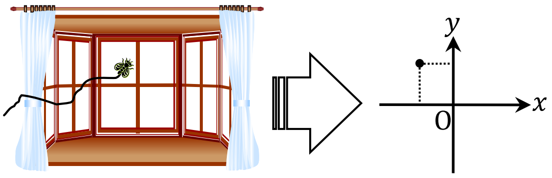
図 形 と 方 程 式

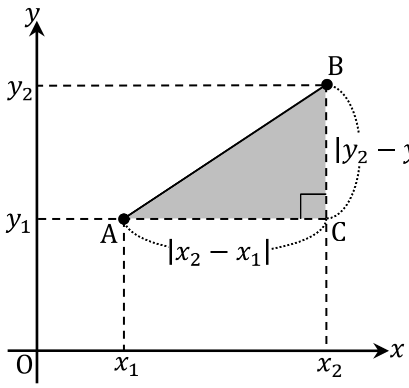
デカルト(1596-1650)

17 世紀のフランスに哲学者であり数学者でもあるデカルトという人物がいました。Cogito ergo sum(我思う。ゆえに我あり)という言葉を残したことで有名な人ですが，数学者としても**座標平面を初めて考え出した**ということで有名です。彼はあるとき，窓際を飛ぶハエの位置について考えていたときに，これを思いついたといわれています。デカルトはこの座標平面上で様々な図形を描き，これを方程式で表すことによって図形の性質を明らかにしていきました。このことは**代数分野と幾何分野の融合**を意味し，その後の数学発展に大きく影響を与えたのです。今回のテーマはまさにデカルトが考えた**「座標平面上で図形を考える」**ということです。この分野の学習がゆくゆくは，皆さんにとって様々な図形問題を解決していく上での大きな武器となっていくでしょう。



§1　点の座標

○　2 点間の距離



座標平面上の 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 間の距離を求めよう。右図のように点 C を定めると，△ABC において，三平方の定理より，

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

よって，$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2 点間の距離

2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 間の距離は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

例題 1 (1)　2 点 A(3, −5)，B(−1, 3) 間の距離を求めなさい。

(2)　2 点 A(1, −2)，B(−3, 4) から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めなさい。

(3)　3 点 A(8, 9)，B(−6, 7)，C(−8, 1) から等距離にある点 P の座標を求めなさい。

練習 1 (1)　2 点 A(−4, 2)，B(6, 7) 間の距離を求めなさい。

(2)　2 点 A(3, −4)，B(8, 6) から等距離にある y 軸上の点 P の座標を求めなさい。

(3)　3 点 A(3, 3)，B(−4, 4)，C(−1, 5) から等距離にある点 P の座標を求めなさい。

例題 2 (1)　3 点 A(1, 3)，B(5, 6)，C(−2, 7) を頂点とする△ABC は直角二等辺三角形であることを示しなさい。

(2)　A(4, 0)，B(0, 2)，C(a, b) を頂点とする△ABC が正三角形となるように a，b の値を求めなさい。

練習 2 (1)　3 点 A(4, 5)，B(1, 1)，C(5, −2) を頂点とする△ABC は直角二等辺三角形であることを示しなさい。

(2)　A(−1, −2)，B(1, 2)，C(a, b) について，△ABC が正三角形になるとき，a，b の値を求めなさい。

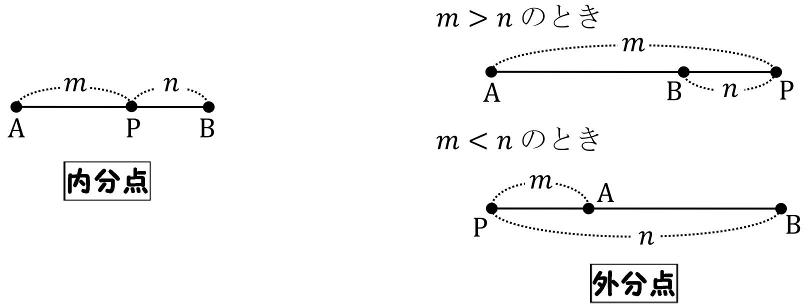
○　分点の座標

直線 AB 上に点 P を AP : BP $= m : n$ となるようにとるとき，点 P の位置が

①　線分 AB 上にあれば，点 P は線分 AB の**内分点**

②　線分 AB の延長上にあれば，点 P は線分 AB の**外分点**（ただし，$m \neq n$）

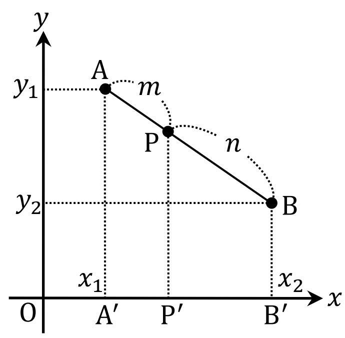
という。図にすると下のようになる。外分点の位置は m, n の大小により異なるので，しっかりと確認しておきましょう。



①　内分点の座標

座標平面上の 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$（$x_1 < x_2$）を $m : n$ に内分する点の座標を求めよう。

まず，3 点 A，P，B から x 軸に下ろした垂線の足を A′，P′，B′ とする。



AP : PB $= m : n$ より，A′P′ : P′B′ $= m : n$

A′B′ $= x_2 - x_1$ より，A′P′ $= \dfrac{m}{m+n}(x_2 - x_1)$

よって，OP′ $=$ OA′ $+$ A′P′ $= x_1 + \dfrac{m}{m+n}(x_2 - x_1) = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}$

つまり，P の x 座標が $\dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}$ となる。

P の y 座標も同様に考えると，内分点 P の座標は $\left(\dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$ となる。

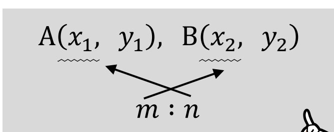
内分点の座標

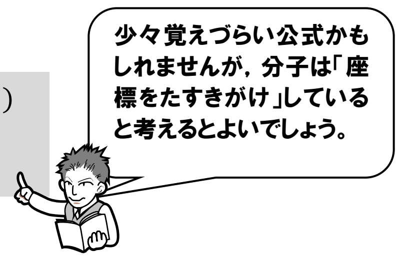
2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を $m : n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$$

ここで，$m = n = 1$ とすれば，AB の中点の座標 $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2},\ \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ が求まる。

これは，頻繁に出てくるので覚えておくとよいでしょう。





②　外分点の座標

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$ を $m:n$ $(m > n)$ に外分する点の座標を求めよう。

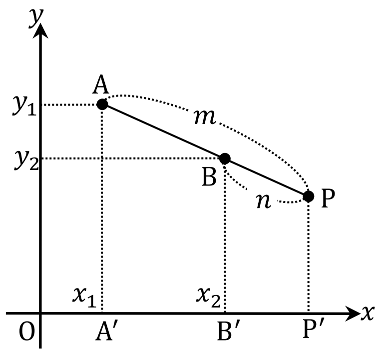
まず，3 点 A，P，B から x 軸に下ろした垂線の足を A′，P′，B′ とする。

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB} = m:n$ より，$\mathrm{A'P'}:\mathrm{P'B'} = m:n$

$\mathrm{A'B'} = x_2 - x_1$ より，$\mathrm{A'P'} = \dfrac{m}{m-n}(x_2 - x_1)$

よって，$\mathrm{OP'} = \mathrm{OA'} + \mathrm{A'P'} = x_1 + \dfrac{m}{m-n}(x_2 - x_1) = \dfrac{-nx_1 + mx_2}{m-n}$

つまり，P の x 座標が $\dfrac{-nx_1 + mx_2}{m-n}$ となる。



P の y 座標も同様に考えると，外分点 P の座標は $\left(\dfrac{-nx_1 + mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1 + my_2}{m-n}\right)$ となる。

外分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}\right)$$

外分の公式は内分の公式の n の係数にマイナスをつけただけで，ほとんど同じ形をしている。
そこで下のように考えると内分も外分も同じ公式としてとらえることができる。

AB を $m:n$ に外分する　$\Rightarrow$　$\dfrac{-n\bigcirc + m\triangle}{m-n} = \dfrac{(-n)\bigcirc + m\triangle}{m+(-n)}$　$\Rightarrow$　AB を $m:(-n)$ に内分する

③　重心の座標

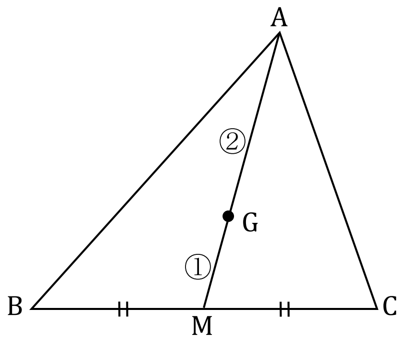
座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ABC の重心の座標を求めよう。

BC の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2},\ \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$

$\mathrm{AG}:\mathrm{GM} = 2:1$ より，

$$\mathrm{G}\left(\frac{1\cdot x_1 + 2\cdot\dfrac{x_2 + x_3}{2}}{2+1},\ \frac{1\cdot y_1 + 2\cdot\dfrac{y_2 + y_3}{2}}{2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{G}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$



重心の座標

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ABC の重心 G の座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

重心は**各座標の平均**をとったものであり，この考え方は中点の座標と同じである。

例 1　2点 A$(-4,\ 2)$，B$(1,\ 6)$，C$(-3,\ 1)$ について，次の点の座標を求めなさい。

(1)　線分 AB を $3:2$ に内分する点　　(2)　線分 AB を $2:1$ に外分する点　　(3)　△ABC の重心

(1)　$\left(-1,\ \dfrac{22}{5}\right)$　　(2)　$(6,\ 10)$　　(3)　$(-2,\ 3)$

例 2　△ABC の辺 BC の中点を M とするとき，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ を示しなさい。

座標をどのように設定するかがポイントです。文字がなるべく少なくなるように工夫しましょう。

A$(a,\ b)$，B$(0,\ 0)$，C$(2c,\ 0)$ とすると，M$(c,\ 0)$

$\mathrm{AB}^2=a^2+b^2$

$\mathrm{AC}^2=(a-2c)^2+b^2=a^2+b^2+4c^2-4ac$

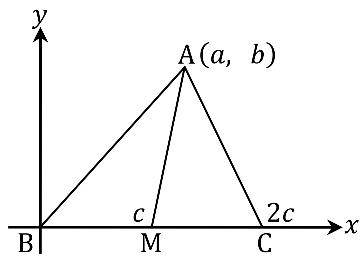
よって，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2a^2+2b^2+4c^2-4ac$　…①

$\mathrm{AM}^2=(a-c)^2+b^2=a^2+b^2+c^2-2ac$

$\mathrm{BM}^2=c^2$

よって，$2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)=2(a^2+b^2+2c^2-2ac)=2a^2+2b^2+4c^2-4ac$　…②

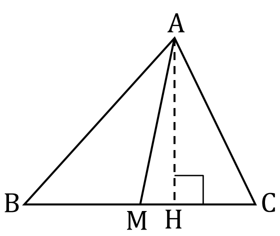
①，②より，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ が成立。

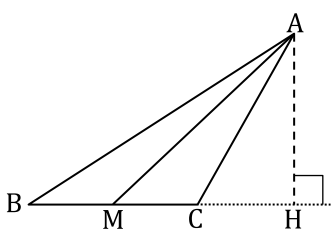


座標を用いないのであれば…

A から BC に垂線 AH を引き，三平方の定理を利用するが，

鋭角三角形の場合と，鈍角三角形の場合を考慮する必要がある。





例題 3(1)　△ ABC の重心を G とする。このとき，$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$ が成り立つことを証明しなさい。

(2)　△ ABC において, 辺 BC を 1：2 に内分する点を D とする。このとき, 等式$2AB^2+AC^2=3AD^2+6BD^2$ が成り立つことを証明しなさい。

練習 3(1)　長方形 ABCD と同じ平面上の任意の点を P とする。このとき，等式 $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$ が成り立つことを証明しなさい。

(2)　△ ABC において，辺 BC を 1：3 に内分する点を D とする。このとき，等式 $3AB^2+AC^2=4AD^2+12\,BD^2$ が成り立つことを証明しなさい。

例題 4　3 点 $A(5,\ 4)$，$B(0,\ -1)$，$C(8,\ -2)$ について，線分 AB を 2：3 に外分する点を P，3：2 に外分する点を Q とし，△ ABC の重心を G とする。

(1)　線分 PQ の中点 M の座標を求めなさい。　(2)　点 G の座標を求めなさい。

(3)　△ PQS の重心が点 G と一致するように，点 S の座標を定めなさい。

練習 4(1)　3 点 $A(1,\ 1)$，$B(3,\ 4)$，$C(-5,\ 7)$ について，線分 AB を 3：2 に内分する点を P，3：2 に外分する点を Q とし，△ ABC の重心を G とする。このとき，3 点 P，Q，G の座標をそれぞれ求めなさい。

(2)　2 点 $A(-1,\ -3)$，B を結ぶ線分 AB を 2：3 に内分する点 P の座標は $(1,\ -1)$ であるという。このとき，点 B の座標を求めなさい。

例題 5(1)　$A(7,\ 3)$，$B(-1,\ 5)$，$C(5,\ 1)$，D を頂点とする平行四辺形 ABCD の頂点 D の座標を求めなさい。

(2)　3 点 $A(1,\ 2)$，$B(5,\ 4)$，$C(3,\ 6)$ を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を求めなさい。

練習 5　3 点 $A(3,\ -2)$，$B(4,\ 1)$，$C(1,\ 5)$ を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を求めなさい。

例題 6(1)　点 $A(2,\ -1)$ に関して，点 $P(-1,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めなさい。

(2)　3 点 $A(a,\ b)$，$B(0,\ 0)$，$C(c,\ 0)$ と点 $P(x,\ y)$ がある。A に関して P と対称な点 Q とし，B に関して Q と対称な点を R とする。C に関して R と対称な点が P と一致するとき，x，y を a，b，c を用いて表しなさい。

練習 6(1)　点 $A(4,\ 5)$ に関して，点 $P(10,\ 3)$ と対称な点 Q の座標を求めなさい。

(2)　$A(1,\ 4)$，$B(-2,\ -1)$，$C(4,\ 0)$ とする。A，B，C の点 $P(a,\ b)$ に関する対称点をそれぞれ A'，B'，C' とする。このとき，$\triangle A'B'C'$ の重心 G' は△ABC の重心 G の点 P に関する対称点であることを示しなさい。

§2　直線の方程式

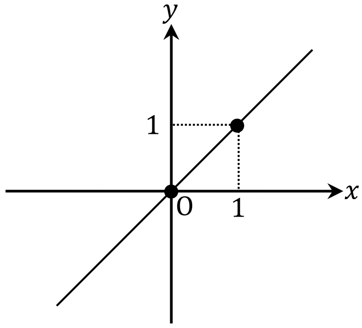
2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を通る直線は

$$y=x$$

と表すことができる。

なぜ，このように表すのかというと，この図形上の任意の点の

『x 座標と y 座標が常に等しい』



からである。この観点からいくと，2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を通る直線は

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \quad (t\text{ は任意の実数})$$

と表しても構わないということです。ちなみに，この t を媒介変数(パラメータ)といいます。

以上のことから，座標平面上の図形を方程式で表すには，

『図形上の任意の点の x 座標と y 座標の関係を式に表せばよい』

というわけです。

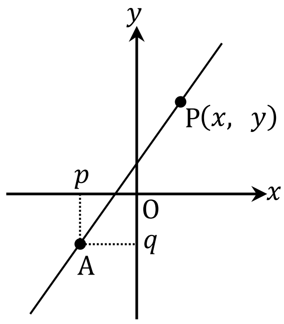
○　傾き a，点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ 通る直線

