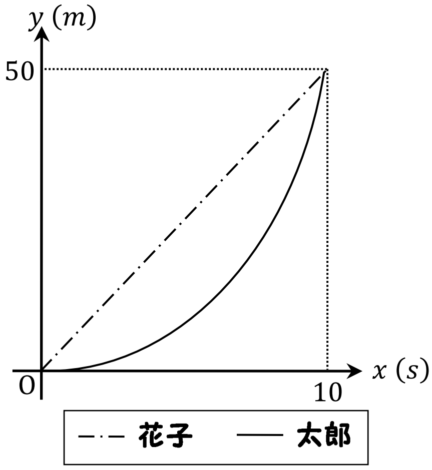
微　分(数学Ⅱ)

§0　50m 走

ある日，太郎君と花子さんが 50 m 走をしました。大接戦の末，結局 2 人は同時にゴールし，タイムは 10 秒ちょうどでした。

2 人の走りを見ることができなかった皆さんに，少しでも身近に感じてもらおうということで，その様子をグラフにしてみました。

横軸が時間，縦軸が距離を表しています。



○　太郎君の走りは…

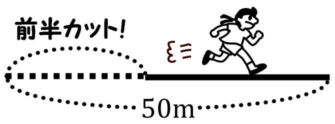
50m のタイムだけを見ると 2 人とも平均して毎秒 5 m の速さで進むことが分かり，実力差はありません。しかし，太郎君の後半の追い上げは驚異的で，**後半になればなるほどスピードが伸びてくる**のです。

では，この『**平均の速さでは分からない,太郎君のすごさ**』を実感するためにはいったいどうしたらよいでしょうか？

単純に考えると，後半にかけてスピードが上がるということは，スタートダッシュが悪いわけですから，例えば

前半の 10m をカットして,残り 40m を計測

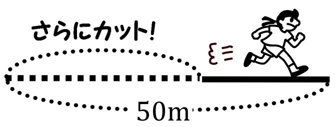
すればよいわけです。これにより 2 人の秒速には明らかな差が出てくるはずです。



さらに，太郎君の追い上げのすごさを知りたい場合は

前半の 20m をカットして,残り 30m を計測

すればよいでしょう。



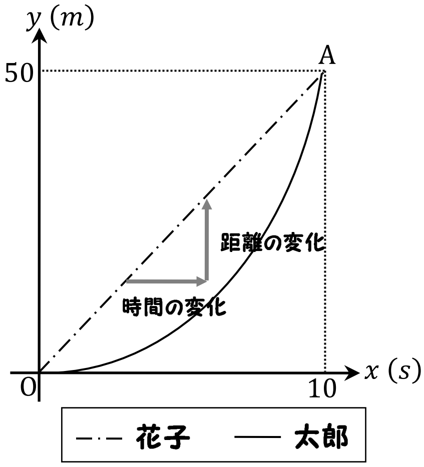
さらに，**「もっと,もっと,太郎君の追い込みはすごいはずだ!!」**というのであれば，30m，40m，45m，49m …，とカットする幅を増やしていき，残りの距離を計測していけばいいのです。

そして，最終的にはカットする幅を限りなく 50m に近づけたときの速さ，つまり，計測する距離を**限りなく 0 に近づけたときの速さ**を計測するのが一番よいということになります。

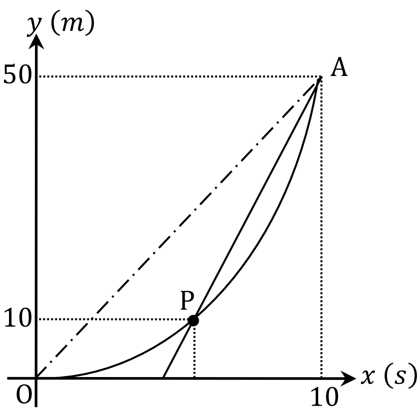
それでは，今のことを図にして考えてみましょう。
まず，右図の「時間と距離の関係を表すグラフ」において，

$$\left(\text{速さ}\right)=\frac{\left(\text{距離の変化量}\right)}{\left(\text{時間の変化量}\right)}=\frac{\left(y\text{ の変化量}\right)}{\left(x\text{ の変化量}\right)}$$

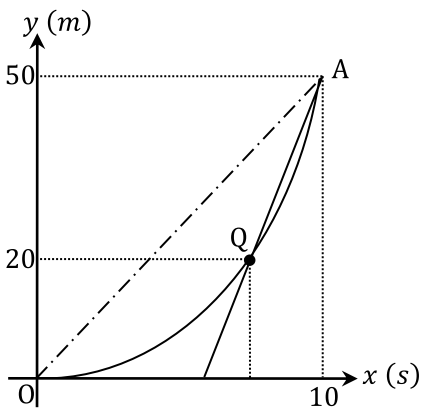
ですから，**「速さ」は「直線の傾き」**で表すことができます。
つまり，花子さんの速度は右図の直線 OA の傾きとなるわけです。
そしてこれは，太郎君の平均の速さも表しています。
では直線の傾きに注目して，**『平均の速さでは分からない，太郎君のすごさ』**を見ていきましょう。



