq t$ の部分の面積 $S(t)$ は，『**微分すると $f(t)$ になる**』ということが分かります。
具体的に見ていくと，元の関数 $f(x)$ が仮に，

$f(t)=2t-1$ ならば…　　$S(t)=t^2-t$

$f(t)=t^2$ ならば…　　$S(t)=\frac{1}{3}t^3$

$f(t)=4t^3+3t^2$ ならば…　　$S(t)=t^4+t^3$

となるわけです。実際，$(\text{定数})'=0$ ということを考えると，$f(t)=2t-1$ のとき

$$S(t)=t^2-t+1=t^2-t+2=t^2-t+3=t^2-t+4=\cdots$$

というように $S(t)$ の候補は無数にあるわけです。
つまり，$f(t)=2t-1$ ならば，$S(t)=t^2-t+C$ $(C\text{ は定数})$ と表すことができるということが分かります。

○　不定積分

　$F'(x)=f(x)$ が成り立つとき，$F(x)$を $f(x)$の**原始関数**，または**不定積分**という。
$G(x)=F(x)+C$ $\left(C：定数\right)$ とおくと，$G'(x)=F'(x)=f(x)$ が成り立つので，
$G(x)$ も $f(x)$ の原始関数となる。よって，$f(x)$の任意の原始関数は $F(x)+C$ と表すことができる。
これを，記号を用いて

$$\int f(x)dx$$

と表す。

不定積分

$$F'(x)=f(x) \iff \int f(x)dx=F(x)+C \quad \left(C:積分定数\right)$$

記号 $\int$ は**インテグラル**といい，この $\int f(x)dx$ を求めることを**積分する**という。

以上をまとめると，**積分は微分の逆演算である**ということであり，さらに，積分は面積を
求めるのに大きく貢献しているということです。詳しくは§2 で見ていきます。

○　不定積分の計算

　ここでは積分の基本的な計算の性質をいくつか上げておきましょう。§1 で見たように微分と積分は
逆演算になっているので，微分の公式から積分の公式を求めることができます。なお，今後，特に断りが
ない限り C は積分定数を，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数を表すものとします。

まずは最もよく使う積分の公式を挙げておきます。

積分の公式(その 1)

n が 0 以上の整数のとき，

① $$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n \quad \Rightarrow \quad \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

② $$\left\{\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}\right\}'=(ax+b)^n \quad \Rightarrow \quad \int (ax+b)^n dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$$

さらに積分の和，実数倍に関しての性質も挙げておきます。

積分の公式(その 2)

① $$\{kF(x)\}'=kf(x) \quad \Rightarrow \quad \int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad \left(k\ \text{は定数}\right)$$

② $$\{F(x)+G(x)\}'=f(x)+g(x) \quad \Rightarrow \quad \int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

これからこの公式を用いて練習問題を解いていきますが，積分と微分は逆演算になっている
ということから，**積分をしたら微分することで計算があっているか確認することができます。**簡単な確認
方法ですから計算に自身のない人は必ず実行するようにしましょう！