直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。2 点 A，P が異なるとすると，

常に,「x の変化量」と「y の変化量」の比が a

となるので,

$$\frac{y-q}{x-p}=a \quad \Leftrightarrow \quad y-q=a(x-p) \quad \Leftrightarrow \quad y=a(x-p)+q \quad \cdots(*)$$



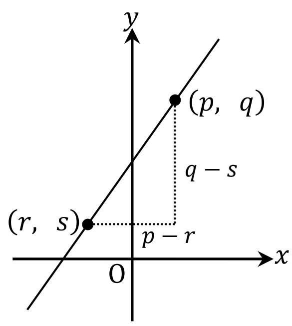
これは，A と P が一致する場合も成立する。

$(*)$は，直線上の任意の点 P についての関係式なので，これが求める直線の式である。

直線の方程式①

傾き a，点 $(p,\ q)$ 通る直線の方程式は

$$y=a(x-p)+q$$



○　2 点 $(p,\ q)$，$(r,\ s)$ 通る直線

求める直線の式は，傾き $\dfrac{q-s}{p-r}$ で，点 $(p,\ q)$ を通る直線となるので,

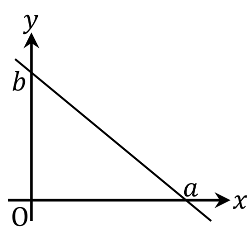
$$y=\frac{q-s}{p-r}(x-p)+q$$

となる。

また，通る 2 点が $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ のときは

$$y=\frac{0-b}{a-0}(x-a)+0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

となる。これは切片形と呼ばれる有名な形なので，覚えておくとよい。



○ 点 $(p,\ q)$ を通り x 軸，y 軸に平行な直線

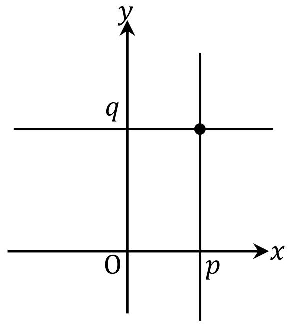
x 軸に平行な直線は，直線上の任意の点の **y 座標が常に q** となるので，

$$y=q$$

と表せる。これは，傾きが 0 で，点 $(p,\ q)$ を通る直線と考えてもよい。
また，y 軸に平行な直線は，直線上の任意の点の **x 座標が常に p** となるので，

$$x=p$$

と表せる。
これより，x 軸，y 軸はそれぞれ $x=0$，$y=0$ と表すことができる。



○ 直線の式の一般化

ここまで学んできて分かるとおり，直線の式の表し方は $y=ax+b$，$x=a$ の 2 通りあるが，

$$y=ax+b \ \rightarrow \ ax+(-1)\cdot y+b=0$$
$$x=a \ \rightarrow \ 1\cdot x+0\cdot y-a=0$$

となるので，一般的には $ax+by+c=0$ と 1 通りに表し方にまとめることができる。

$b\neq 0$ のとき，$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ となり，傾き $-\dfrac{a}{b}$ の直線となり，

$b=0$ のとき，$x=-\dfrac{c}{a}$ となり，y 軸に平行な直線を表す。

直線の方程式②

座標平面上の任意の直線は以下の式で表せる。

$$ax+by+c=0$$

例題 7 (1)　次の直線の方程式を求めなさい。

（ア）　点 $(-1,\ 3)$ を通り，傾きが -2　　（イ）　点 $(4,\ 1)$ を通り，x 軸に垂直

（ウ）　点 $(5,\ 3)$ を通り，x 軸に平行

(2)　次の 2 点を通る直線の方程式を求めなさい。

（ア）　$(1,\ -2)$，$(-3,\ 4)$　　（イ）　$(-5,\ 7)$，$(6,\ 7)$

（ウ）　$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ -1\right)$　　（エ）　$\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{1}{3}\right)$

練習 7　次の直線の方程式を求めなさい。

(1)　点 $(-2,\ 4)$ を通り，傾きが -3　　(2)　点 $(5,\ 6)$ を通り，y 軸に平行

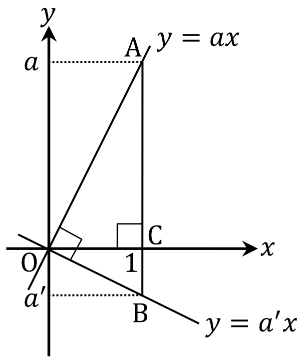
(3)　点 $(8,\ -7)$ を通り，y 軸に垂直　　(4)　2 点 $(3,\ -5)$，$(-7,\ 2)$ を通る

(5)　2 点 $(2,\ 3)$，$(-1,\ 3)$ を通る　　(6)　2 点 $(-2,\ 0)$，$\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$ を通る

§3　直線の方程式の利用

○　直線の平行，垂直

　ここでは 2 直線 $y=ax+b$，$y=a'x+b'$ の平行条件，垂直条件について考えていこう。
まず，平行条件に関しては，2 直線の傾きが等しければよいので $a=a'$ となる。



次に，$y=ax$，$y=a'x$ $(a>0,\ a'<0)$ が垂直となる条件を考えていこう。
まず，直線上に点 A$(1,\ a)$，B$(1,\ a')$ をとり，点 C$(1,\ 0)$ とする。
△OAC ∽ △OBC なので，

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CB}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CO}} \iff \frac{1}{-a'}=\frac{a}{1} \iff aa'=-1$$

直線の平行,垂直①

$y=ax+b$，$y=a'x+b'$ の平行条件，垂直条件は

平行　$a=a'$　　　**垂直**　$aa'=-1$

○　一般形における平行，垂直

　次に，2 直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ における平行，垂直条件を考えていこう。
$b\neq 0$，$b'\neq 0$ のとき

$$ax+by+c=0 \iff y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},\qquad a'x+b'y+c'=0 \iff y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$$

よって，

平行条件　$-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a'}{b'} \iff ab'-a'b=0$

垂直条件　$-\dfrac{a}{b}\times\left(-\dfrac{a'}{b'}\right)=-1 \iff aa'+bb'=0$

これは，$b=0$，$b'=0$ のときも満たす。

平行条件
$a\,x+b\,y+c=0$
⊖　たすきがけ
$a'\,x+b'\,y+c'=0$

垂直条件
$a\,x+b\,y+c=0$
⊕
$a'\,x+b'\,y+c'=0$

直線の平行,垂直②

$ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ の平行条件，垂直条件は

平行　$ab'-a'b=0$　　　**垂直**　$aa'+bb'=0$

例題 8　点$(-3,\ 2)$を通り，直線$3x-4y-6=0$に平行な直線lと垂直な直線l'の方程式をそれぞれ求めなさい。

練習 8　次の直線の方程式を求めなさい。

(1)　点$(-1,\ 3)$を通り，直線$5x-2y-1=0$に平行な直線

(2)　点$(-7,\ 1)$を通り，直線$4x+6y-5=0$に垂直な直線

例題 9　2 直線$ax+2y-a=0$　…①，$x+(a+1)y-a-3=0$　…②は，$a=$$\boxed{}$のとき垂直に交わる。また，$a=$$\boxed{}$のとき，2 直線①，②は共有点をもたず，$a=$$\boxed{}$のとき，2 直線①，②は一致する。

練習 9　直線$(a-1)x-4y+2=0$と直線$x+(a-5)y+3=0$は，$a=$$\boxed{}$のとき垂直に交わり，$a=$$\boxed{}$のとき平行となる。

例題 10　kは定数とする。直線$(k+3)x-(2k-1)y-8k-3=0$は，kの値に関係なく，定点 A を通る。その定点 A の座標を求めなさい。

練習 10　定数kがどんな値をとっても，次の直線が通る定点の座標を求めなさい。

(1)　$kx-y+5k=0$　　　(2)　$(k+1)x+(k-1)y-2k=0$

例題 11　3 点$\mathrm{A}(6,\ 13)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$，$\mathrm{C}(9,\ 10)$を頂点とする△ABC について

(1)　点 A を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を求めなさい。

(2)　辺 BC を 1 : 3 に内分する点 P を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を求めなさい。

練習 11　3 点$\mathrm{A}(20,\ 24)$，$\mathrm{B}(-4,\ -3)$，$\mathrm{C}(10,\ 4)$を頂点とする△ABC について，辺 BC を 2 : 5 に内分する点 P を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を求めなさい。

例題 12 (1)　3 点$\mathrm{A}(-2,\ 3)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$，$\mathrm{C}(3a+4,\ -2a+2)$が同じ直線上にあるとき，定数aの値を求めなさい。

(2)　3 直線$4x+3y-24=0$　…①，$x-2y+5=0$　…②，$ax+y+2=0$　…③が 1 点で交わるとき，定数aの値を求めなさい。

練習 12 (1)　異なる 3 点$\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 4)$，$\mathrm{C}(a,\ a^2)$が同じ直線上にあるとき，定数aの値を求めなさい。

(2)　3 直線$5x-2y-3=0$，$3x+4y+19=0$，$a^2x-ay+12=0$ $(a\neq 0)$が 1 点で交わるとき，定数aの値を求めなさい。

例題13 異なる3直線 $x+y=1$ …①，$3x+4y=1$ …②，$ax+by=1$ …③ が1点で交わるとき，3点$(1,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(a,\ b)$ は，一直線上にあることを示しなさい。

練習13 異なる3直線 $2x+y=5$ …①，$4x+7y=5$ …②，$ax+by=5$ …③ が1点で交わるとき，3点 $(2,\ 1)$，$(4,\ 7)$，$(a,\ b)$ は，一直線上にあることを示しなさい。

例題14 3直線 $x+y-7=0$，$2x-y+1=0$，$3x-ay+2a=0$ が三角形を作らないような定数 a の値を求めなさい。

練習14 3直線 x 軸，$y=x$，$(2a+1)x+(a-1)y+2-5a=0$ が三角形を作らないような定数 a の値を求めなさい。

例題15 △ABCの各辺の垂直二等分線は1点で交わることを証明しなさい。

練習15 △ABCの3つの頂点から，それぞれの対辺またはその延長に下ろした垂線は1点で交わることを証明しなさい。

例題16 直線 $x+2y-3=0$ を l とする。次のものを求めなさい。

(1) 直線 l に関して，点 $\mathrm{P}(0,\ -2)$ と対称な点Qの座標

(2) 直線 l に関して，直線 $m:3x-y-2=0$ と対称な直線 n の方程式

練習16 点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ と，直線 $l:3x+4y-15=0$，$m:x+2y-5=0$ がある。

(1) 直線 l に関して，点Pと対称な点Qの座標を求めなさい。

(2) 直線 l に関して，直線 m と対称な直線の方程式を求めなさい。

例題17 xy 平面上に2点 $\mathrm{A}(3,\ 2)$，$\mathrm{B}(8,\ 9)$ がある。点Pが直線 $l:y=x-3$ 上を動くとき，AP + PB の最小値と，そのときの点Pの座標を求めなさい。

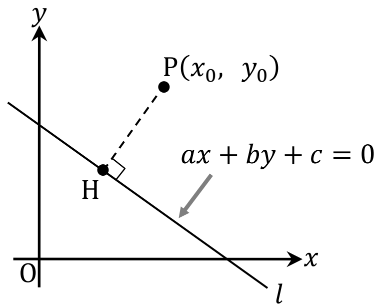
練習17 平面上に2点 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$，$\mathrm{B}(5,\ 11)$ がある。

(1) 直線 $y=2x$ について，点Aと対称な点Pの座標を求めなさい。

(2) 点Qが直線 $y=2x$ 上にあるとき，QA + QB を最小にする点Qの座標を求めなさい。

○　点と直線の距離

座標平面上のある点 P と直線 l 上の点の距離の最小値を**『点と直線の距離』**という。
つまり，『点と直線の距離』とは，点 P から直線 l に下ろした垂線の長さである。



ここでは，$l : ax+by+c=0$，$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ として，直線 l と点 P の距離 d を求めよう。
点 P から直線 l に下ろした垂線の足を $\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ とすると，

$$d=\mathrm{PH}=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}\quad\cdots①$$

となる。
PH と直線 $ax+by+c=0$ は垂直に交わるので，$a\neq 0$，$b\neq 0$ のとき

$$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=-1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x_0-x_1}{a}=\frac{y_0-y_1}{b}\quad\cdots②$$

$$ax+by+c=0\quad\Leftrightarrow\quad y=\underbrace{\boxed{-\frac{a}{b}}}_{\text{傾き}}x-\frac{c}{b}$$

点 H は直線 l 上の点より，$ax_1+by_1+c=0\quad\cdots③$

②において $\dfrac{x_0-x_1}{a}=\dfrac{y_0-y_1}{b}=k$ とおくと，$\begin{cases}x_0-x_1=ak\\y_0-y_1=bk\end{cases}\quad\cdots④$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqq 0)\\-a & (a<0)\end{cases}$$

①，④より，$d=\sqrt{a^2k^2+b^2k^2}=|k|\sqrt{a^2+b^2}\quad\cdots⑤$
③，④より，x_1，y_1 を消去すると，

$$a(x_0-ak)+b(y_0-bk)+c=0\quad\Leftrightarrow\quad k=\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\quad\cdots⑥$$

⑤，⑥より，$d=\left|\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これは，$a=0$ または $b=0$ のときも成立する。

点と直線の距離

点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例 3　以下の点 P と直線 l の距離を求めなさい。
(1)　$\mathrm{P}(0,\ 0)$，$l : 2x+y+1=0$　(2)　$\mathrm{P}(2,\ -2)$，$l : x-3y+2=0$　(3)　$\mathrm{P}(1,\ 1)$，$l : y=2x+4$

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　(2)　$\sqrt{10}$　(3)　$\sqrt{5}$

例題18 (1)　点 $(2,\ 8)$ と直線 $3x-2y+4=0$ の距離を求めなさい。

(2)　2 直線 $5x+4y=20$，$5x+4y=60$ 間の距離を求めなさい。

(3)　点 $(2,\ 1)$ から直線 $kx+y+1=0$ に下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ であるとき，定数 k の値を求めなさい。

練習18 (1)　次の点と直線の距離を求めなさい。

（ア）　原点，$4x+3y-12=0$　　（イ）　点 $(2,\ -3)$，$2x-3y+5=0$

（ウ）　点 $(-1,\ 3)$，$x=2$　　（エ）　点 $(5,\ 6)$，$y=3$

(2)　2 直線 $x-2y+3=0$，$x-2y-1=0$ 間の距離を求めなさい。

(3)　点 $(1,\ 1)$ から直線 $ax-2y-1=0$ に下ろした垂線の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，定数 a の値を求めなさい。

