

式と証明

§1 等式

以下の2つの等式を比べてみて下さい。

$$\textcircled{1} \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

①は2次**方程式**です。これは $x=2, 3$ の**ときのみ成立する**式になります。

それに対して②は、左辺を展開すると右辺は同じ形になるので、 x に**どのような値を入れても成立**します。

このような等式を**恒等式**といいます。

恒等式について、以下のことが成り立っている。

恒等式の性質①

$$\left(\begin{array}{l} a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ が} \\ x \text{ についての恒等式} \end{array} \right) \Leftrightarrow a_2 = a_1 = a_0 = 0$$

証明

$(\Leftarrow)$ は明らかに成立している。

$(\Rightarrow)$ を示す。

$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ が任意の x について、成り立っているので

$x=0, 1, -1$ を代入しても成り立っている。よって、

$$x=0 \text{ 代入 } a_0 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x=1 \text{ 代入 } a_2 + a_1 + a_0 = 0 \quad \textcircled{1} \text{ より, } a_2 + a_1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x=-1 \text{ 代入 } a_2 - a_1 + a_0 = 0 \quad \textcircled{1} \text{ より, } a_2 - a_1 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ より, } 2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$$

$$\text{このとき, } a_1 = 0$$

以上より、成立している。

一般的には

$$\left(\begin{array}{l} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \\ \text{が } x \text{ についての恒等式} \end{array} \right) \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

が成り立っている。

このことから、次のことが成り立ちます。

恒等式の性質②

$$\left(\begin{array}{l} a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_2x^2 + b_1x + b_0 \\ \text{が } x \text{ についての恒等式} \end{array} \right) \Leftrightarrow a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0$$

証明

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_2x^2 + b_1x + b_0 \Leftrightarrow (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0 = 0$$

これが x についての恒等式となるので、『恒等式の性質①』より、

$$a_2 - b_2 = 0, a_1 - b_1 = 0, a_0 - b_0 = 0 \Leftrightarrow a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0$$

一般的に、多項式 $f(x)$, $g(x)$ おいて、 $f(x) = g(x)$ が x についての恒等式ならば
2 式の**次数が等しくかつ同じ次数の項の係数が等しく**なります。

例題1 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c, d の値を定めなさい。

$$-2x^3 + 8x^2 + ax + b + 10 = (2x^2 + 3)(cx + d)$$

練習1 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c, d の値を定めなさい。

$$ax^3 + 25x^2 + bx + 6 = (x + 3)(cx + 1)(3x + d)$$

例題2 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めなさい。

$$ax(x + 1) + bx(x - 3) - c(x - 3)(x + 1) = 6x^2 + 7x + 21$$

練習2 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めなさい。

$$4x^2 - 13x + 13 = a(x^2 - 1) + b(x + 1)(x - 2) + c(x - 2)(x - 1)$$

例題3 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めなさい。

$$\frac{-2x^2 + 6}{(x + 1)(x - 1)^2} = \frac{a}{x + 1} - \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$$

練習3 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めなさい。

$$\frac{1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2} + \frac{c}{x + 3}$$

例題4 x の整式 $x^3 + ax^2 + 3x + 5$ を整式 $x^2 - x + 2$ で割ると、商が $bx + 1$ 、余りが R であった。このとき、定数 a, b の値と R を求めなさい。ただし、 R は x の整式または定数であるとする。

練習4 (1) x の整式 $2x^3 + ax^2 + x + 1$ を整式 $x^2 + x + 1$ で割ると、商が $bx - 1$ 、余りが R であった。このとき、定数 a, b の値と R を求めなさい。ただし、 R は x の整式または定数であるとする。

(2) x の整式 $x^3 - x^2 + ax + b$ が整式 $x^2 + x + 1$ で割り切れて、商が x の整式 Q であるという。このとき、定数 a, b の値と Q を求めなさい。

例題5 次の等式が x, y についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めなさい。

$$x^2 + xy - 12y^2 - 3x + 23y + a = (x - 3y + b)(x + 4y + c)$$

練習5 次の等式が x, y についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めなさい。

$$6x^2 + 17xy + 12y^2 - 11x - 17y - 7 = (ax + 3y + b)(cx + 4y - 7)$$

例題6 $x + y - z = 0, 2x - 2y + z + 1 = 0$ を満たす x, y, z のすべての値に対して、 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ が成り立つという。

(1) y, z を x の式で表しなさい。

(2) 定数 a, b, c の値を定めなさい。

練習6 x, y, z に対して、 $x - 2y + z = 4$ および $2x + y - 3z = -7$ を満たすとき、 $ax^2 + 2by^2 + 3cz^2 = 18$ が成立する。このとき、定数 a, b, c の値を求めなさい。