§2　定積分

まず，定積分の定義から…

定積分

関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき， a から b までの定積分を次のように表す。

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

この値は積分定数 C の値に関係しない。

それではこれを用いて，§1 の面積を考えていきましょう。

$y = f(x)$において，右図の斜線部分の面積を $S(t)$ は

$S'(t) = f(t)$ という関係式が成立している。

つまり，$S(t)$ は $f(t)$ の**原始関数の１つ**ということが分かる。

ここで,

$$\int f(t)dx = F(t) + C$$

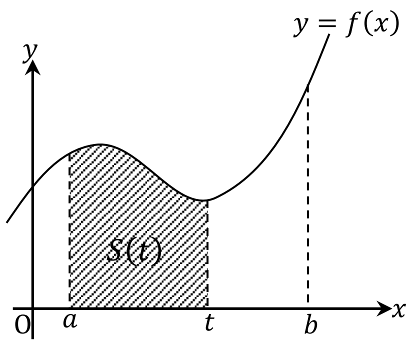
とすると，$S(t)$ と $F(t)$ の間には

$$S(t) = F(t) + C \quad \cdots(*)$$

という関係式が成り立つ。

$S(a) = 0$ となるので $(*)$ に $x = a$ を代入すると

$$F(a) + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -F(a)$$



以上より

$$S(t) = F(t) - F(a) = [F(x)]_a^t = \int_a^t f(x)dx$$

となるので，以下の式が成り立つ。

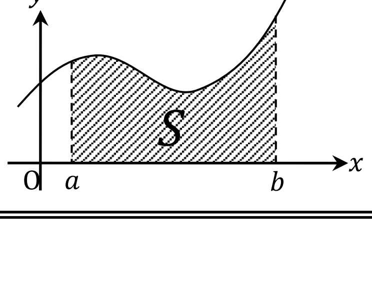
$$S = S(b) = \int_a^b f(x)dx$$

面積と定積分

右図の斜線部分面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

で表される。



§3　基本的な積分計算

定積分も不定積分と同様に次の公式が成り立つ。

定積分の性質(その1)

① $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ （k **は定数**）　② $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

さらに次のような性質もある。

定積分の性質(その2)

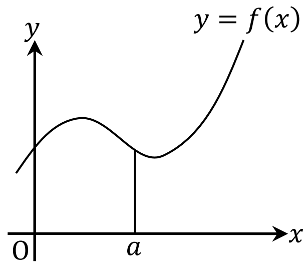
③ $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$　④ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

⑤ $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

$\boxed{\text{③, ④, ⑤の証明}}$ $\int f(x)dx = F(x) + C$ とおくことで証明できる。

③ $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

これは $a \leqq x \leqq a$ における面積と考えることができ，
結局,線分になってしまうので面積 0 となる。

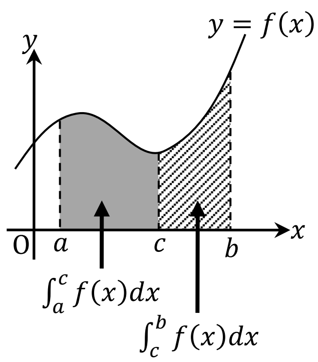


④ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -\{F(a) - F(b)\} = -[F(x)]_b^a = -\int_b^a f(x)dx$

⑤ $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(x)]_a^c - [F(x)]_c^b$

$\displaystyle= F(c) - F(a) - F(b) + F(c)$

$\displaystyle= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx$



これも以下のように面積の和で考えると分かりやすい。

$\Big(a$ **から** c **までの面積**$\Big) + \Big(c$ **から** b **までの面積**$\Big) = \Big(a$ **から** b **までの面積**$\Big)$

○　偶奇に関する定積分

定積分の計算をするときに，被積分関数の**偶奇性に注目**すると計算が楽になる。

定積分の性質(その 2)

n が 0 以上の整数のとき，

⑥ $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n}dx = 2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$　　⑦ $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n+1}dx = 0$

証明

$$\int_{-a}^{a} x^{2n}dx = \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2n+1}\{a^{2n+1}-(-a)^{2n+1}\}$$

$$= \frac{2}{2n+1}\cdot a^{2n+1} = 2\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_{0}^{a} = 2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$$

$$\int_{-a}^{a} x^{2n+1}dx = \left[\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2n+2}\{a^{2n+2}-(-a)^{2n+2}\} = 0$$

例 1　次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-1234}^{1234}(x^3-x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+4x^2-2x-1)dx$

(1) $\displaystyle\int_{-1234}^{1234}(x^3-x)dx = 0$

(2) $$\int_{-1}^{1}(x^3+4x^2-2x-1)dx = \underbrace{\int_{-1}^{1}(x^3-2x)dx}_{\text{この部分は0}} + \int_{-1}^{1}(4x^2-1)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1}(4x^2-1)dx = 2\left[\frac{4}{3}x^3-x\right]_{0}^{1} = 2\left(\frac{4}{3}-1\right) = \frac{2}{3}$$