例題19　3 点 A$(3,\ 5)$，B$(5,\ 2)$，C$(1,\ 1)$ について，次のものを求めなさい。

(1)　直線 BC の方程式　(2)　線分 BC の長さ　(3)　点 A と直線 BC の距離　(4)　△ABC の面積

練習19　3 点 A$(-4,\ 3)$，B$(-1,\ 2)$，C$(3,\ -1)$ について，点 A と直線 BC の距離を求めなさい。また，△ABC の面積を求めなさい。

例題20　放物線 $y=x^2$ 上の点 P と，直線 $x-2y-4=0$ 上の点との距離の最小値を求めなさい。また，そのときの点 P の座標を求めなさい。

練習20　放物線 $y=-x^2+x+2$ 上の点 P と，直線 $y=-2x+6$ 上の点との距離は，P の座標が $\boxed{}$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる。

§4　円の方程式

　ここからは，座標平面上における円の方程式を扱っていく。

方程式の求め方は直線のときと同様で，**図形上の任意の点** P$(x,\ y)$ **の満たす関係式**を求めればよい。

○　点 A$(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円

円周上の任意の点 P は**中心からの距離が常に半径** r となる。

つまり，2 点 AP 間の距離は常に r なので，

$$\mathrm{AP}=r \iff \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

両辺正より，2 乗しても同値なので，

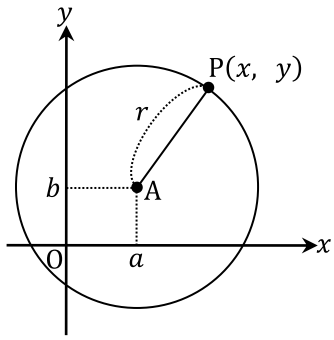
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \iff (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

となる。これが，求める円の方程式となる。

特に原点を中心とする半径 r の円は

$$x^2+y^2=r^2$$

と表せる。



円の方程式

点 A$(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

○　円の方程式の標準形

今求めた円の方程式は，展開して整理すると

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \iff x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

となることから必ず x，y に関して 2 次式で表すことができる。

つまり，$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ の形で表すことができ，これを円の方程式の**標準形**という。

しかし，$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ の形になっているからといって，必ずしもそれが円の方程式を表すわけではない。実際，この式を変形すると

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \iff \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C \quad \cdots(*)$$

となるが，右辺の $\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C$ は A，B，C の値によっては**負の値を取りうる**。

このとき，左辺は $\left(x+\dfrac{A}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{B}{2}\right)^2 \geqq 0$ なので，$(*)$ を満たす実数 x，y は存在しない。

つまり，座標平面上で図形を表さない。

ちなみに，$\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C=0$ のとき，$\left(x+\dfrac{A}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{B}{2}\right)^2=0 \iff x=-\dfrac{A}{2},\ y=-\dfrac{B}{2}$

これは点 $\left(-\dfrac{A}{2},\ -\dfrac{B}{2}\right)$ を表し，やはり円の方程式とはならない。

円の方程式の標準形

x，y に関して 2 次式

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

は $\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C>0$ のときに限り円を表す。

例題 21　次のような円の方程式を求めなさい。

(1)　中心 $(4,\ -1)$，半径 6　　(2)　点 $(-3,\ 4)$ を中心とし，原点を通る

(3)　2 点 $(-3,\ 6)$，$(3,\ -2)$ を直径の両端とする

練習 21　次のような円の方程式を求めなさい。

(1)　中心 $(3,\ -2)$，半径 4　　(2)　点 $(0,\ 3)$ を中心とし，点 $(-1,\ 6)$ を通る

(3)　2 点 $(-3,\ -4)$，$(5,\ 8)$ を直径の両端とする

例題 22　3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 6)$，$\mathrm{B}(1,\ -3)$，$\mathrm{C}(5,\ -1)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の方程式を求めなさい。

練習 22　3 点 $(-2,\ -1)$，$(4,\ -3)$，$(1,\ 2)$ を頂点とする三角形の外接円の方程式を求めなさい。

例題 23 (1)　方程式 $x^2+y^2+5x-3y+6=0$ はどんな図形を表しますか。

(2)　方程式 $x^2+y^2+2px+3py+13=0$ が円を表すとき，定数 p の値の範囲を求めなさい。

練習 23 (1)　方程式 $x^2+y^2-2x+6y-6=0$ はどんな図形を表しますか。

(2)　方程式 $x^2+y^2-4ax+6ay+14a^2-4a+3=0$ が円を表すとき，定数 a の値の範囲を求めなさい。

例題 24　次の円の方程式を求めなさい。

(1)　x 軸と y 軸の両方に接し，点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$ を通る。

(2)　点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ を通り，y 軸に接し，中心が直線 $y=2x$ 上にある。

練習 24 (1)　x 軸と y 軸の両方に接し，点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ を通る円の方程式を求めなさい。

(2)　中心が直線 $2x-y-8=0$ 上にあり，2 点 $(0,\ 2)$，$(-1,\ 1)$ を通る円の方程式を求めなさい。

§5 円と直線

ここでは円と直線の位置関係について学んでいく。

例 4 円$C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$と直線$l:2x+y-2=0$の位置関係を調べなさい。

まずは方程式の解の存在条件を利用します。

解①
2 式より，yを消去する。
$2x+y-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=-2x+2$ より，
$$(x-1)^2+(-2x+2-2)^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2-2x-3=0 \quad \cdots(*)$$
この 2 次方程式の判別式をDとすると，
$$D/4=(-1)^2-5\cdot(-3)=16>0$$
よって，円Cと直線lは異なる 2 点で交わる。

解答中の 2 次方程式$(*)$を解くと，

$$5x^2-2x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad (5x+3)(x-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{3}{5},\ 1$$

これより，円Cと直線lの交点の座標は$\left(-\frac{3}{5},\ \frac{16}{5}\right)$，$(1,\ 0)$となるので 2 点で交わることが分かる。

しかしここでは，位置関係しか問われていないので，判別式で簡単に済ませている。

一般的に，円と直線の位置関係は，2 式からyを消去したときにできる**2 次方程式の解の個数**を調べればよいので，判別式をDとすると，

① $D>0$のとき，2 点で交わる。
② $D=0$のとき，接する。
③ $D<0$のとき，共有点を持たない。

と分類することができる。

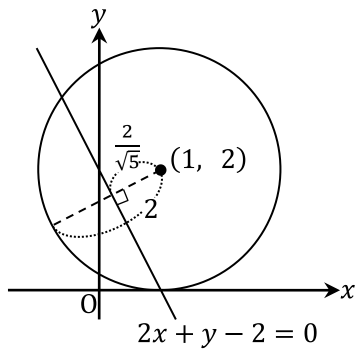
次に，図形の性質に注目して考えてみる。

解②

円 C の中心 $(1,\ 2)$ と直線 $l : 2x + y - 2 = 0$ の距離は，
点と直線の距離の公式より

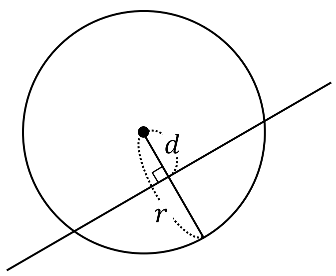
$$\frac{|2 \cdot 1 + 2 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

これと円 C の半径 2 と比べると，$2 > \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となるので，
円 C と直線 l は異なる 2 点で交わる。



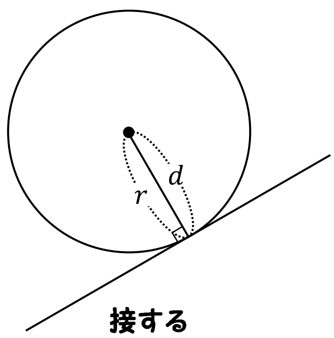
一般的に，半径 r の円 C と直線 l の位置関係は，円の中心から直線 l までの距離 d の値により，次のように分類できる。

① $d < r$ のとき



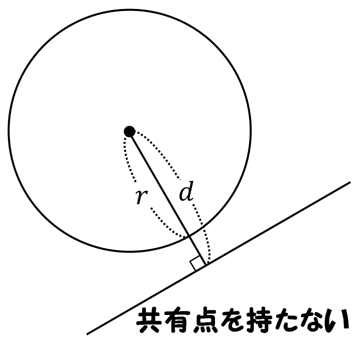
2 点で交わる

② $d = r$ のとき



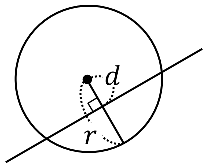
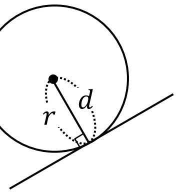
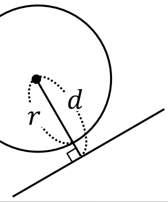
接する

③ $d > r$ のとき



共有点を持たない

円と直線の位置関係をまとめると以下のようになる。

	2 点で交わる	**接する**	**共有点を持たない**
円と直線の位置関係			
判別式 D	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
中心と直線の距離 d	$d < r$	$d = r$	$d > r$

例題 25　円 $x^2+y^2=50$ と次の直線に共有点はあるか。あるときは，その点の座標を求めなさい。

(1)　$y=-3x+20$　　(2)　$y=x+10$　　(3)　$x-2y+20=0$

練習 25　円 $x^2+y^2=5$ と次の直線に共有点はあるか。あるときは，その点の座標を求めなさい。

(1)　$y=2x-5$　　(2)　$x+y-5=0$　　(3)　$x+2y=3$

例題 26　円 $(x+4)^2+(y-1)^2=4$ と直線 $y=ax+3$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めなさい。

練習 26　円 $(x+2)^2+(y-3)^2=2$ と直線 $y=ax+5$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めなさい。

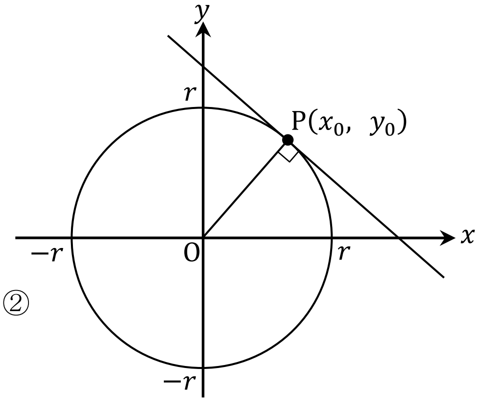
例題 27　直線 $y=x+2$ が円 $x^2+y^2=5$ によって切り取られる弦の長さを求めなさい。

練習 27　直線 $y=-x+1$ が円 $x^2+y^2-8x-6y=0$ によって切り取られる弦の長さを求めなさい。

○　円の接線

円 $x^2+y^2=r^2$ の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めよう。

（ⅰ） $x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0$ のとき



直線 OP の傾きは $\dfrac{y_0}{x_0}$ なので，接線の傾きは $-\dfrac{x_0}{y_0}$

よって接線の方程式は

$$y=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0x+y_0y={x_0}^2+{y_0}^2 \quad \cdots①$$

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点より，${x_0}^2+{y_0}^2=r^2$　$\cdots②$

①，②より接線の方程式は，$x_0x+y_0y=r^2$　$\cdots(*)$

（ⅱ） $x_0=0$のとき

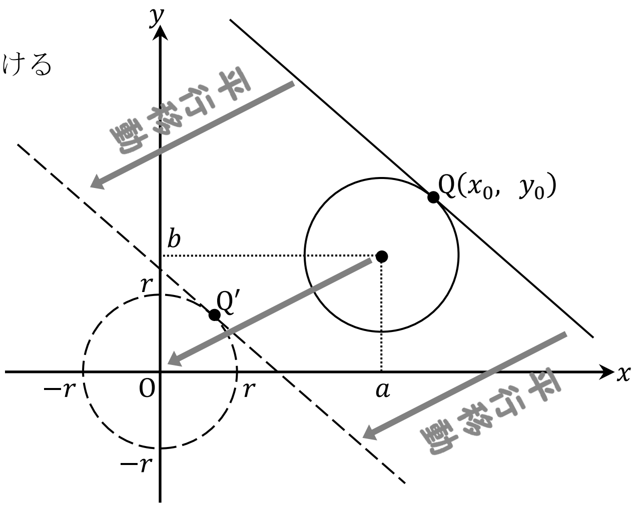
$\mathrm{P}(0,\ \pm r)$ となる。このとき接線の方程式は $y=\pm r$ となり，これは $(*)$ を満たす。

（ⅲ） $y_0=0$のとき

$\mathrm{P}(\pm r,\ 0)$ となる。このとき接線の方程式は $x=\pm r$ となり，これは $(*)$ を満たす。

以上より円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$における接線の方程式 $x_0x+y_0y=r^2$ となる。

中心が原点ではない場合の接線



次に，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めよう。

まずは円の中心を原点まで平行移動する。

すると接点の座標が $\mathrm{Q}'(x_0-a,\ y_0-b)$ となるので，

Q' における接線の方程式は，

$$(x_0-a)x+(y_0-b)y=r^2$$

これを x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動すると求める接線の方程式となる。つまり，

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$における接線の方程式は

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

円の接線の求め方は以下のように覚えるとよい。

片方の x，y に接点 $(x_0,\ y_0)$ の座標を代入

$$x^2+y^2=r^2$$
$$\Downarrow$$
$$x \times x + y \times y = r^2$$
$$\Downarrow$$
$$x_0x+y_0y=r^2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$\Downarrow$$
$$(x-a)\times(x-a)+(y-b)\times(y-b)=r^2$$
$$\Downarrow$$
$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

$\Leftarrow$ **接線の方程式完成!** $\Rightarrow$

例 5　点 A$(3,\ 0)$ を通り，円 $x^2+y^2=4$ に接する直線の方程式を求めなさい。

解①

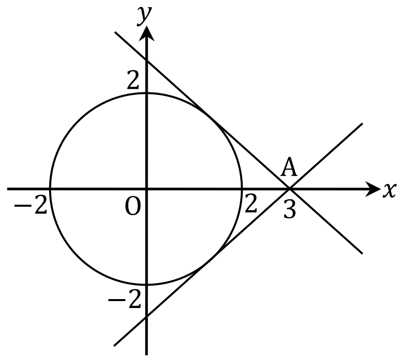
接点の座標を $(a,\ b)$ とすると，接線の方程式は，$ax+by=4$

これが点 A を通るので，$3a=4 \iff a=\dfrac{4}{3}$　⋯①

点 $(a,\ b)$ は円上の点なので，$a^2+b^2=4$　⋯②

①，②より，$\dfrac{16}{9}+b^2=4 \iff b=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

これより，接線の方程式は，$\dfrac{4}{3}x\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{3}y=4 \iff 2x\pm\sqrt{5}y=6$



解②

求める接線は明らかに y 軸に平行ではないので

点 A を通る接線は $y=m(x-3) \iff mx-y-3m=0$ とおける。

これが $x^2+y^2=4$ と接するので，

$$\frac{|-3m|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \iff |3m|=2\sqrt{m^2+1}$$