○ 等式の証明

ここでは2式A, Bが等しいこと、つまり、 $A = B$ が恒等式であることを示します。
この証明法をいくつか紹介しておきましょう。

例1 $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$ を証明しなさい。

証明① 『(左辺) = ... = ... = (右辺)』型証明法

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2 \\ &= c^2(a^2 - b^2) - d^2(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (\text{左辺}) \end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

証明② 『(左辺) = ... = A, (右辺) = ... = A』型証明法

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2 \\ (\text{右辺}) &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2 \end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

証明③ 『(左辺) - (右辺) = 0』型証明法

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - (ac + bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2abcd - b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、等式は成り立つ。

だいたいこの3つのパターンで証明をします。問題に応じてやりやすいものを選びましょう。

例1の証明を以下のように書いたら誤りです。何が違うか分かりますか？

解答

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) &= (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) \\ \Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2 \end{aligned}$$

よって、成立する。



例題7 次の等式を証明しなさい。

$$(1) \quad a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$(2) \quad (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a + b + c)^2 - 6(ab + bc + ca)$$

練習7 次の等式を証明しなさい。

$$(1) \quad (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32) = x^6 - 64$$

$$(2) \quad (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$$

例題8 $a + b + c = 0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$(1) \quad a^2 + 2b^2 - c^2 + 3ab + bc = 0$$

$$(2) \quad a^3 + b^3 + c^3 = -3(a + b)(b + c)(c + a)$$

練習8 $a + b + c = 0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$\frac{a^2}{(a + b)(a + c)} + \frac{b^2}{(b + c)(b + a)} + \frac{c^2}{(c + a)(c + b)} = 3$$

例題9(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、等式 $\frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} = \frac{ab + cd}{ab - cd}$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ のとき、等式 $\frac{a + c}{b + d} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$ が成り立つことを証明しなさい。

練習9(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、等式 $ab(c^2 + d^2) = cd(a^2 + b^2)$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ のとき、等式 $\frac{a}{b} = \frac{pa + qc}{pb + qd} = \frac{pa + qc + re}{pb + qd + rf}$ が成り立つことを証明しなさい。

例題10(1) $\frac{x + y}{5} = \frac{y + z}{6} = \frac{z + x}{7} (\neq 0)$ のとき、 $\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$ の値を求めなさい。

(2) $\frac{b + c}{a} = \frac{c + a}{b} = \frac{a + b}{c}$ のとき、この式の値を求めなさい。

練習10(1) $\frac{x + y}{6} = \frac{y + z}{7} = \frac{z + x}{8} (\neq 0)$ のとき、 $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xz + yz - y^2}$ の値を求めなさい。

(2) $\frac{a + 1}{b + c + 2} = \frac{b + 1}{c + a + 2} = \frac{c + 1}{a + b + 2}$ のとき、この式の値を求めなさい。

例題11 a, b, c は実数とする。

- (1) $abc = 1, a + b + c = ab + bc + ca$ のとき, a, b, c のうち少なくとも1つは1であることを証明しなさい。
(2) $a + b + c = ab + bc + ca = 3$ のとき, a, b, c は全て1であることを証明しなさい。

練習11 a, b, c, d は実数とする。

- (1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ のとき, a, b, c のうち, どれか2つの和は0であることを証明しなさい。
(2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d = 4$ のとき, $a = b = c = d = 1$ であることを証明しなさい。

§2 不等式

ここでは不等式を扱っていくが、まずはその性質を確認しておきましょう。

不等式の性質①

- ① $a > b, b > c \Rightarrow a > c$
- ② $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$
- ③ $c > 0$ のとき, $a > b \Rightarrow ac > bc$
 $c < 0$ のとき, $a > b \Rightarrow ac < bc$

$-1 < a < 2, 2 < b < 3$ のとき, ①, ②, ③ 式のとり得る値の範囲で, 正しいものはどれですか? 誤っているものは正しい範囲に訂正しなさい。

- ① $a + b$ ② $a - b$ ③ ab

- ① $-1 + 2 < a + b < 2 + 3 \Leftrightarrow 1 < a + b < 5$
- ② $-1 - 2 < a - b < 2 - 3 \Leftrightarrow -3 < a - b < -1$
- ③ $-1 \times 2 < ab < 2 \times 3 \Leftrightarrow -2 < ab < 6$