一般的には，$y=f(x)$ が

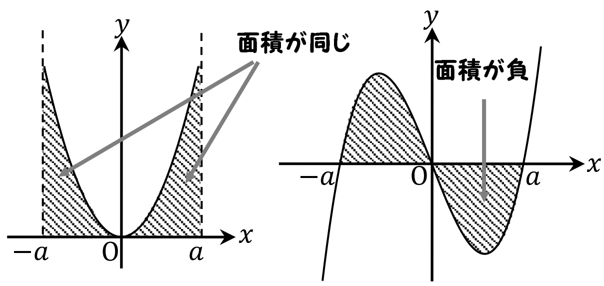
偶関数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

奇関数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

が成り立つ。

偶関数…グラフが y 軸に関して対称
$f(x)=f(-x)$ **が成り立つ**
奇関数…グラフが原点に関して対称
$-f(x)=f(-x)$ **が成り立つ**

証明は数Ⅲを勉強しないと理解できないが，
積分が面積を表すことを考えると，図より直感的な理解は得られるだろう。



○　重要な積分公式

ここではよく出てくる重要な積分公式を紹介しておきましょう。

重要な積分公式①

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

証明①　計算すればよいだけです。

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx &= a\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx \\ &= a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= a\left\{\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)\right\} \\ &= \frac{a}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta\} \\ &= \frac{a}{6}(\beta-\alpha)\{-\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2\} \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

証明②　少し工夫をします。

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx &= a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx \\ &= a\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx \\ &= a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3 \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$$

証明②と同じ手法を利用すれば，以下の公式も比較的簡単に示すことができます。

重要な積分公式②

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx = -\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

各自証明しておきましょう。

例 2 次の定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} 2(x+2)(x-1)dx$ (2) $\displaystyle\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} (-x^2+2x+2)dx$

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} 2(x+2)(x-1)dx = -\frac{2}{6}\{1-(-2)\}^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 = -9$

(2) $-x^2+2x+2=0 \iff x^2-2x-2=0 \iff x=1\pm\sqrt{3}$

よって，

$$\int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} (-x^2+2x+2)dx = -\frac{1}{6}\cdot(-1)\left\{1+\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{3}\right)\right\}^3 = \frac{1}{6}\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^3 = 4\sqrt{3}$$

(1)は公式を使わなくても大して大変ではないですが，(2)は $1\pm\sqrt{3}$ を代入しなくてはいけないので大変です。この公式の便利さがとてもよく分かります。

○ 定積分で表された関数

ここでは定積分を含む関数の扱いを 2 つのパターンに分けて学んでいく。

① 積分区間が定数のとき

この場合，定積分の結果は定数となるので，文字 C で置き換えると見通しがよくなる。

例えば，下の式も一見複雑そうに見えるが，文字で置き換えるとただの 2 次関数となるので，実は単純な式であることが分かる。

$$f(x) = x^2 + \underbrace{\int_b^a f(t)dt}_{C\text{ とおくと}} = x^2 + C$$

⇒ **2 次関数に！**

例 3 等式 $f(x) = x^2 + 2x - \displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)dt = C$ とおくと，$f(x) = x^2 + 2x - C$

これより，$C = \displaystyle\int_{-1}^{2}(t^2+2t-C)dt = \left[\frac{1}{3}t^3+t^2-Ct\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(8+1)+(4-1)-C(2+1) = 6-3C$

よって，$C = 6-3C \iff C = \dfrac{3}{2}$

以上より，$f(x) = x^2+2x-\dfrac{3}{2}$

② 積分区間に変数を含むとき

$\int f(t)dt = F(t) + C$ のとき　　$\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$ より

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

となり，この式は**微分積分学の基本定理**と呼ばれる。

これは微分と積分が互いに**「逆演算である」**ということを示す重要な式である。

微分積分学の基本定理

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a\text{ は定数})$$

以上より，このタイプの問題の解法は定積分の計算をせずに，微分することが方針の 1 つとなる。

例 4　関数 $f(x) = \int_{-1}^x (2t^2 - 3t + 1)dt$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値，最小値を求めなさい。

$f'(x) = 2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)(x-1)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2t^2 - 3t + 1)dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8} + 1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) + \frac{1}{2} + 1 = \frac{27}{8}$

$f(1) = \int_{-1}^{1} (2t^2 - 3t + 1)dt = 2\int_0^1 (2t^2 + 1)dt = 2\left[\frac{2}{3}t^3 + t\right]_0^1 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$