←円と直線が接する条件,$d=r$。
判別式を用いてもよい。

両辺 2 乗すると，$9m^2=4m^2+4 \iff m=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって，求める接線の方程式は，$y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}(x-3)$

解③

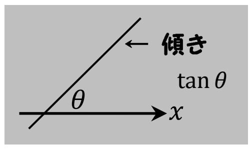
接点の座標を B とする。

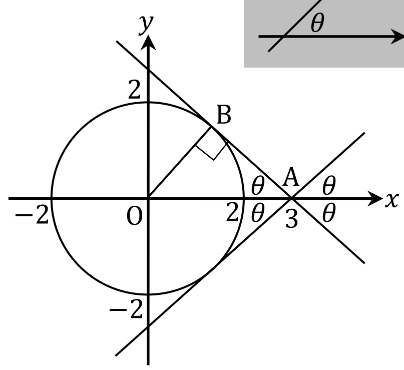
$\angle\mathrm{OAB}=\theta$ とすると，求める接線の傾きは $\pm\tan\theta$ となる。

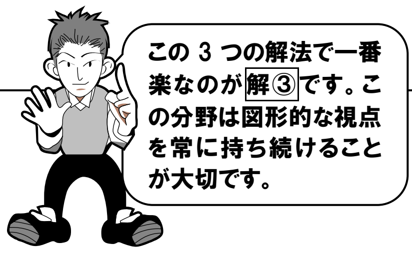
$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OB}^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

これより，$\tan\theta=\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって，求める接線の方程式は，$y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}(x-3)$







例題 28　円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 上の点 $\mathrm{P}(4,\ 6)$ における接線の方程式を求めなさい。

練習 28　次の円の，与えられた点における接線の方程式を求めなさい。

(1)　$x^2+y^2=4$，点 $\left(\sqrt{3},\ -1\right)$　　(2)　$(x+4)^2+(y-4)^2=13$，点 $(-2,\ 1)$

例題 29 (1)　点 $(2,\ 1)$ を中心とし，直線 $5x+12y+4=0$ に接する円の方程式を求めなさい。

(2)　円 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ に接し，傾きが 2 の直線の方程式を求めなさい。

練習 29 (1)　中心が直線 $y=x$ にあり，直線 $3x+4y=24$ と両座標軸に接する円の方程式を求めなさい。

(2)　円 $x^2+2x+y^2-2y+1=0$ に接し，傾きが -1 の直線の方程式を求めなさい。

例題 30　点 $\mathrm{P}(-5,\ 10)$ を通り，$x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めなさい。

練習 30　点 $\mathrm{P}(2,\ 1)$ を通り，$x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めなさい。

例題 31　円 $C_1: x^2+y^2=4$ と円 $C_2: (x-5)^2+y^2=1$ の共通接線の方程式を求めなさい。

練習 31　円 $C_1: x^2+y^2=9$ と円 $C_2: x^2+(y-2)^2=4$ の共通接線の方程式を求めなさい。

§6　2円の位置関係

ここでは2円の位置関係について考えていく。

例6　次の2つの円の共有点の座標を求めなさい。

(1)　$x^2+y^2=5$，$(x-3)^2+(y-1)^2=5$　　(2)　$x^2+y^2=4$，$(x-3)^2+(y-4)^2=9$

(3)　$x^2+y^2=1$，$(x-2)^2+(y-2)^2=1$

(1)　$x^2+y^2=5$　…①

$(x-3)^2+(y-1)^2=5 \iff x^2-6x+y^2-2y+5=0$　…②

① − ② より，$6x+2y-10=0 \iff y=-3x+5$

①に代入すると，$x^2+(-3x+5)^2=5 \iff 10(x-1)(x-2)=0 \iff x=1,\ 2$

このとき，$y=2,\ -1$　　よって，$(1,\ 2)$，$(2,\ -1)$

(2)　$x^2+y^2=4$　…①

$(x-3)^2+(y-4)^2=9 \iff x^2-6x+y^2-8y+16=0$　…②

① − ② より，$6x+8y-20=0 \iff y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}$

①に代入すると，$x^2+\left(-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}\right)^2=4 \iff (5x-6)^2=0 \iff x=\dfrac{6}{5}$

このとき，$y=\dfrac{8}{5}$　　よって，$\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$

(3)　$x^2+y^2=1$　…①

$(x-2)^2+(y-2)^2=1 \iff x^2-4x+y^2-4y+7=0$　…②

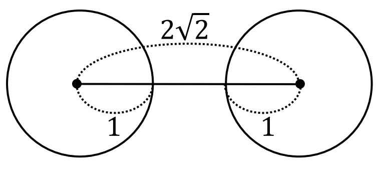
① − ② より，$4x+4y-8=0 \iff y=-x+2$

①に代入すると，$x^2+(-x+2)^2=1 \iff 2x^2-4x+3=0$

この方程式の判別式をDとすると，$D/4=4-6<0$となり，解はない。

よって，共有点を持たない。

(3)については，中心間の距離，半径の和に注目することで簡単に解決する。

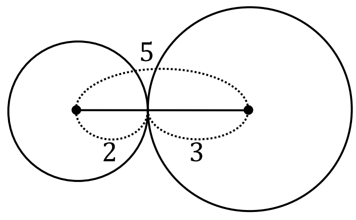


中心間の距離は，$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

半径の和は，$1+1=2$

$(\text{中心間の距離})>(\text{半径の和})$となるので，2円は共有点を持たない。

また，(2)に関しても，



中心間の距離は，$\sqrt{3^2+4^2}=5$

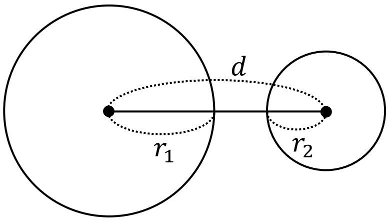
半径の和は，$2+3=5$

$(\text{中心間の距離})=(\text{半径の和})$となるので，2円は接する。

よって，2円の中心を通る直線の方程式は，$y=\dfrac{4}{3}x$と，$x^2+y^2=4$の交点を求めてもよい。

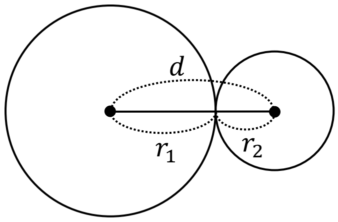
一般的に，2 円の位置関係は中心間の距離と半径の和を用いて，次のように分類できる。
ただし，$r_1 > r_2$ とする。

① $d > r_1 + r_2$ のとき



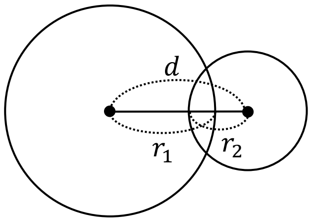
互いに外部にある

② $d = r_1 + r_2$ のとき



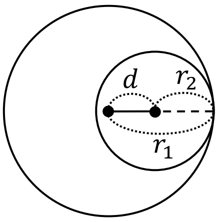
外接する

③ $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ のとき



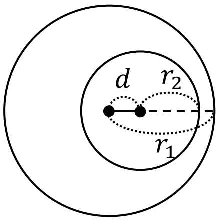
2 点で交わる

④ $d = r_1 - r_2$ のとき



内接する

⑤ $d < r_1 - r_2$ のとき



一方が他方を含む

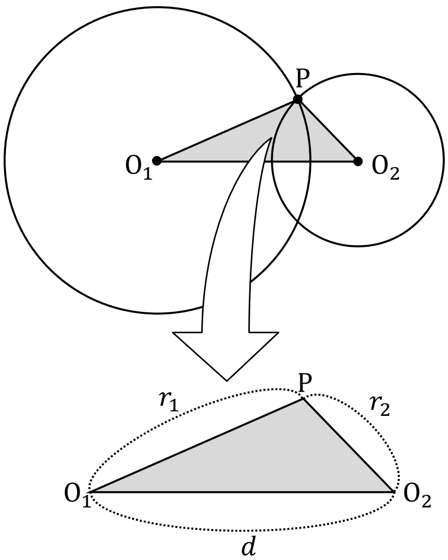
③については次のような見方をすると分かりやすい。
2 円の中心をそれぞれ O_1，O_2 とし，交点の 1 つを P とすると，
2 点で交わる条件は，

$\triangle \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{P}$ **が存在する条件**

と言い換えることができる。
三角形の存在するためには**どの2辺の和も,他の辺より大きければよい**ので,

$r_1 + r_2 > d$ …①
$r_1 + d > r_2 \iff d > r_2 - r_1$ …②
$r_2 + d > r_1 \iff d > r_1 - r_2$ …③

①，②，③より，$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ が導かれる。



$\boxed{\textbf{例題 32}}$ 2 円 $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$，$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ について
(1) 円①と円②が内接するとき，定数 r の値を求めなさい。
(2) 円①と円②が異なる 2 点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めなさい。

$\boxed{\textbf{練習 32}}$(1) 中心が点 $(7,\ -1)$ で，円 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ に接する円の方程式を求めなさい。
(2) 2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$，$C_2 : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$ が共有点を持つとき，定数 r の値の範囲を求めなさい。

○　曲線束

例 7　2 直線 $l : 2x + y - 1 = 0$　$\cdots$①，$m : -x + 2y + 3 = 0$　$\cdots$② の交点を通り，点 $(2,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

解①　① + ② × 2 より，$5y + 5 = 0 \iff y = -1$

このとき，$x = 1$

よって，$l,\ m$ の交点の座標は $(1,\ -1)$

これより，求める直線は 2 点 $(1,\ -1),\ (2,\ 1)$ を通る直線なので，

$$y = 2(x - 1) - 1 = 2x - 3$$

この解法で特に問題はないが，ここではもう少し違う解法を紹介しよう。

2 直線 $l : ax + by + c = 0,\ m : a'x + b'y + c' = 0$ から

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0 \quad \cdots(*)$$

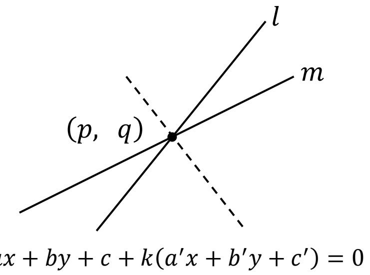
という式をつくると，これは $x,\ y$ の 1 次式なので直線の方程式であり，さらには $l,\ m$ の交点を通る直線となっている。実際，$l,\ m$ の交点の座標を $(p,\ q)$ とすると，

$$ap + bq + c = 0,\ a'p + b'q + c' = 0$$

となるので，

$$ap + bq + c + k(a'p + b'q + c') = 0 + k \cdot 0 = 0$$

が成り立つ。よって，交点 $(p,\ q)$ は直線 $(*)$ 上にあることが分かる。



このことを用いると以下のような解答になる。

解②　2 直線 $l,\ m$ は交点を持つので，求める直線は，$2x + y - 1 + k(-x + 2y + 3) = 0$　$\cdots(*)$

と表すことができる。これが，点 $(2,\ 1)$ を通るので，$x = 2,\ y = 1$ を代入して，

$$4 + 1 - 1 + k(-2 + 2 + 3) = 0 \iff k = -\frac{4}{3}$$

よって，求める直線の方程式は，$2x + y - 1 - \dfrac{4}{3}(-x + 2y + 3) = 0 \iff 2x - y - 3 = 0$

この考え方を用いると，交点の座標を求めなくてもよいので，便利である。

具体的に，k を動かしてみると，

$k = 3$ のとき，$2x + y - 1 + 3(-x + 2y + 3) = 0 \iff -x + 7y + 8 = 0$

$k = 2$ のとき，$2x + y - 1 + 2(-x + 2y + 3) = 0 \iff y = -1$

$k = 1$ のとき，$2x + y - 1 + (-x + 2y + 3) = 0 \iff x + 3y + 2 = 0$

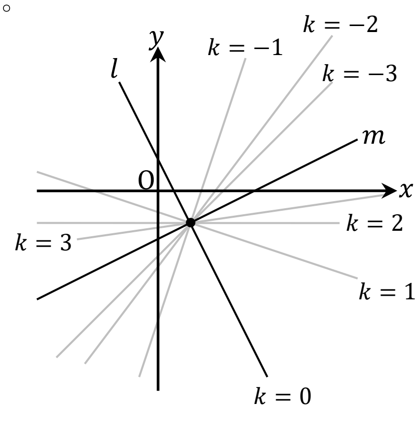
$k = 0$ のとき，$2x + y - 1 = 0$

$k = -1$ のとき，$2x + y - 1 - (-x + 2y + 3) = 0 \iff 3x - y - 4 = 0$

$k = -2$ のとき，$2x + y - 1 - 2(-x + 2y + 3) = 0 \iff 4x - 3y - 7 = 0$

$k = -3$ のとき，$2x + y - 1 - 3(-x + 2y + 3) = 0 \iff x - y - 2 = 0$

$$\vdots$$



となり，右図のように $l,\ m$ を通る直線が次々と出てくるが，ここで間違ってはいけないのが，

$(*)$ **によって，$l,\ m$ を通る直線が全て出てくるわけではない**ということである。

実際，k にどのような値を入れても，$(*)$ は $-x + 2y + 3 = 0$，つまり m の式は出てこない。

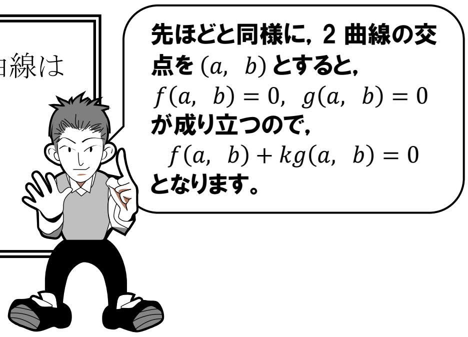
一般的には次のようになる。

曲線束

2曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る曲線は次のように表せる。

$$f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0$$

ただし，$g(x,\ y)=0$ は除く。



これを用いると，2曲線の交点を求めずに交点を通る直線が扱えるので便利である。

例 8 2円 $C: x^2+y^2=5$ …①，$D: (x-2)^2+(y-2)^2=1$ …② の交点を通り，点 $(1,\ 0)$ を通る円の方程式を求めなさい。

2円の交点を求めると…

解①

② $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ …③

③−①より，$-4x-4y+12=0$ $\Leftrightarrow$ $y=-x+3$

①に代入すると，$x^2+(-x+3)^2=5$ $\Leftrightarrow$ $2(x-1)(x-2)=0$ $\Leftrightarrow$ $x=1,\ 2$

このとき，$y=2,\ 1$

よって，交点の座標は $(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

求める円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおく。

$x=1$，$y=2$ 代入 $1+4+a+2b+c=0$ $\Leftrightarrow$ $a+2b+c+5=0$ …④

$x=2$，$y=1$ 代入 $4+1+2a+b+c=0$ $\Leftrightarrow$ $2a+b+c+5=0$ …⑤

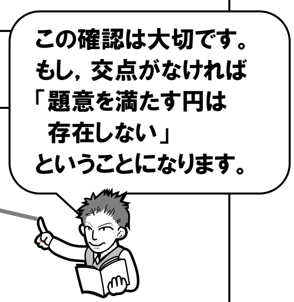
$x=1$，$y=0$ 代入 $1+a+c=0$ $\Leftrightarrow$ $a+c=-1$ …⑥