○ 絶対不等式

文字の値に関わらず, 常に成り立つ不等式を**絶対不等式**といいます。つまり,

$$x^2 \geq 0 \quad (\text{等号は } x = 0 \text{ のとき})$$

$$a^2 + b^2 \geq 0 \quad (\text{等号は } a = 0, b = 0 \text{ のとき})$$

などは, 絶対不等式です。

例 2 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ を証明しなさい。

不等式の証明は, 与えられた不等式が**絶対不等式**であることを示します。

証明① $((\text{左辺}) - (\text{右辺})) \geq 0$ であることを示す

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\ &= a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\ &= b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy \\ &= (bx - ay)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

等号は $bx = ay$ のとき成立。

以上より, $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ が成り立つ。

証明②(こんな方法もあります)

$(at - x)^2 + (bt - y)^2 \geq 0$ は任意の t において成り立つ。

展開して、 $(a^2 + b^2)t^2 - 2(ax + by)t + x^2 + y^2 \geq 0$

これが、任意の t において成り立つので、

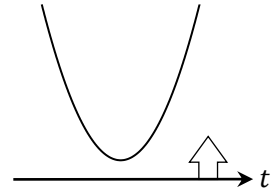
$(a^2 + b^2)t^2 - 2(ax + by)t + x^2 + y^2 = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D/4 \leq 0 &\Leftrightarrow (ax + by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \end{aligned}$$

等号は $at - x = 0$, $bt - y = 0$ を同時に満たす t が存在することなので、

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow bx = ay$$

$$y = (a^2 + b^2)t^2 - 2(ax + by)t + x^2 + y^2$$



これは**コーシー・シュワルツの不等式**という有名な絶対不等式ですので、覚えておきましょう。

例題12 次のことを証明しなさい。

(1) $a > b > 0$, $c > d > 0$ のとき, $ac > bd$

(2) $a > b > 0$ のとき, $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$

(3) $a > 1$, $b > 2$ のとき, $ab + 2 > 2a + b$

練習12 次のことを証明しなさい。

(1) $a \geq b$, $x \geq y$ のとき, $(a + 2b)(x + 2y) \leq 3(ax + 2by)$

(2) $2a > b > 0$ のとき, $\frac{b}{a} < \frac{b+2}{a+1}$

(3) $x \geq y \geq z$ のとき, $xy + yz \geq zx + y^2$

例題13 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときですか。

(1) $x^2 - 6xy + 10y^2 \geq 4y - 4$

(2) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

練習13 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときですか。

(1) $a^2 + ab + b^2 \geq a - b - 1$

(2) $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

不等式には次のような性質もある。

不等式の性質②

$$\textcircled{4} \quad a > 0, b > 0 \text{ のとき, } a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$$

この性質を使った不等式の証明法を紹介しておきましょう。

例3 $a \geq 0, b \geq 0$ のとき, $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ を証明しなさい。

証明

$$\begin{aligned} (\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4} \\ &= \frac{2a+2b-a-b-2\sqrt{ab}}{4} \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{4} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

よって, $\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} \right)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \right)^2$

$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq 0, \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \geq 0$ より, $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

等号は $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ のとき, つまり, $a=b$ のとき成り立つ。

ここがポイント!
これを言わないと証明不備です。



例題14 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。また, 等号が成り立つのはどのようなときですか。

(1) $a \geq 0, b \geq 0$ のとき, $5\sqrt{a}+3\sqrt{b} \geq \sqrt{25a+9b}$

(2) $a \geq 0, b \geq 0$ のとき, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$

練習14 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。また, 等号が成り立つのはどのようなときですか。

(1) $a \geq 0, b \geq 0$ のとき, $7\sqrt{a}+2\sqrt{b} \geq \sqrt{49a+4b}$

(2) $a \geq b \geq 0$ のとき, $\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a}-\sqrt{b}$

例題15 次の不等式を証明しなさい。

$$(1) \quad |a+b| \leq |a|+|b| \qquad (2) \quad |a|-|b| \leq |a-b| \qquad (3) \quad |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$$

練習15 (1) 不等式 $\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{x^2+y^2+1} \geq |ax+by+1|$ を証明しなさい。

(2) 不等式 $|a+b| \leq |a|+|b|$ を利用して、次の不等式を証明しなさい。

$$(\text{ア}) \quad |a-b| \leq |a|+|b| \qquad (2) \quad |a|-|b| \leq |a-b|$$

例題16 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$(1) \quad a \geq b, \ x \geq y \text{ のとき, } (a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$$

$$(2) \quad a \geq b \geq c, \ x \geq y \geq z \text{ のとき, } (a+b+c)(x+y+z) \leq 3(ax+by+cz)$$

練習16 (1) 次の不等式を証明しなさい。

$$(\text{ア}) \quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \qquad (\text{イ}) \quad a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$$