$f(-1) = \int_{-1}^{-1} (2t^2 - 3t + 1)dt = 0$

これより，増減表は右のようになる。よって，

最大値 $\frac{27}{8}$ $\left(x = \frac{1}{2}\right)$，最小値 0 $(x = -1)$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{27}{8}$	↘	$\frac{10}{3}$

この問題は先に $f(x)$ を求めてから計算してもよい。

$$f(x) = \int_{-1}^x (2t^2 - 3t + 1)dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t\right]_{-1}^x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{19}{6}$$

$f(x)$ を求めてしまえば，

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{19}{6}$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値・最小値を求める問題となる。

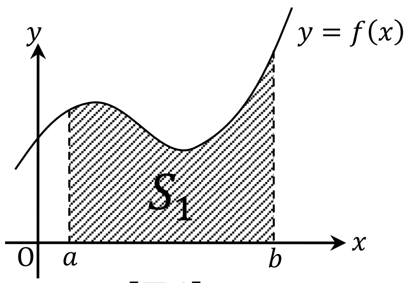
§4　面積

ここでは，より詳しく面積について考えていきましょう。

①　$y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ と x 軸で挟まれた部分の面積

まず，$f(x) > 0$ のときの面積 S_1 (図 1)は，§2 で学んだとおり，以下のように表すことができる。

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx$$



【図 1】

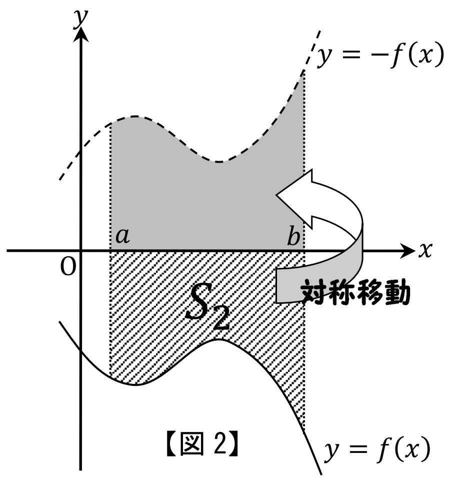
次に，$f(x) < 0$ のときの面積 S_2 (図 2)について考える。
これは，$y = f(x)$ を x 軸に関して対称移動して，

$$y = f(x) \quad \underset{\text{対称移動}}{\underset{x\,\text{軸に関して}}{\longleftrightarrow}} \quad y = -f(x)$$

「$y = -f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ と x 軸で囲まれた部分の面積」を求める。$-f(x) > 0$ を満たすので，S_1 と同様に求めると，

$$S_2 = \int_a^b \{-f(x)\}dx$$

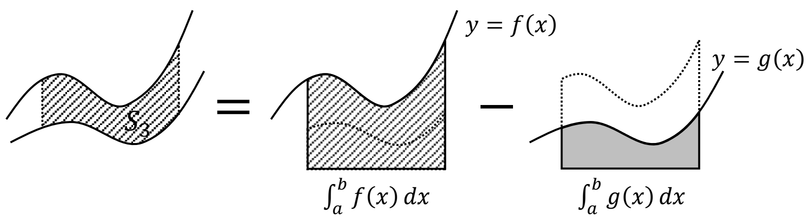
となる。

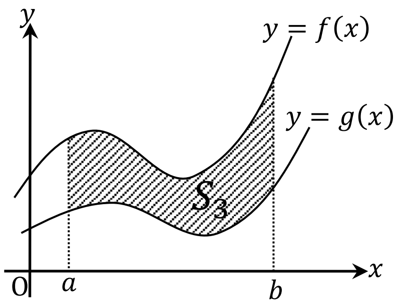


【図 2】

②　2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ に挟まれた部分の面積

$f(x) > 0$，$g(x) > 0$ のときの面積 S_3 (図 3)は，
次のように面積の差で考えるとよい。





【図 3】

これより，S_3 は

$$S_3 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

となり，**上にあるグラフから下にあるグラフをひけばよい**ことが分かる。

また，$f(x) > 0$，$g(x) > 0$ となっていない場合は，y 軸方向に $+k$ 平行移動して，

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad \underset{\text{平行移動}}{\underset{y\,\text{軸方向に}\,+k}{\longrightarrow}} \quad \begin{cases} y = f(x) + k \\ y = g(x) + k \end{cases}$$