④，⑥より，$2b-1+5=0$ $\Leftrightarrow$ $b=-2$

④−⑤より，$-a+b=0$ $\Leftrightarrow$ $a=b$ よって，$a=-2$

このとき，$c=1$

以上より，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$



曲線束の考え方を用いると…

解②

2円の中心間の距離は $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，半径の和は $\sqrt{5}+1$，半径の差は $\sqrt{5}-1$

$\sqrt{5}-1<2\sqrt{2}<\sqrt{5}+1$ より，2円は異なる2点で交わる。

このとき，2円の交点を通る図形は

$$(x-2)^2+(y-2)^2-1+k(x^2+y^2-5)=0$$

と表せる。これが点 $(1,\ 0)$ を通るので，

$$1+4-1+k(1-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad k=1$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2-1+x^2+y^2-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2x-2y+1=0$$

例題 33　2 直線 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めなさい。

(1)　点 $(-1,\ 2)$ を通る　　　　(2)　直線 $x+2y+2=0$ に平行

練習 33　2 直線 $x+5y-7=0$, $2x-y-4=0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めなさい。

(1)　点 $(-3,\ 5)$ を通る　　　　(2)　直線 $x+4y-6=0$ に(ア)平行　(イ)垂直

例題 34　2 つの円 $x^2+y^2=5$, $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ について

(1)　2 円の共有点の座標を求めなさい。

(2)　2 円の共有点と点 $(1,\ 0)$ を通る円の中心と半径を求めなさい。

練習 34　2 つの円 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-2x-4y=0$ について

(1)　2 つの円は異なる 2 点で交わることを示しなさい。

(2)　2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めなさい。

(3)　2 円の 2 つの交点と点 $(2,\ 3)$ を通る円の中心と半径を求めなさい。

例題 35(1)　円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=x+1$ の 2 つの交点と原点 O を通る円の方程式を求めなさい。

(2)　円 $x^2+y^2-2kx-4ky+16k-16=0$ は定数 k の値にかかわらず 2 点を通る。この 2 点の座標を求めなさい。

練習 35(1)　円 $x^2+y^2=50$ と直線 $3x+y=20$ の 2 つの交点と点 $(10,\ 0)$ を通る円の方程式を求めなさい。

(2)　円 $C: x^2+y^2+(k-2)x-ky+2k-16=0$ は定数 k の値にかかわらず 2 点を通る。この 2 点の座標を求めなさい。

○円と放物線

例 8 円 $x^2+(y-k)^2=1$ …① と放物線 $y=x^2$ …② が共有点を持つような k の値の範囲を求めなさい。

2 式から y を消去して，

$$y+(y-k)^2=1 \iff y^2+(1-2k)y+k^2-1=0 \quad \cdots(*)$$

この 2 次方程式の解を調べていきます。

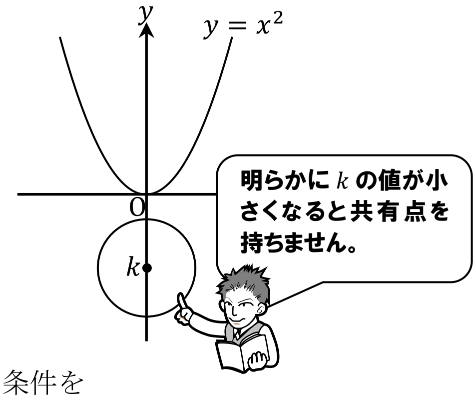
ここで判別式を用いて，共有点を持つ条件を

$$D \geqq 0 \iff (1-2k)^2-4(k^2-1) \geqq 0$$

$$\iff 5-4k \geqq 0 \iff k \leqq \frac{5}{4}$$

としてしまうのは**誤り**です。

②より，y の範囲は $y \geqq 0$ なので，方程式 $(*)$ が $y \geqq 0$ に解を持つ条件を考えないといけません。



2 式より x を消去すると，

$$y+(y-k)^2=1 \iff y^2+(1-2k)y+k^2-1=0$$

ここで，$f(y)=y^2+(1-2k)y+k^2-1$ とおき，方程式 $f(y)=0$ が $y \geqq 0$ に解を持つ条件を考える。

$z=f(y)$ の軸の方程式は $y=\dfrac{2k-1}{2}$ より，$\dfrac{2k-1}{2}$ の正負で場合分けをする。

(ⅰ) $\dfrac{2k-1}{2}<0 \iff k<\dfrac{1}{2}$ のとき

$$f(0) \geqq 0 \iff k^2-1 \geqq 0 \iff -1 \geqq k \geqq 1$$

$k<\dfrac{1}{2}$ より，$-1 \leqq k<\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $\dfrac{2k-1}{2} \geqq 0 \iff k \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

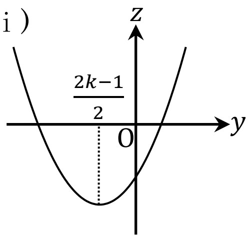
$f(y)=0$ の判別式を D とすると，

$$D \geqq 0 \iff (1-2k)^2-4(k^2-1) \geqq 0$$

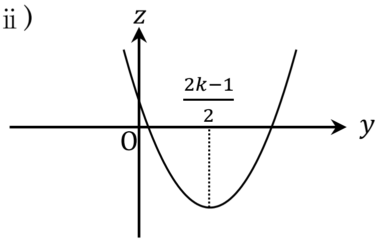
$$\iff 5-4k \geqq 0 \iff k \leqq \frac{5}{4}$$

$k \geqq \dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{5}{4}$

(ⅰ)



(ⅱ)



(ⅰ)，(ⅱ)より，共有点を持つ条件は，$-1 \leqq k \leqq \dfrac{5}{4}$

例題 36　放物線 $y=-x^2+a$ と円 $x^2+y^2=9$ について，次のものを求めなさい。

(1)　この放物線と円が接するとき，定数 a の値

(2)　異なる 4 個の交点をもつような定数 a の値の範囲

練習 36　放物線 $y=2x^2+a$ と円 $x^2+(y-2)^2=1$ について，次のものを求めなさい。

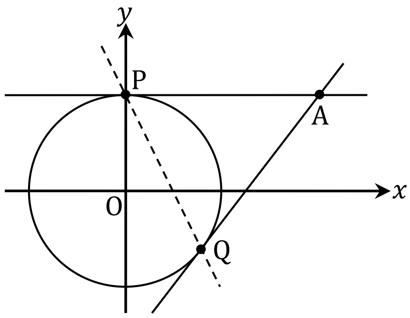
(1)　この放物線と円が接するとき，定数 a の値

(2)　異なる 4 個の交点をもつような定数 a の値の範囲

○極と極線

例 10　点A(2, 1) を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する 2 本の直線の接点を P, Q とするとき，直線 PQ の方程式を求めなさい。

解法 1(地道に解く)



接点の座標を $(a,\ b)$ とすると，接線の方程式は，$ax+by=1$

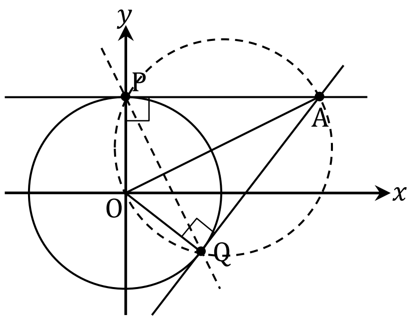
これが，A(2, 1) を通るので，$2a+b=1$　…①

また，点 $(a,\ b)$ は $x^2+y^2=1$ 上なので，$a^2+b^2=1$　…②

①，②より，$(a,\ b)=(0,\ 1),\ \left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$

よって，直線 PQ の方程式は，$y=\dfrac{-\frac{3}{5}-1}{\frac{4}{5}}x+1=-2x+1$

解法 2(円を用いる)



$\angle \mathrm{OPA}=\angle \mathrm{OQA}=90°$ より，4 点 O, P, A, Q は同一円周上にある。

この円の方程式は，2 点 O, A を直径の両端とする円なので，

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \iff x^2-2x+y^2-y=0$$

これと，$x^2+y^2=1$ の交点を通る直線が求める直線である。

2 円の交点を通る図形の方程式は

$$x^2-2x+y^2-y+k(x^2+y^2-1)=0$$

と表すことができ($x^2+y^2=1$ は除く)，$k=-1$ のとき直線を表すので，

$$x^2-2x+y^2-y-(x^2+y^2-1)=0 \iff 2x+y=1$$

解法 3(気が付くとこんな解答も…)

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とすると，2 点 P, Q における接線の方程式はそれぞれ

$x_1x+y_1y=1$, $x_2x+y_2y=1$ と表せる。

これがともに，A(2, 1) を通るので，$2x_1+y_1=1$ …①，$2x_2+y_2=1$ …②

ここで，$2x+y=1$ という直線を考えると，この直線は①，②より 2 点 P, Q を通ることが分かる。

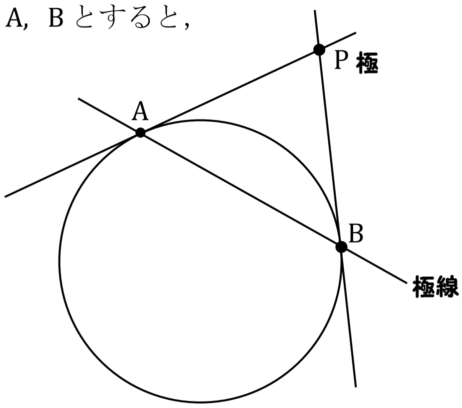
つまり，求める直線は $2x+y=1$ となる。

一般的に，円 C に外部の点 P から 2 接線を引いたときの 2 接点を A, B とすると，2 点 A, B を通る直線のことを**極線**，点 P を**極**という。

円 $C: x^2+y^2=r^2$, $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とすると，極線の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

と表せる。



軌　跡

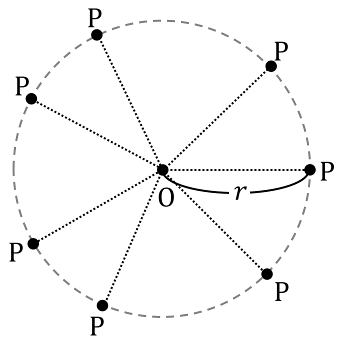
§1　軌跡とは

与えられた条件を満たしながら点 P が動くとき，点 P の描く図形を，点 P の**軌跡**という。

例 1　点 O から距離 r の点 P の軌跡

これは問題ないであろう。

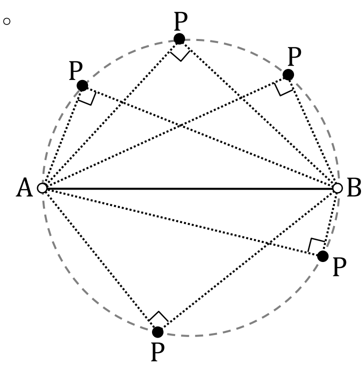
中心 O，半径 r の円となる。



例 2　2 定点 AB がある。$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ となるように点 P をとるときの点 P の軌跡

これは円周角の定理の逆から AB を直径の両端とする円となる。

ただし，直径の両端点 A，B は含まないので注意。



例 3　座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が，$\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \end{cases}$ を満たすときの点 P の軌跡

t が実数の範囲で変化するときの点 P が描く図形を考える。具体的に入れていくと次のようになる。

$t=0$ のとき，$\mathrm{P}(1,\ -1)$

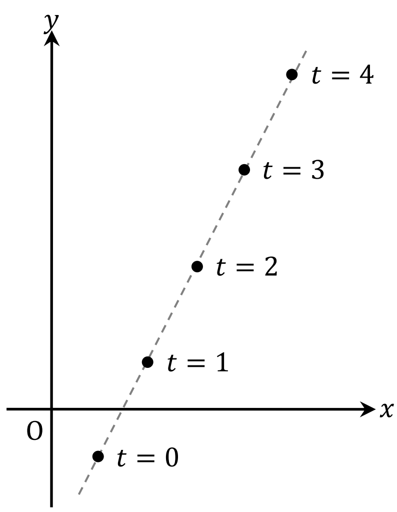
$t=1$ のとき，$\mathrm{P}(2,\ 1)$

$t=2$ のとき，$\mathrm{P}(3,\ 3)$

$t=3$ のとき，$\mathrm{P}(4,\ 5)$

$t=4$ のとき，$\mathrm{P}(5,\ 7)$

$\vdots$



このことから，点 P の軌跡は直線になることが予想できる。

このとき，変数 t を**媒介変数**という。

§2 軌跡の求め方

軌跡を求めるには，問題で与えられた条件を満たす任意の点が，満たす関係式をつくればよい。具体的な手順としては次のようになる。

軌跡の求め方

① 求める軌跡上の任意の点を $(x,\ y)$とおく。

② 問題の条件に従って x，y のみの関係式を導く。

③ 導いた関係式の表す図形を求める。
最後に，その図形上の点のうち，条件を満たさないものがあれば除く。

では実際に例を見ていこう。

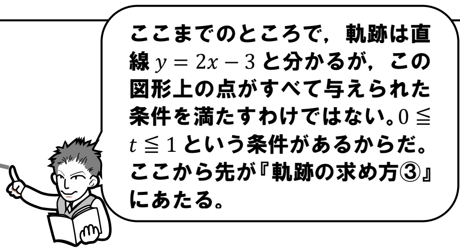
例 11 $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$\begin{cases} x = t + 1 & \cdots ① \\ y = 2t - 1 & \cdots ② \end{cases}$ で定まる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を求めなさい。

「x，y の関係式をつくる」といっても，『① + ② より，$x + y = 3t$』としては意味がない。これだと，t の値に応じて図形が変わってしまうからだ。つまり，軌跡を求めるには『軌跡の求め方②』にあるように**媒介変数 t を消去し，x, y のみの関係式にする**必要がある。

x，y のみの関係式にするために，媒介変数 t を消去する。

①より，$t = x - 1$

②に代入すると，$y = 2(x-1) - 1 \iff y = 2x - 3$



ここで，$0 \leqq t \leqq 1$ より，$1 \leqq t + 1 \leqq 2 \iff 1 \leqq x \leqq 2$

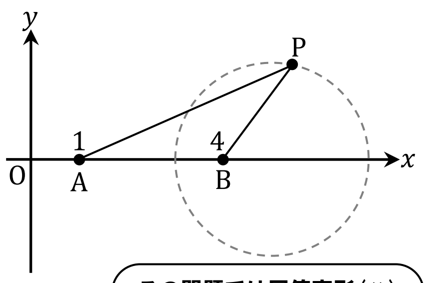
よって，求める軌跡は，直線 $y = 2x - 3$ の $1 \leqq x \leqq 2$ の部分である。

例 12 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 0)$ からの距離の比が $2 : 1$ である点 P の軌跡を求めなさい。