まず，前半の 10m をカットしたものが《図 1》です。このとき，残り 40m の平均の速さは直線 AP の傾きとなります。同様に，前半の 20m をカットしたものが《図 2》となり，このとき，残り 30m の平均の速さは直線 AQ の傾きとなります。



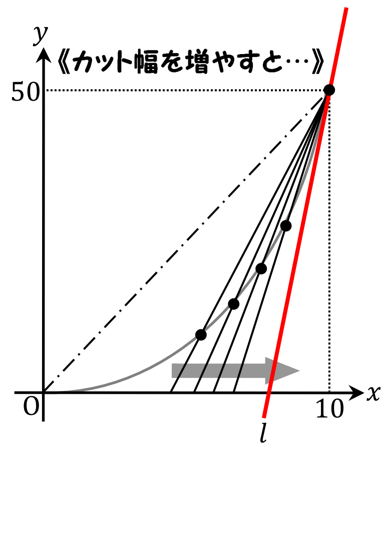
《図1:前半 10m カット》



《図 2:前半 20m カット》

いかがでしょうか？ 上の 2 つを比べると，カットする幅を大きくすればするほど直線の傾きが急になっていますね。つまり平均の速さが増していることが分かります。
このまま，カットの幅をさらに増やしていくと右図のように直線が動きます。

そして最終的には，計測距離を限りなく 0 に近づけたときの速さこそが「太郎君の実力を最もよく表している速さ」となるわけです。
つまりこれは，ゴールした**瞬間の速さ**で，右図でいうと，
直線 l の傾きのことです。



ちなみに，直線 l は曲線における**接線**になっています。
分かりますか？

§1　極限値

これから本格的に微分の学習に入っていくが，その前に少し準備をしておこう。

x が a に近づくとき，$f(x)$ が一定の値 b に限りなく近づくならば

$\lim_{x \to a} f(x) = b$　　　または　　　$x \to a$ のとき $f(x) \to b$

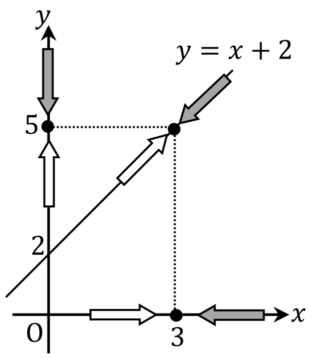
と表し，b を x が a に近づいたときの $f(x)$ の**極限値**という。

例 1　極限値 $\lim_{x \to 3}(x+2)$ を求めなさい。

「x を 3 に近づけると $x+2$ はどのような値に近づきますか？」と言い換えることができます。

グラフより，
x を 3 に近づけると $x+2$ は 5 に近づいていることが分かる。

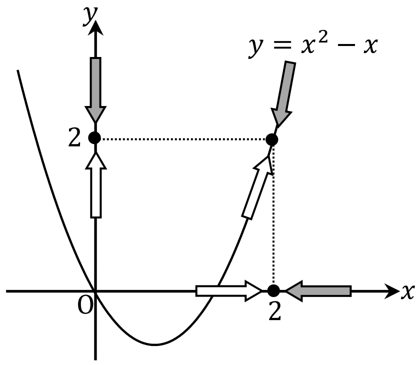
よって，$\lim_{x \to 3}(x+2) = 5$



例 2　極限値 $\lim_{x \to 2}(x^2 - x)$ を求めなさい。

グラフより，
x を 2 に近づけると $x^2 - x$ は 2 に近づいていることが分かる。

よって，$\lim_{x \to 2}(x^2 - x) = 2$



2 つの例からどうやら $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ つまり極限値は $x = a$ を代入することによって求まりそうです。

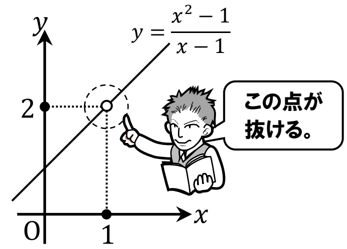
それでは次の例を見てみましょう。

例 3　極限値 $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ を求めなさい。

この問題の場合 $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ に $x=1$ を代入すると $\dfrac{0}{0}$ になってしまい，値が求まりません。

そこで，まずは $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\cdots(*)$ のグラフをかいてみます。式変形をすると，

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

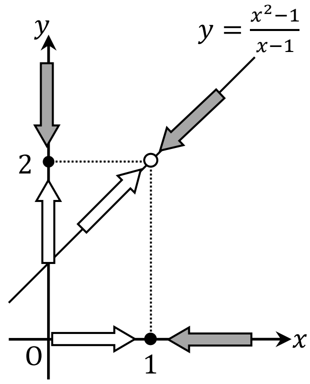


これより，直線 $y=x+1$ をかけばよさそうです。
ここで，注意しなくてはならないのは，元の式の分母には
$x-1$ があるので，$(*)$ の定義域は $x\neq1$ となるということです。
つまり，グラフは直線 $y=x+1$ から点 $(1,\ 2)$ を抜いたものになります。