「2 曲線 $y = f(x) + k$，$y = g(x) + k$ $(a \leqq x \leqq b)$ に挟まれた部分の面積」を求める。

適切に k を選べば，$f(x)+k>0$，$g(x)+k>0$ となるので，S_3 と同様に求めると，

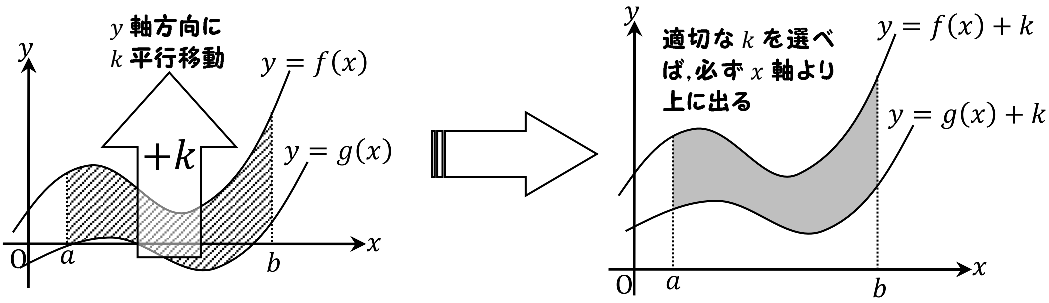
$$\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]\,dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

となり，先ほどと同じ式が導かれる。

以上より，2 曲線で囲まれた部分の面積は，2 つのグラフの位置によらず

『上にあるグラフから下にあるグラフの差』

をとり，積分すればよいことが分かる。



ところで，上で求めた S_1，S_2 はともに『$y=f(x)$ **と** x **軸** $(y=0)$ **によって挟まれた部分の面積**』と考えると，S_3 と同様に，『上にあるグラフから下にあるグラフの差』で求めることができる。

$$S_1=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\{f(x)-\underbrace{0}_{x\text{軸}}\}dx,\quad S_2=\int_a^b\{-f(x)\}dx=\int_a^b\{\underbrace{0}_{x\text{軸}}-f(x)\}dx$$

結局，面積を求めるには常に**グラフの上下関係**を意識して計算すればよい。

$$\left(\textbf{面積}\right)=\int_a^b\left(\boxed{\text{上にあるグラフ}}-\boxed{\text{下にあるグラフ}}\right)dx$$

例 5　次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めなさい。

$$y=x^2-3x-3\ (-2\leqq x\leqq 3),\ y=-3x+1,\ x=3$$

交点の x 座標は

$x^2-3x-3=-3x+1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm 2$

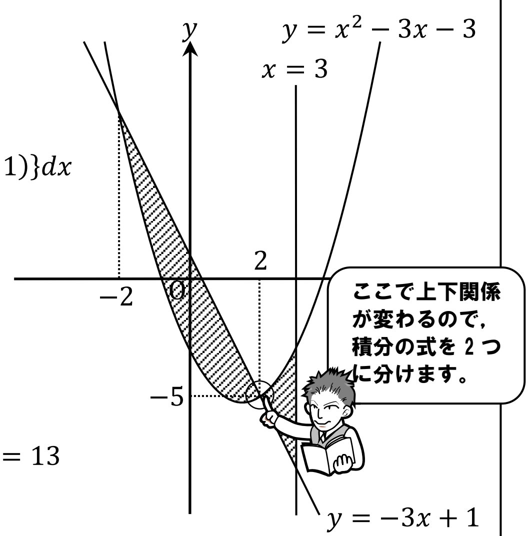
よって，求める面積は

$$\int_{-2}^{2}\{-3x+1-(x^2-3x-3)\}dx+\int_2^3\{x^2-3x-3-(-3x+1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx+\int_2^3(x^2-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3$$