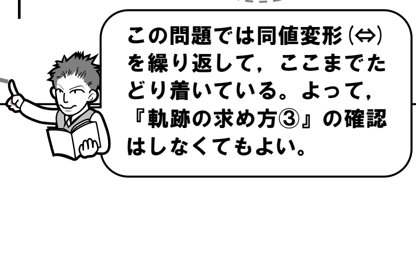
この問題ではまず点 P の座標を $(x,\ y)$ と置くところから始めます。『軌跡の求め方①』です。

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおく。

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 2 : 1 &\iff 2\mathrm{BP} = \mathrm{AP} \\
&\iff 4\mathrm{BP}^2 = \mathrm{AP}^2 \quad (\because \mathrm{AP} > 0,\ \mathrm{BP} > 0) \\
&\iff 4\{(x-4)^2 + y^2\} = (x-1)^2 + y^2 \\
&\iff x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0 \\
&\iff (x-5)^2 + y^2 = 4
\end{aligned}$$



よって，求める軌跡は，中心 $(5,\ 0)$ で半径 2 の円となる。



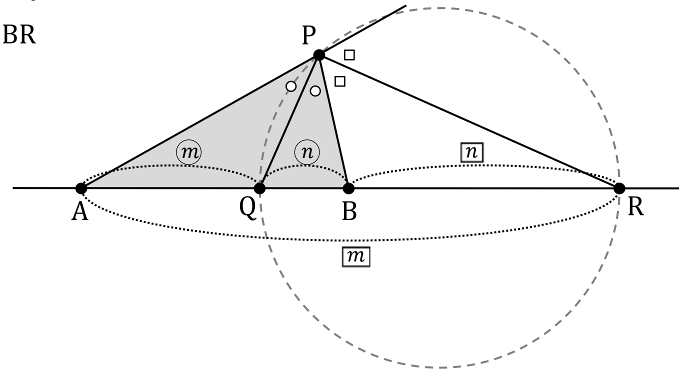
○ アポロニウスの円

2 定点 A，B に対して，$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n\ (m\neq n)$ となるように点 P をとるとき，点 P の描く図形は円となる。この円を**アポロニウスの円**という。

先程の例では計算により円となることが分かったが，ここでは幾何的に考えてみよう。
軌跡上の点のうち，線分 AB 上の点を Q，線分 AB の延長上の点を R とすると，

$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=\mathrm{AQ}:\mathrm{BQ}$

$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=\mathrm{AR}:\mathrm{BR}$



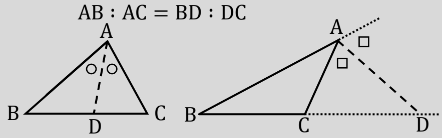
となるので，線分 PQ は ∠APB の二等分線であり，
線分 PR は ∠APB の外角の二等分線となる。これより，

$$\angle \mathrm{QPR}=\angle \mathrm{QPB}+\angle \mathrm{RPB}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{APB}+\frac{1}{2}\left(\angle \mathrm{APB}\text{の外角}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$$

よって，点 P は QR を直径とする円周上にある。

←【角の二等分線の性質】
AD が ∠A の内角または外角の二等分線であるとき，
$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}$



ここではこの性質の逆を用いている。

点 Q は AB の内分点，点 R は AB の外分点なので，アポロニウスの円は

2 点 A,B の内分点,外分点を直径の両端とする円となる

ことが分かる。

例題 37　2 点 A(−4，0)，B(2，0) からの距離の比が 2：1 である点の軌跡を求めなさい。

練習 37　2 点 A(2，3)，B(6，1) から等距離にある点 P の軌跡を求めなさい。また，距離の比が 1：3 である点 Q の軌跡を求めなさい。

例題 38　放物線 $y=x^2+(2t-10)x-4t+16$ の頂点を P とする。t が 0 以上の値をとって変化するとき，頂点 P の軌跡を求めなさい。

練習 38　円 $x^2+y^2+3ax-2a^2y+a^4+2a^2-1=0$ がある。a の値が変化するとき，円の中心の軌跡を求めなさい。

例題 39　放物線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = m(x-1)$ は異なる 2 点 A，B で交わっている。

(1)　定数 m の値の範囲を求めなさい。

(2)　m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めなさい。

練習 39　放物線 $C : y = x^2 - x$ と直線 $l : y = m(x-1) - 1$ は異なる 2 点 A，B で交わっている。

(1)　定数 m の値の範囲を求めなさい。

(2)　m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めなさい。

○ 順像法と逆像法

例 13　点 Q が放物線 $y=x^2$ 上を動くとき，点 A(1, 0) と点 Q の中点 P の軌跡を求めなさい。

Q(0, 0) のとき $P\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，Q(1, 1) のとき $P\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$，Q(2, 4) のとき $P\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$ ⋯，

このように次々と Q を定めることで，P が定まり，軌跡が求まります。

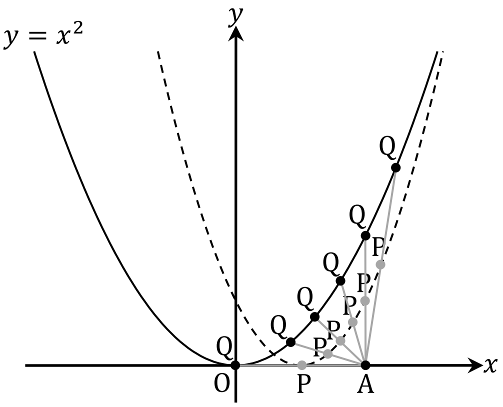
解①

$Q(t,\ t^2)$ とおくと，$P\left(\dfrac{t+1}{2},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$ となる。

ここで，$\dfrac{t+1}{2}=x$，$\dfrac{t^2}{2}=y$ とおき，t を消去する。

$t=2x-1$ より，$y=\dfrac{1}{2}(2x-1)^2=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

よって，求める軌跡は，放物線 $y=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$



次に逆の発想を用いて，この問題を考えてみましょう。
例えば，「(1, 1) は軌跡上の点となり得るのか？」を考えてみる。
この (1, 1) という点が軌跡上に乗るための条件は，点 (1, 1) が，

点 A(1, 0) と放物線上のある点との中点になっていればよい

ここで，(1, 1) が A(1, 0) と $(X,\ Y)$ の中点になっていると仮定すると，

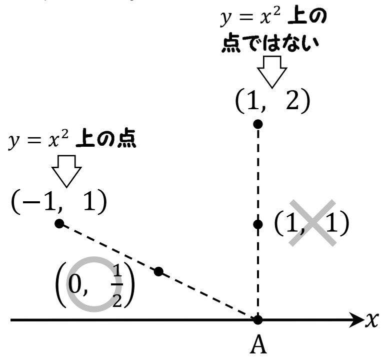
$$\frac{1+X}{2}=1 \iff X=1 \qquad \frac{Y}{2}=1 \iff Y=2$$

よって，(1, 1) は A(1, 0) と (1, 2) の中点になっていることが分かるが，点 (1, 2)は明らかに $y=x^2$ 上の点ではない。つまり，(1, 1) は軌跡上の点にはなっていないことが分かる。

次に，「$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ は軌跡上の点となり得るのか？」を同様に考えてみる。

$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ が A(1, 0) と $(X,\ Y)$ の中点になっていると仮定すると，

$$\frac{1+X}{2}=0 \iff X=-1 \qquad \frac{Y}{2}=\frac{1}{2} \iff Y=1$$



よって，$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ は A(1, 0) と (−1, 1) の中点になっていることが分かるが，

点 (−1, 1) は明らかに $y=x^2$ 上の点である。

つまり，$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ は軌跡上の点になっていることが分かる。

点 P が軌跡上に存在するための条件を上の具体例と同様に考えることで，解答を作ることができる。

解②

$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおく。

AQ の中点が P なので，

$\dfrac{1+X}{2}=x \iff X=2x-1 \quad \cdots$①　　$\dfrac{Y}{2}=y \iff Y=2y \quad \cdots$②

←これより，点 P が 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$(2x-1,\ 2y)$ の中点になっていることが分かる。

Q が $y=x^2$ 上にあればよいので，$Y=X^2 \quad \cdots$③

①，②，③より，$2y=(2x-1)^2 \iff y=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

よって，求める軌跡は，放物線 $y=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

この問題において，$\boxed{\text{解①}}$を順像法，$\boxed{\text{解②}}$を逆像法ということがある。

例題 40　2 点 $\mathrm{A}(6,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$ と円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点 Q を 3 つの頂点とする三角形の重心 P の軌跡を求めなさい。

練習 40　放物線 $y=x^2 \quad \cdots$① と $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(-1,\ -2)$，$\mathrm{C}(4,\ -1)$ がある。点 P が放物線①上を動くとき，次の点 Q，R の軌跡を求めなさい。

(1)　線分 AP を 2 : 1 に内分する点 Q　　(2)　△ PBC の重心 R

例題 41　次の直線の方程式を求めなさい。

(1)　2 直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ のなす角の二等分線

(2)　直線 $l : x-y+1=0$ に関して直線 $2x+y-2=0$ と対称な直線

練習 41　次の直線の方程式を求めなさい。

(1)　2 直線 $x-\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$，$\sqrt{3}x-y+1=0$ のなす角の二等分線

(2)　直線 $l : 2x+y+1=0$ に関して直線 $3x-y-2=0$ と対称な直線

例 14　t が実数全体を動くとき，2 直線 $l : x + ty = 0$，$m : tx - y = 2t$ の交点 P の軌跡を求めなさい。

まずは順像法を用いて考える。

$t = 0$ **のとき**
　$l : x = 0$，$m : -y = 0$
　この 2 直線の交点は $\mathrm{P}(0,\ 0)$
$t = 1$ **のとき**
　$l : x + y = 0$，$m : x - y = 2$
　この 2 直線の交点は $\mathrm{P}(1,\ -1)$
$t = 2$ **のとき**
　$l : x + 2y = 0$，$m : 2x - y = 4$
　この 2 直線の交点は $\mathrm{P}\left(\frac{8}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$
　⋮
このように次々と直線 l，m **を定めることで,**P **が定まり,軌跡が求まる。**

解①

$x + ty = 0 \quad \cdots ①$，$tx - y = 2t \quad \cdots ②$

①$+$②$\times t$ より，$(1+t^2)x = 2t^2 \iff x = \dfrac{2t^2}{1+t^2}$

このとき，$y = t \cdot \dfrac{2t^2}{1+t^2} - 2t = -\dfrac{2t}{1+t^2}$

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2t^2}{1+t^2},\ -\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$

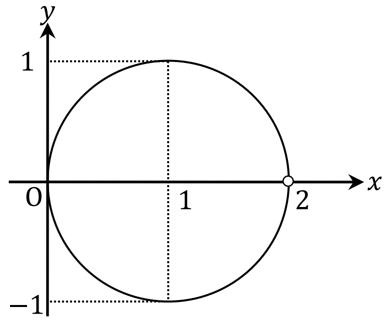
ここで，$\dfrac{2t^2}{1+t^2} = x$，$-\dfrac{2t}{1+t^2} = y$ とおき，2 式から t を消去する。

$\dfrac{2t^2}{1+t^2} = x \iff (2-x)t^2 = x$　　$x \neq 2$ より，$t^2 = \dfrac{x}{2-x}$

これより，$y^2 = \dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{4 \cdot \dfrac{x}{2-x}}{\left(1 + \dfrac{x}{2-x}\right)^2} = x(2-x)$

$$\iff x^2 - 2x + y^2 = 0 \ (x \neq 2)$$
$$\iff (x-1)^2 + y^2 = 1 \ (x \neq 2)$$

よって，求める軌跡は，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円。
ただし，点 $(2,\ 0)$ を除く。



次に逆像法を用いて考える。

例えば，「$(1,\ 1)$ は軌跡上の点となり得るのか？」を考えてみる。
この $(1,\ 1)$ という点が軌跡上に乗るための条件は，点 $(1,\ 1)$ が，**2 直線①,②の交点となっていればよい。**
つまり，点 $(1,\ 1)$ が 2 直線上に同時にあればよいので,
　①に $x = 1$，$y = 1$ を代入すると，$1 + t = 0 \iff t = -1$
　②に $x = 1$，$y = 1$ を代入すると，$t - 1 = 2t \iff t = -1$
よって，$t = -1$ のとき，①，②の交点は $(1,\ 1)$ となるので，軌跡上の点である。

次に，「$(0,\ 1)$ は軌跡上の点となり得るのか？」を同様に考えてみる。
　①に $x = 0$，$y = 1$ を代入すると，$0 + t = 0 \iff t = 0$
　②に $x = 0$，$y = 1$ を代入すると，$t \cdot 0 - 1 = 2t \iff t = -\frac{1}{2}$
t の値が異なるので，$(0,\ 1)$ は交点ではない。つまり，軌跡上の点ではない。

この方針で解答をつくってみる。

点 P が軌跡上に存在するための条件を上の具体例と同様に考えることで，解答を作ることができる。

解②

$x+ty=0\ \cdots$①，$tx-y=2t\ \cdots$②

$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおく。

点 P が 2 直線①，②上の点なので，

①に $x=X$，$y=Y$ を代入すると，$X+tY=0\ \cdots$③

②に $x=X$，$y=Y$ を代入すると，$tX-Y=2t\ \cdots$④

←③,④式の t の値が一致すれば,点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ は 2 直線の交点となる。

この 2 式を同時に満たすような t が存在すればよいので，

③より，$Y\neq 0$ のとき，$t=-\dfrac{X}{Y}$

これを④に代入すると，$-\dfrac{X}{Y}\cdot X-Y=2\left(-\dfrac{X}{Y}\right)\ \Leftrightarrow\ X^2+Y^2-2X=0\ (Y\neq 0)$

$\Leftrightarrow\ (X-1)^2+Y^2=1\ (Y\neq 0)$

$Y=0$ のとき，③より $X=0$

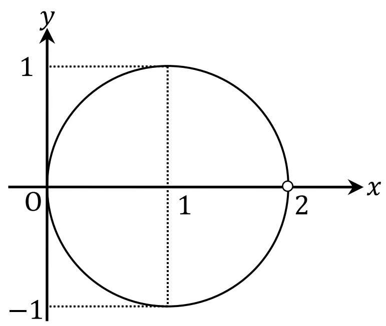
これを④に代入すると，$0=2t\ \Leftrightarrow\ t=0$

つまり，$t=0$ のとき $(0,\ 0)$ は①，②の交点となるので，

軌跡上の点である。

以上より，求める軌跡は，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円。

ただし，点 $(2,\ 0)$ を除く。



幾何的に考えると…

解③

$x+ty=0\ \cdots$①，$tx-y=2t\ \cdots$②

$1\cdot t+t\cdot(-1)=0$ より，①，②は直交し，

$\leftarrow ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0$ の平行,垂直
平行 $ab'-a'b=0$ **垂直** $aa'+bb'=0$