(2) 次の不等式が成り立つことを証明しなさい。

$$(\text{ア}) \quad x \geq 0, \ y \geq 0 \text{ のとき, } \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \geq \frac{x+y}{1+x+y}$$

$$(\text{イ}) \quad x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \text{ のとき, } \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq \frac{x+y+z}{1+x+y+z}$$

§ 3 相加平均・相乗平均

2数 a, b に対して, $\frac{a+b}{2}$ を**相加平均**, また, $a > 0, b > 0$ のとき, $\sqrt{ab}$ を**相乗平均**という。

この相加平均, 相乗平均に関して以下の関係式が成り立つ。

◆ 相加平均・相乗平均の関係 ◆

$a > 0, b > 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号成立は $a = b$ のときである。

証明①

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

よって, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

等号は $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ のとき, つまり $a=b$ のとき成立する。

証明②(図形的に考える)

中心 O , AD を直径とする半円を考え, 図のように点 B, C, H をとる。

$AH = a, DH = b$ とすると, BO は円の半径なので,

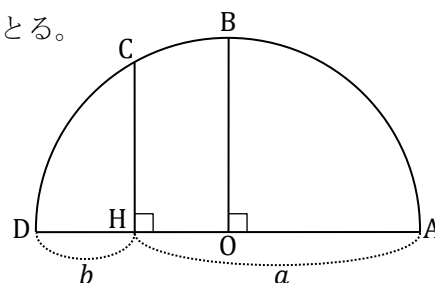
$$BO = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned} CH^2 &= OC^2 - OH^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 \\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab \end{aligned}$$

$CH > 0$ より, $CH = \sqrt{ab}$

$$\text{図より, } BO \geq CH \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号は, $BO = CH \Leftrightarrow a = b$ のとき成立。



例 4 $x > 0$ のとき、 $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ の最小値を求めなさい。

解答

$$y = \frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1} = \underbrace{x + 1}_{\text{ここがポイント!}} + \underbrace{\frac{2}{x + 1}}_{\text{2つの項をかけて定数になるように変形します。}} - 2 \quad \dots (*)$$

$x + 1 > 0$, $\frac{2}{x + 1} > 0$ より、相加・相乗平均の関係から

$$(*) \geq 2 \sqrt{(x + 1) \cdot \frac{2}{x + 1}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

等号成立は、 $x + 1 = \frac{2}{x + 1}$ のとき成立。

つまり $x > 0$ より、 $x = \sqrt{2} - 1$ のとき成立。

以上より、 $x = \sqrt{2} - 1$ のとき最小値 $2\sqrt{2} - 2$

ここがポイント!
2つの項をかけて定数になるように変形します。

$y = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ ($x > 0$) の最小値を求めなさい。

解答

$2x + 1 > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ より、相加・相乗平均の関係から

$$2x + 1 + \frac{1}{x} \geq 2 \sqrt{(2x + 1) \cdot \frac{1}{x}} = 2 \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$$

等号成立は $2x + 1 = \frac{1}{x}$ のとき

$$\text{両辺 } x \text{ 倍して, } 2x^2 + x = 1 \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \frac{1}{2}$$

よって、最小値は $2\sqrt{2 + 2} = 4$

この解答は誤りです。何が間違いか分かりますか?



例題17 a, b は正の数とする。次の不等式が成り立つことを証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときですか。

$$(1) \quad a + \frac{4}{a} \geq 4$$

$$(2) \quad \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$$

練習17 a, b は正の数とする。次の不等式が成り立つことを証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときですか。

$$(1) \quad a + 2 + \frac{9}{a+2} \geq 6$$

$$(2) \quad \left(a + \frac{2}{b}\right)\left(b + \frac{8}{a}\right) \geq 18$$

例題18 (1) $x > 0$ のとき、 $x + \frac{16}{x+2}$ の最小値を求めなさい。

(2) $x > 0, y > 0$ とする。 $(3x + 2y)\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{y}\right)$ の最小値を求めなさい。

練習18 (1) $a > 0$ のとき、 $a - 2 + \frac{2}{a+1}$ の最小値を求めなさい。

(2) $a > 0, b > 0$ のとき、 $(2a + 3b)\left(\frac{8}{a} + \frac{3}{b}\right)$ の最小値を求めなさい。

例題19 $a > 0, b > 0, a \neq b$ のとき、次の数の大小を比較しなさい。

$$\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}, \frac{2ab}{a+b}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

練習19 (1) $0 < a < b, a + b = 1$ のとき、 $\frac{1}{2}, a, b, 2ab, a^2 + b^2$ の大小を比較しなさい。

(2) $0 < a < b < c < d$ のとき、 $\frac{a}{d}, \frac{c}{b}, \frac{ac}{bd}, \frac{a+c}{b+d}$ の大小を比較しなさい。

MEMO