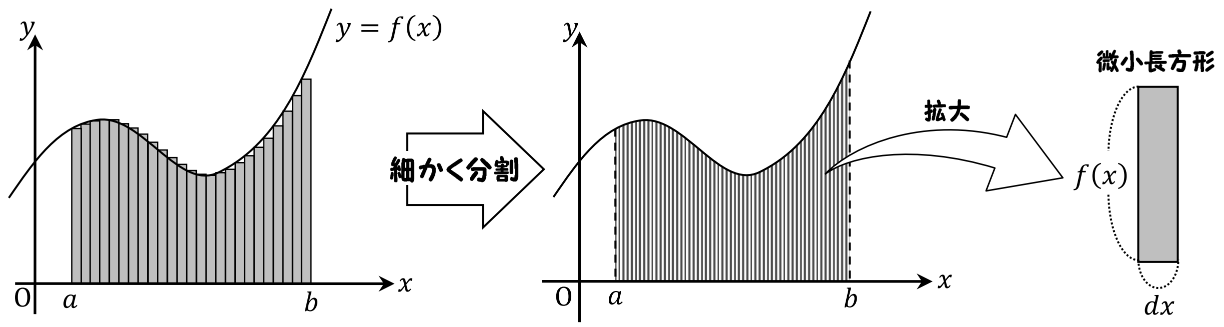
$$=-\frac{1}{3}(8+8)+4(2+2)+\frac{1}{3}(27-8)-4(3-2)=13$$



○　積分記号の意味

§0 でも述べたとおり，曲線に囲まれた図形の面積は，細かく分割してできた長方形の面積を足すことで，正確に求めることができた。そして，積分記号というのは，**「微小長方形の面積を求め,それを足す」**という作業をそのまま記号化したものなのである。

まずは微小長方形の面積を，式を用いて表すことを考える。まず，縦の長さは，ある点における y 座標なので $f(x)$ と表すことができる。そして，横の長さは微小な長さを表す記号 dx を用いる。これより，微小長方形の面積は $f(x)dx$ と表すことができる。