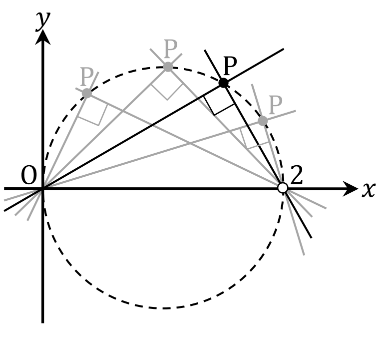
①は常に原点を通り，②は常に $(2,\ 0)$ を通る。

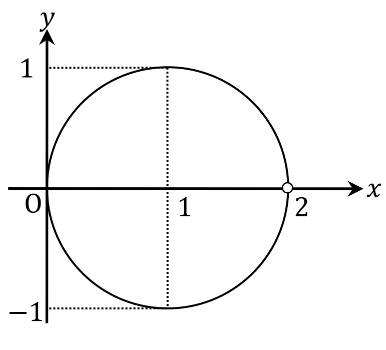
よって，P の軌跡は 2 点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を直径とする円となる。

ただし，直線①は点 $(2,\ 0)$ を通らないので，

求める軌跡は，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円となる。

ただし，点 $(2,\ 0)$ を除く。





例題 42 m が実数全体を動くとき，次の 2 直線の交点 P はどんな図形を描きますか。

$$mx - y = 0 \quad \cdots ①,\ x + my - m - 2 = 0 \quad \cdots ②$$

練習 42 k が実数全体を動くとき，2 つの直線 $l_1 : ky + x - 1 = 0$，$l_2 : y - kx - k = 0$ の交点はどんな図形を描きますか。

例題 43 xy 平面の原点を O とする。xy 平面上の O と異なる点 P に対し, 直線 OP 上の点 Q を, 次の条件 (A)，(B) を満たすようにとる。

(A)　$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 4$

(B)　Q は，O に関して P と同じ側にある。

点 P が直線 $x = 1$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めて，図示しなさい。

練習 43 xy 平面の原点を O とする。O を始点とする半直線上の 2 点 P，Q について，$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 4$ が成立している。点 P が原点を除いた曲線 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$，$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めなさい。

MEMO

領　域

§1　不等式の表す領域

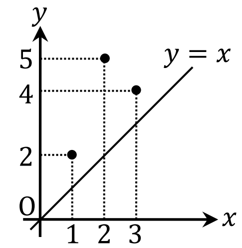
ここまでは方程式の表す図形を考えてきたが，ここでは**不等式が表す図形**について考えていく。

例 15　不等式 $y > x$ が表す図形 D を図示しなさい。

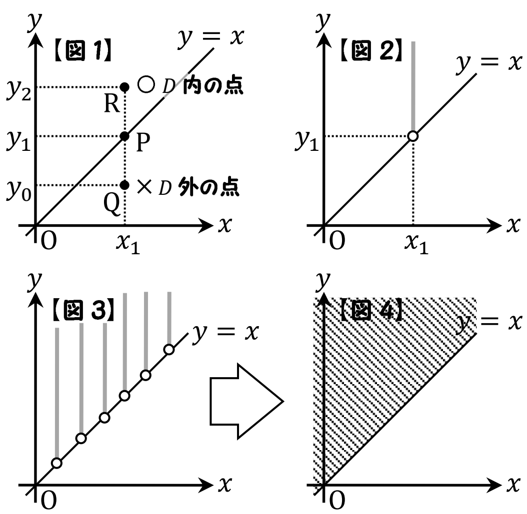
方程式 $y = x$ が表す図形を l とすると，l は x 座標と y 座標が常に等しい点の集まり，つまり直線になります。これに対し D は

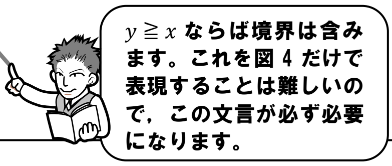
$$(y\,座標) > (x\,座標)$$

となる点の集まりになります。つまり，(1，2)，(2，5)，(3，4)，… などの点を集めていくと図形が現れるわけです。



直線 $y = x$ 上の点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする。
つまり，$y_1 = x_1$　…①　が成り立つ。
このとき，$y_0 < y_1 < y_2$ を満たす 2 点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_0)$，$\mathrm{R}(x_1,\ y_2)$ をとる(図 1)。①より $y_0 < x_1 < y_2$ となるので，
点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_0)$ は $y > x$ を満たさないので D 上の点ではない。
点 $\mathrm{R}(x_1,\ y_2)$ は $y > x$ を満たすので D 上の点となる。
つまり，点 P より上の点は全て D 上の点となる(図 2)。
ここで，点 P を色々な場所にとる(図 3)と，直線より上が不等式が表す図形 D となる(図 4)。
ただし，境界となる直線上の点は含まない。





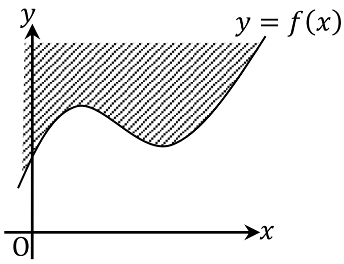
ここで求めた図形 D のことを，不等式 $y > x$ の表す**領域**と言う。
ちなみに，$y < x$ ならば，直線の下側(境界含まない)となる。

一般的に関数 $y = f(x)$ において，

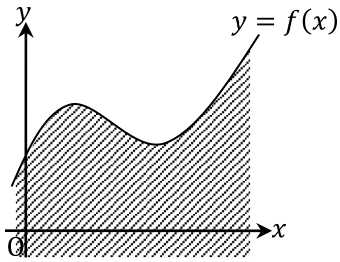
　$y > f(x)$，$y \geqq f(x)$はグラフの上側

　$y < f(x)$，$y \leqq f(x)$はグラフの下側

となり，不等式に等号がついているときのみ領域に境界線を含む。



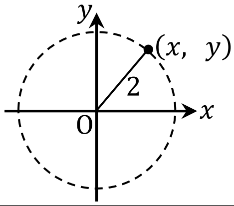
$y > f(x)$，$y \geqq f(x)$



$y < f(x)$，$y \leqq f(x)$

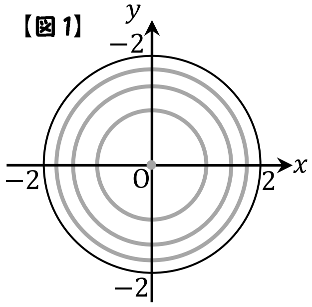
例 16　不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$ が表す領域を図示しなさい。

方程式 $x^2+y^2=4$ が表す図形は
「原点からの距離が 2 である点の軌跡」
なので，半径 2 の円となります。

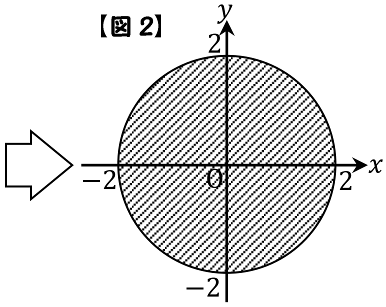


不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$ が表す図形は
「原点からの距離が 2 以下である点の軌跡」
となる。
$x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=2$，$x^2+y^2=3$，$\cdots$
などを次々に図示していくと(図 1)，求める領域は【図 2】の斜線部分となる。
ただし，境界線は含む。

【図 1】



【図 2】



ちなみに，$x^2+y^2 \geqq 4$ ならば，円の外側(境界含む)となる。

例題 44　次の不等式を表す領域を図示しなさい。

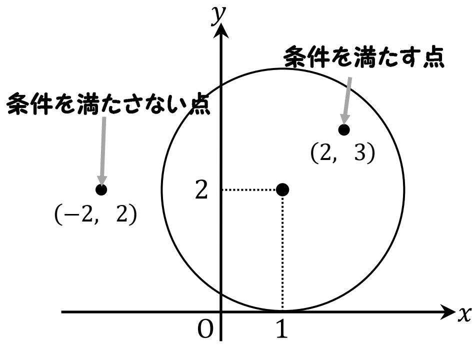
(1)　$y-2x<4$　　(2)　$y \geqq x^2-3x+2$　　(3)　$|x|>4$　　(4)　$(x-2)^2+y^2 \geqq 4$

練習 44　次の不等式を表す領域を図示しなさい。

(1)　$2x-3y-6<0$　　(2)　$3x+2>0$　　(3)　$|y| \leqq 3$
(4)　$y>x^2-2x$　　(5)　$y \leqq 4x-x^2$　　(6)　$(x-1)^2+(y-2)^2<9$

領域のチェックポイント

ここで，領域を間違えずに図示するための簡単なチェックポイントを挙げておきましょう。
例えば『不等式 $(x-1)^2+(y-2)^2 \leqq 4$ の表す領域を図示しなさい』という問題を考えます。
この領域を図示するために，まずは円 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ を座標平面上に描き，円の内部か外部のどちらか片方を塗りつぶせばよいわけですが，そのときに**具体的な値を入れてみる**のです。
例えば，円外の点 $(-2,\ 2)$ を代入してみると，$(-2-1)^2+(2-2)^2=9>4$ となり，$(x-1)^2+(y-2)^2 \leqq 4$ を満たしません。つまり，点 $(-2,\ 2)$ は領域外の点です。このことから，求める領域は円の内部であることが分かります。
ちなみに，円内の点 $(2,\ 3)$ を代入してみると，$(2-1)^2+(3-2)^2=2<4$ となり，確かに $(x-1)^2+(y-2)^2 \leqq 4$ を満たします。
領域を図示した際の確認として，用いるとよいでしょう。



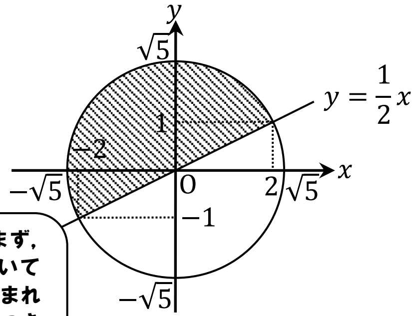
例 17 連立不等式$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 5 \\ x-2y<0 \end{cases}$が表す領域を図示しなさい。

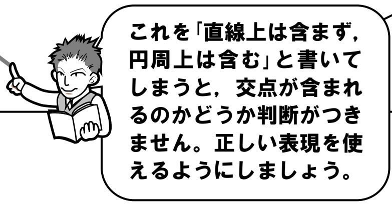
$x^2+y^2 \leqq 5$ かつ $y > \dfrac{1}{2}x$ となる領域を求める。

つまり，円の内側かつ直線の上側なので，

求める領域は右図斜線部分。

ただし境界は，直線上を含まず他を含む。





例題 45 次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $\begin{cases} x+y>0 \\ 2x-y+2>0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2y+2<0 \\ x^2+y^2 \geqq 4 \end{cases}$

練習 45 次の連立不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $\begin{cases} x-2y-2<0 \\ 3x+y-5<0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+3 \leqq 0 \\ x+3y-3 \geqq 0 \end{cases}$ (3) $-2x^2+1 \leqq y < x+4$

例題 46 次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $|x+2y| \leqq 6$ (2) $|x|+|y+1| \leqq 2$

練習 46 次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1) $|2x+5y| \leqq 4$ (2) $|2x|+|y-1| \leqq 5$ (3) $|x-2| \leqq y \leqq -|x-2|+4$

例 18 不等式 $(x-y)(x^2+y^2-2) \geqq 0$ が表す領域を図示しなさい。

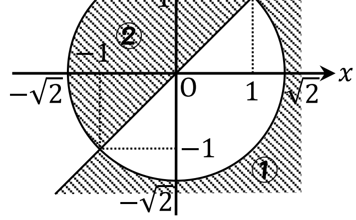
$AB \geqq 0 \iff \begin{cases} A \geqq 0 \\ B \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A \leqq 0 \\ B \leqq 0 \end{cases}$ を利用します。

$(x-y)(x^2+y^2-2) \geqq 0$

$\iff \begin{cases} y \leqq x \\ x^2+y^2 \geqq 2 \end{cases}$ …① または $\begin{cases} y \geqq x \\ x^2+y^2 \leqq 2 \end{cases}$ …②

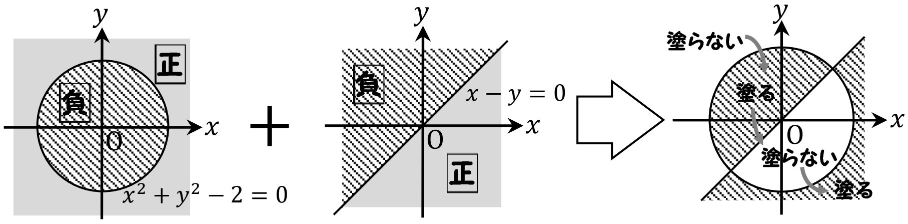
これを図示すると，右図斜線部分。

ただし，境界含む。



曲線 $f(x,\ y)=0$ に分けられた領域において，$f(x,\ y)>0$ の部分を**正領域**，$f(x,\ y)<0$ の部分を**負領域**という。例えば，曲線 $x-y=0$，$x^2+y^2-2=0$ における正領域，負領域は下図のようになる。

これを見ると結局，不等式 $(x-y)(x^2+y^2-2)\geqq 0$ が表す領域を図示するには，2つの負領域，正領域が重なっている部分を塗りつぶせばよいことが分かる。また，この問題の場合，境界の両側で，領域の符号が異なるので，境界を越える度に，**塗る領域と塗らない領域が交互に現れる**。



例題 47　次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1)　$(x+y-2)(y-x^2)>0$　　(2)　$(x^2+y^2-4)(x^2+y^2+4x-5)\leqq 0$

練習 47　次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1)　$(y-x)(x+y-2)>0$　　(2)　$(y-x^2)(x-y+2)\geqq 0$　　(3)　$(x+2y-4)(x^2+y^2-2x-8)<0$

例題 48　直線 $y=ax+b$ が，2 点 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$，$\mathrm{B}(2,\ -3)$ を結ぶ線分と共有点を持つような a，b の条件を求め，それを ab 平面上の領域として表しなさい。

練習 48　点 A，B を $\mathrm{A}(-1,\ 5)$，$\mathrm{B}(2,\ -1)$ とする。実数 a，b について，直線 $y=(b-a)x-(3b+a)$ が線分 AB と共有点をもつとする。点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在する領域を図示しなさい。

例題 49　実数 x，y が $x^2+y^2\leqq 1$ を満たしながら変わるとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く領域を図示しなさい。

練習 49　座標平面上の点 $(p,\ q)$ は $x^2+y^2\leqq 8$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ で表される領域を動く。

(1)　$(p+q,\ p-q)$　　(2)　$(p+q,\ pq)$

例題 50　x，y は実数とする。

(1)　$x^2+y^2+2x<3$ ならば $x^2+y^2-2x<15$ であることを証明しなさい。

(2)　$x^2+y^2\leqq 5$ が $2x+y\geqq k$ の十分条件となる定数 k の値の範囲を求めなさい。

練習 50　x，y は実数とする。

(1)　x，y は実数とする。$x^2+y^2<4x-3$ ならば $x^2+y^2>1$ であることを証明しなさい。

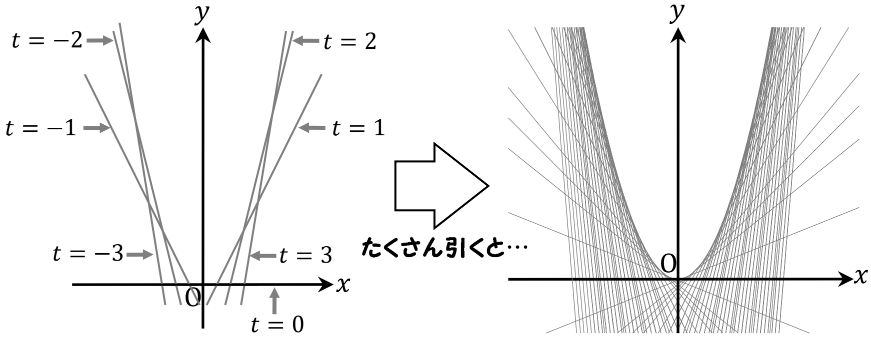
(2)　$x^2+y^2\leqq 4$ が $x+3y\leqq k$ の十分条件となる定数 k の値の範囲を求めなさい。