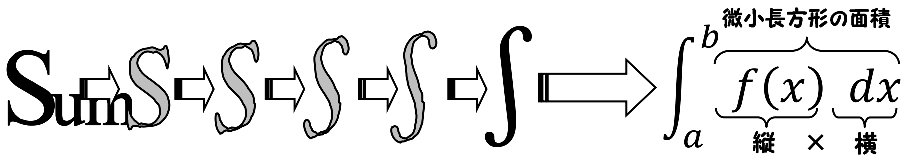


また，インテグラル記号 $\int$ は「足す」という意味の英語 Sum の頭文字 S を変形したものである。

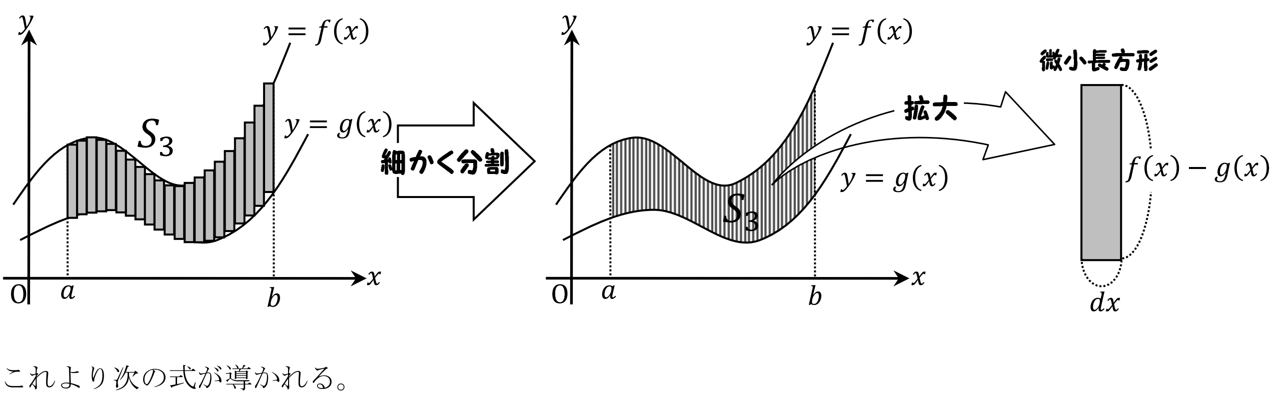
つまり，定積分の記号 $\int_a^b f(x)dx$ は

「微小長方形の面積 $f(x)dx$ を，a から b まで足す」

という，面積を求める際の本来の意味が込められていることが分かる。



p.11 の面積 S_3 も，微小長方形の和で考えることで，見通しがよくなる。



これより次の式が導かれる。

$$S_3 = \int_a^b \overbrace{\underbrace{\{f(x) - g(x)\}}_{\text{縦}} \times \underbrace{dx}_{\text{横}}}^{\text{微小長方形の面積}}$$

○　公式の利用

ここでは公式

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

用いた面積の求め方を見ていきましょう。

①　放物線と x 軸で囲まれた部分の面積

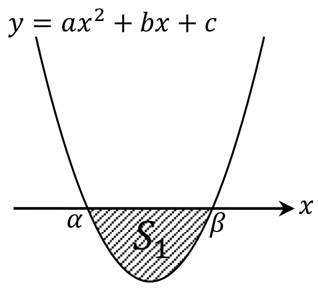
$y=ax^2+bx+c$ と x 軸との交点を α，β すると

$ax^2+bx+c=0 \iff a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

となるので，

$$S_1=\int_\alpha^\beta -(ax^2+bx+c)dx = -\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$



②　放物線と直線で囲まれた部分の面積

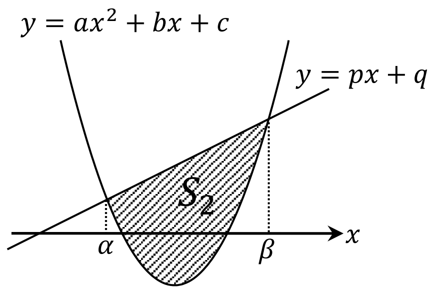
$y=ax^2+bx+c$ と $y=px+q$ との交点を α，β すると

$ax^2+bx+c=px+q \iff a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

となるので，

$$S_2=\int_\alpha^\beta \{px+q-(ax^2+bx+c)\}dx = -\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$



③　放物線と放物線で囲まれた部分の面積

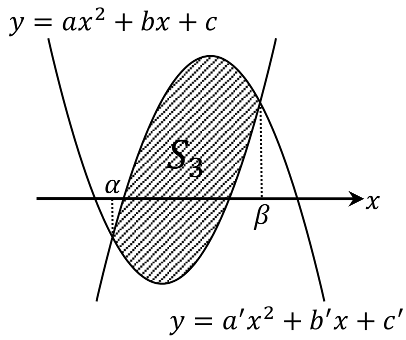
$y=ax^2+bx+c$ と $y=a'x^2+b'x+c'$ との交点を α，β すると

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c' \iff (a-a')(x-\alpha)(x-\beta)=0$

となるので，

$$S_3=\int_\alpha^\beta \{a'x^2+b'x+c'-(ax^2+bx+c)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (a-a')(x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{a-a'}{6}(\beta-\alpha)^3$$



この公式は『直線と放物線』,『放物線と放物線』で**囲まれた部分の面積を求める**ときに活躍します。このタイプの面積は頻出なので，必ず使えるようにしておきましょう。

例５をもう一度。

例６ 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めなさい。

$y=x^2-3x-3\ (-2 \leqq x \leqq 3)$，$y=-3x+1$，$x=3$

交点の x 座標は

$x^2-3x-3=-3x+1 \iff x^2-4=0 \iff x=\pm 2$

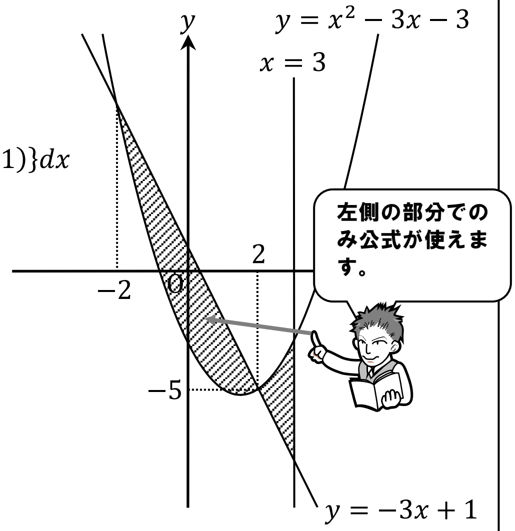
よって，求める面積は

$$\int_{-2}^{2}\{-3x+1-(x^2-3x-3)\}dx+\int_{2}^{3}\{x^2-3x-3-(-3x+1)\}dx$$

$$=\boxed{\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx}+\int_{2}^{3}(x^2-4)dx$$