○　直線の通過領域

例 19　t が実数全体を変化するとき，直線 $y = 2tx - t^2$　$\cdots(*)$ の通過領域を求めなさい。

とりあえず $(*)$ の t に具体的な値を入れていきます。

$t = -3$ のとき，$y = -6x - 9$
$t = -2$ のとき，$y = -4x - 4$
$t = -1$ のとき，$y = -2x - 1$
$t = 0$ のとき，$y = 0$
$t = 1$ のとき，$y = 2x - 1$
$t = 2$ のとき，$y = 4x - 4$
$t = 3$ のとき，$y = 6x - 9$
$\vdots$



これを繰り返していくことで，直線が通過する領域は見えてきます。
しかし，残念ながら全て実数を t に代入することはできません。
そこでこの問題は，軌跡を求める際にも利用した**逆像法**を用います。

例えば，「(1，0) は通過領域に含まれるのか？」を考えてみる。
この (1，0) という点が通過領域に含まれるには，点 (1，0) が**直線 $(*)$ 上の点となっていればよい**。
$(*)$ に $x = 1$，$y = 0$ を代入すると，$\boxed{0 = 2t - t^2 \iff t = 0,\ 2}$
よって，$t = 0$，2 のとき，点(1，0) は直線 $(*)$ 上にあるので，通過領域に含まれる。

次に，「(1，2) は通過領域に含まれるのか？」を同様に考えてみる。

$(*)$ に $x = 1$，$y = 2$ を代入すると，$\boxed{2 = 2t - t^2 \iff t = 1 \pm \sqrt{1-2}\ (\text{解なし})}$

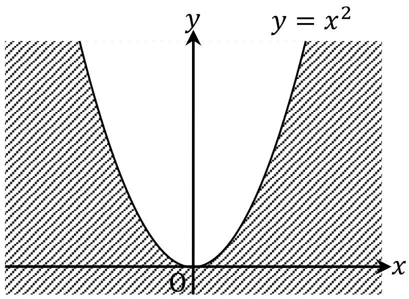
よって，直線 $(*)$ の t にどのような値を代入しても点 (1，2) は絶対に通らない。
つまり，点(1，2) は通過領域に含まれない。

では，この方針で解答をつくってみよう。

点$(X,\ Y)$ が通過領域に含まれる条件を考える。
$(*)$ に $x = X$，$y = Y$ を代入すると，$Y = 2tX - t^2 \iff t^2 - 2Xt + Y = 0$
この t についての 2 次方程式が実数解を持てばよいので，
判別式を D とすると，

$$D/_4 \geqq 0 \iff X^2 - Y \geqq 0 \iff Y \leqq X^2 \quad \cdots(**)$$

この不等式 $(**)$ が通過領域に含まれる条件となる。
つまり，求める領域は $y \leqq x^2$ となる。



例題 51　直線 $y = 2ax + a^2$　…① について，a がすべての実数値をとって変化するとき，直線①が通りうる領域を図示しなさい。

練習 51　直線 $y = ax + \frac{1-a^2}{4}$　…① について，a がすべての実数値をとって変化するとき，直線①が通りうる領域を図示しなさい。

例題 52　直線 $y = 2tx - t^2 + 1$　…① について，t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の値をとって変化するとき，直線①が通過する領域を図示しなさい。

練習 52　直線 $y = -4tx + t^2 - 1$　…① について，t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲の値をとって変化するとき，直線①が通過する領域を図示しなさい。

§2 領域における最大・最小

ここでは，領域を用いた最大・最小の問題を考えていく。

例 20 $x^2+y^2 \leqq 4$ のとき，$2x+y$ の取り得る値の範囲を求めなさい。

とりあえず，条件 $x^2+y^2 \leqq 4$ を満たす x，y を，$2x+y$ に代入していくと…

$x=0$，$y=0$ のとき，$2x+y=0$

$x=1$，$y=1$ のとき，$2x+y=3$

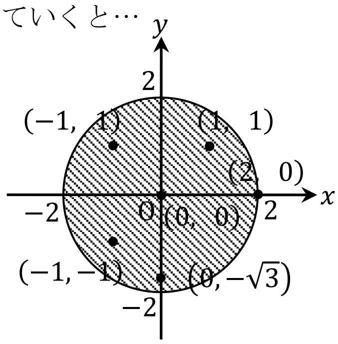
$x=2$，$y=0$ のとき，$2x+y=4$

$x=-1$，$y=1$ のとき，$2x+y=-1$

$x=-1$，$y=-1$ のとき，$2x+y=-3$

$x=0$，$y=-\sqrt{3}$ のとき，$2x+y=-\sqrt{3}$

⋮



このように，次々と $2x+y$ の値が求まっていきます。そして，これを続けていき，全ての x，y の組を代入すれば取りうる値の範囲が分かるはずです。しかし，残念ながら，無限にある x，y の組を，全て代入するのは**不可能**です。つまり，この方法は現実的ではありません。

そこで，ここでも**逆像法**を利用していきます。

例えば，「1 は範囲に含まれるか？」を考えてみる。

これは，$2x+y=1$ となるような x，y が存在するかを考えればよい。

つまり，$x^2+y^2 \leqq 4$ かつ $2x+y=1$ を満たす x，y が存在すればよい。

$x^2+y^2 \leqq 4$ が円の周または内部を表すことを考えると，

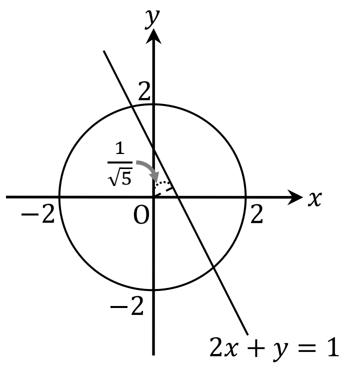
円 $x^2+y^2=4$ と直線 $2x+y=1$ が共有点を持てばよい。

円の中心 O と $2x+y=1$ の距離を考えると，

$$\frac{|-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<2$$

となり，$x^2+y^2 \leqq 4$ かつ $2x+y=1$ を満たす x，y は存在する。

つまり，$2x+y$ は 1 という値を取り得る。



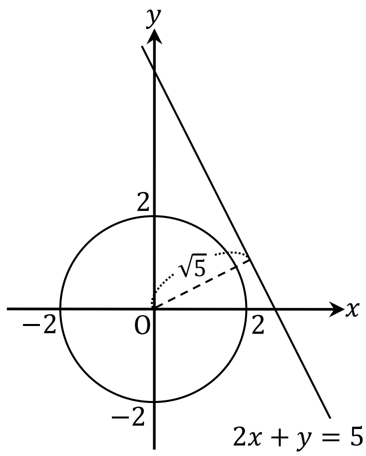
次に，「5 は範囲に含まれるか？」を同様に考えてみる。

この場合，円の中心 O と $2x+y=5$ の距離は，

$$\frac{|-5|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}>2$$

となり，$x^2+y^2 \leqq 4$ かつ $2x+y=5$ を満たす x，y が存在しない。

つまり，$2x+y$ は 5 という値は取らない。



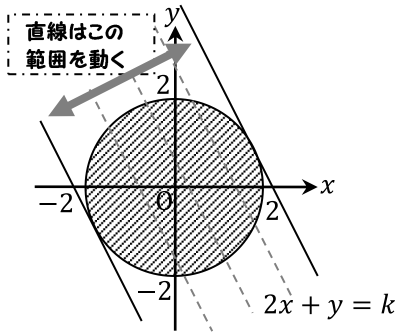
では，この方針で解答をつくってみよう。

「ある値 k が範囲に含まれる条件」を考えることで解答を作ります。

$x^2+y^2 \leqq 4$ かつ $2x+y=k$ を満たす x，y が存在するような k の条件を考える。
これは円 $x^2+y^2=4$ と直線 $2x+y=k$ が共有点を持てばよいので，

$$\frac{|-k|}{\sqrt{4+1}} \leqq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |k| \leqq 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\sqrt{5} \leqq k \leqq 2\sqrt{5}$$



よって，$2x+y$ の取り得る値の範囲は，

$$-2\sqrt{5} \leqq 2x+y \leqq 2\sqrt{5}$$

となる。

なお，この問題では範囲を聞かれているが，最大値，最小値を聞かれているのとほぼ同じである。
つまり，$2x+y$ の最大値 $2\sqrt{5}$，最小値 $-2\sqrt{5}$ となる。
このように，不等式で表された領域を用いて，1 次式 $ax+by$ の最大値，最小値を求める方法を**線形計画法**といい，経済の世界などで広く使われる手法である。

では，1 つ簡単な例を紹介しておきましょう。

例 21　あるお菓子屋に 1 枚 20 円のクッキー A と 1 枚 30 円のクッキー B があります。
それぞれ 1 枚作るのに必要な材料は右の通りです。
さて，今日は小麦粉 30kg，砂糖 18kg，
アーモンド 6kg，レーズン 12kg 仕入れました。
クッキーはいつも売り切れるとすると，売り上げを
最大にするためにはクッキー A，B をそれぞれ何枚ずつ作ればよいですか？

	小麦粉	砂糖	アーモンド	レーズン
A	10g	3g	3g	
B	8g	6g		4g

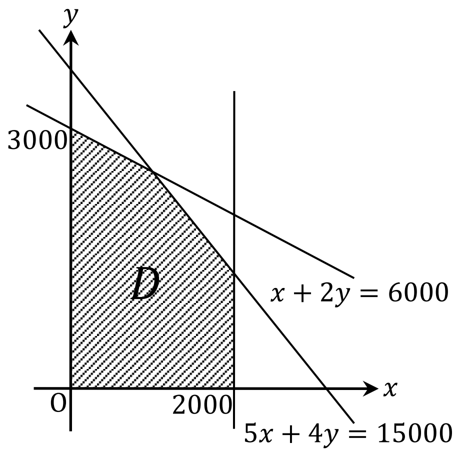
クッキー A を x 枚，クッキー B を y 枚作るとする。
このとき，必要となる小麦粉，砂糖，アーモンド，レーズンの量は以下のようになる。

小麦粉	砂糖	アーモンド	レーズン
$10x+8y$ (g)	$3x+6y$ (g)	$3x$ (g)	$4y$ (g)

仕入れた量は，小麦粉 30000g，砂糖 18000g，アーモンド 6000g，レーズン 12000g なので

$10x+8y \leqq 30000 \quad \Leftrightarrow \quad 5x+4y \leqq 15000 \quad \cdots$①
$3x+6y \leqq 18000 \quad \Leftrightarrow \quad x+2y \leqq 6000 \quad \cdots$②
$3x \leqq 6000 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqq 2000 \quad \cdots$③
$4y \leqq 12000 \quad \Leftrightarrow \quad y \leqq 3000 \quad \cdots$④

を満たす。つまり，$(x,\ y)$ の組が上の条件①～④を満たすとき，
売上 $20x+30y$ (円)の最大値を考えればよい。
不等式①～④が表す領域を D とすると，
D は右図斜線部分となる(境界含む)。



ここで，$20x+30y=k$ とおく。

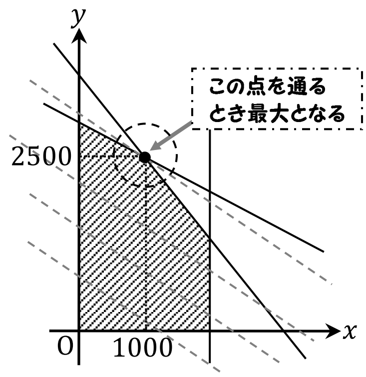
$$20x+30y=k \iff y=-\frac{2}{3}x+\frac{k}{30}$$

これより，傾き $-\dfrac{2}{3}$ の直線を領域 D と共有点を持つように動かすとき，k の最大値を考えればよい。

これはつまり，y 切片の最大となるような k の値を求めればよい。

右図より，$x=1000$，$y=2500$ のとき最大となるので，

売り上げの最大値は，$20\cdot1000+30\cdot2500=95000$ 円



例題 53　x，y が 3 つの不等式 $3x-5y \geqq -16$，$3x-y \leqq 4$，$x+y \geqq 0$ を満たすとき，$2x+5y$ の最大値および最小値を求めなさい。

練習 53(1)　x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+2y \leqq 6$，$2x+y \leqq 6$ を満たすとき，$x-y$ の最大値および最小値を求めなさい。

(2)　x，y が連立不等式 $x+y \geqq 1$，$2x+y \leqq 6$，$x+2y \leqq 4$ を満たすとき，$2x+3y$ の最大値および最小値を求めなさい。

例題 54　ある会社が 2 種類の製品 A，B を 1 単位作るのに必要な電力量，ガスの量はそれぞれ A が 2kWh，2 m^3；B が 3kWh，1m^3 である。また，使うことのできる総電力は 19kWh，ガスの総量は 13m^3 であるとする。1 単位当たりの利益を A が 7 万円，B が 5 万円とするとき，A と B をそれぞれ何単位作ると，利益は最大となりますか。

練習 54　ある工場で 2 種類の製品 A，B が，2 人の職人 M，W によって生産されている。ある製品 A については，1 台当たり組立作業に 6 時間，調整作業に 2 時間が必要である。また，製品 B については，組立作業に 3 時間，調整作業に 5 時間が必要である。いずれの作業も日をまたいで継続することができる。職人 M は組立作業のみに，職人 W は調整作業のみに従事し，かつ，これらの作業にかける時間は職人 M が 1 週間に 18 時間以内，職人 W が 1 週間に 10 時間以内と制限されている。4 週間で製品 A，B の合計生産台数を最大にしたい。その合計生産台数を求めなさい。

例題 55　x，y が 2 つの不等式 $x^2+y^2 \leqq 10$，$y \geqq -2x+5$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めなさい。

練習 55　座標平面上で不等式 $x^2+y^2 \leqq 2$，$x+y \geqq 0$ で表される領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が A を動くとき，$4x+3y$ の最大値と最小値を求めなさい。

例題 56　連立不等式 $2x-3y \geqq -12$，$5x-y \leqq 9$，$x+5y \geqq 7$ の表す領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が領域 A を動くとき，x^2+y^2 の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めなさい。

練習 56　連立不等式 $y \leqq \dfrac{1}{2}x+3$，$y \leqq -5x+25$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の表す領域を点 $(x,\ y)$ が動くとき，次の最大値と最小値を求めなさい。

(1)　x^2+y^2

(2)　$x^2+(y-8)^2$