$$=\boxed{-\frac{1}{6}(-1)(2+2)^3}+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3$$

$$=\frac{32}{3}+\frac{1}{3}(27-8)-4(3-2)=13$$



例７ 曲線 $y=x^3-2x$ と曲線上の点 $(-1,\ 1)$ における接線で囲まれた図形の面積を求めなさい。

解①

$y'=3x^2-2$ より，点 $(-1,\ 1)$ における接線の方程式は

$y=1\cdot(x+1)+1=x+2$

$y=x^3-2x$ と $y=x+2$ の共有点の x 座標は

$x^3-2x=x+2 \iff x^3-3x-2=0 \iff (x+1)^2(x-2)=0$

$\iff x=-1,\ 2$

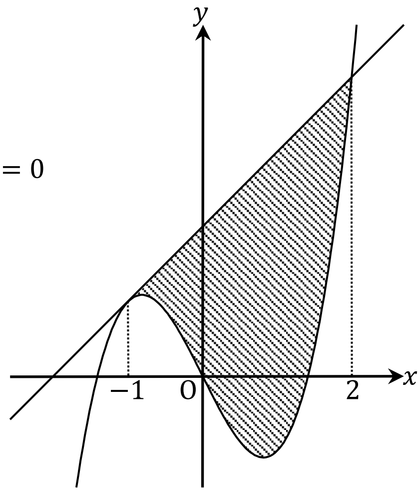
よって，求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{x+2-(x^3-2x)\}dx=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=-\frac{1}{4}(16-1)+\frac{3}{2}(4-1)+2(2+1)$$

$$=\frac{27}{4}$$



被積分関数が $(\quad)^2$ の形に因数分解できることを利用すると，積分の計算が少し楽になります。

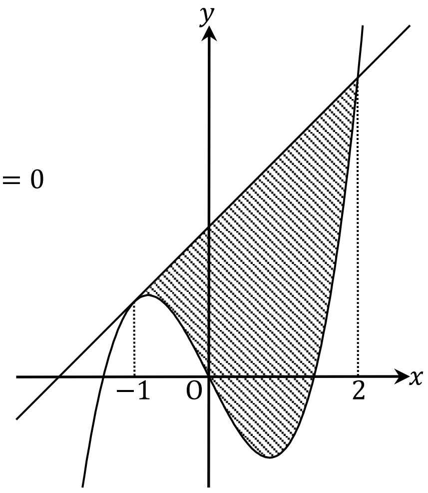
解②

$y' = 3x^2 - 2$ より，点 $(-1,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y = 1 \cdot (x+1) + 1 = x + 2$$

$y = x^3 - 2x$ と $y = x + 2$ の共有点の x 座標は

$$x^3 - 2x = x + 2 \iff x^3 - 3x - 2 = 0 \iff (x+1)^2(x-2) = 0$$
$$\iff x = -1,\ 2$$



よって，求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{x + 2 - (x^3 - 2x)\}dx = -\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx$$
$$= -\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x+1-3)dx$$
$$= -\int_{-1}^{2}\{(x+1)^3 - 3(x+1)^2\}dx$$
$$= -\left[\frac{1}{4}(x+1)^4 - (x+1)^3\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{81}{4} + 27 = \frac{27}{4}$$

この問題の積分計算は p.8 で紹介した公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx = -\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

を用いると以下のように簡単に計算することができる。

$$\int_{-1}^{2}\{x + 2 - (x^3 - 2x)\}dx = -\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx = \frac{1}{12}(2+1)^4 = \frac{27}{4}$$