グラフより，

x を 1 に近づけると $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は 2 に近づいていることが分かる。

よって　$\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$



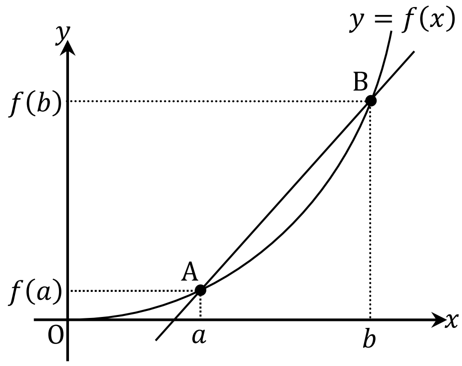
実際の計算は，分子，分母にある $x-1$ を約分して，$x+1$ に $x=1$ を代入するとよいでしょう。

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

以上のように，極限値は値が存在しなくても，**近づく値さえあれば求まる**のです。

§2　微分係数

ここでは§0の内容をもとに，曲線 $y=f(x)$ の点Aにおける接線の傾きを求めよう。

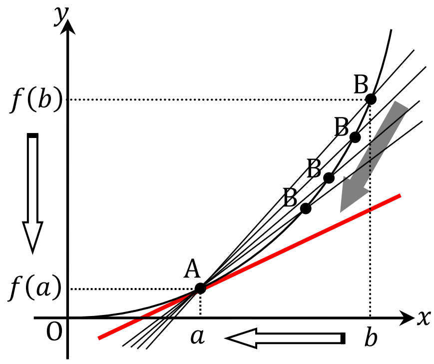


まず，直線ABの傾きを求める。

これは，2点 $\mathrm{A}\big(a,\ f(a)\big)$，$\mathrm{B}\big(b,\ f(b)\big)$ を通る直線の傾きなので

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\cdots(*)$$

となる。この傾きのことをここでは**平均変化率**という。



ここで，点Bを点Aに近づけると，直線ABは点Aにおける接線になる。つまり，$(*)$ 式において b を a に近づけると，$(*)$ の極限値が「接線の傾き」となる。

ここでのポイントは，「点Bは点Aに近づく」のであって，「点Bは点Aに重なる」わけではないということである。

もし，重なってしまったら，1点しか通らなくなってしまうので，直線ABを定めることができない。

ここで登場するのが§1で学んだ極限である。$\displaystyle\lim_{b\to a}$ を使って b を a に限りなく近づける。

この記号を使うと $y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きは

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\cdots(**)$$

と表すことができる。これを $y=f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**といい，$f'(a)$ と表す。

また，$(**)$ 式は次のように表すこともできる。

$b=a+h$ とおくと，

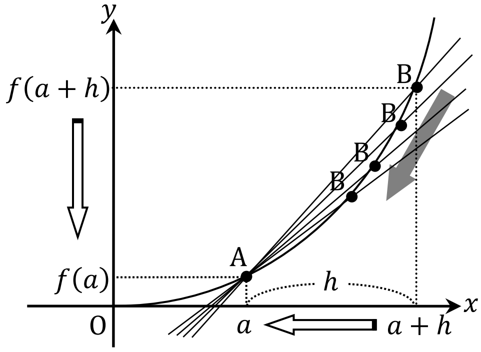
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

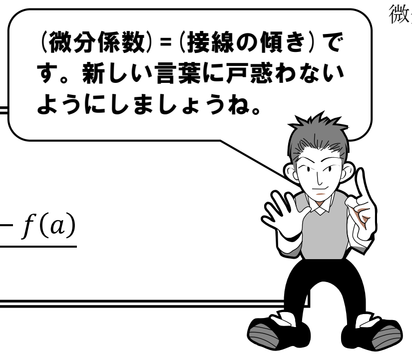
さらに，$b\to a$ のとき，$a+h\to a$ つまり $h\to 0$

となるので，a における接線の傾きは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と表すこともできる。





微分係数

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾き $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

例 4　$y=x^2-2x+3$ の$(-1,\ 6)$ における接線の方程式を求めなさい。

まずは以前に学んだ方法で求めてみましょう。放物線の接線なので判別式を利用します。

解①

求める接線の傾きを m とすると，接線の方程式は

$$y=m(x+1)+6=mx+m+6$$

これが $y=x^2-2x+3$ と接するので

$$x^2-2x+3=mx+m+6 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-(m+2)x-m-3=0$$

この方程式の判別式を D とすると，

$$D=0 \quad\Leftrightarrow\quad (m+2)^2-4(-m-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad m^2+8m+16=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (m+4)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad m=-4$$

よって，接線の方程式は，$y=-4x+2$

次に微分係数の定義を用いて接線の傾きを求めてみます。

解②

$f(x)=x^2-2x+3$ とおくと，$x=-1$ における接線の傾きは，

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-2(-1+h)+3\ -6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-4h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(h-4)=-4$$

よって，求める接線は傾き -4 で点 $(-1,\ 6)$ を通るので，

$$y=-4(x+1)+6=-4x+2$$

解①は判別式を用いているので，2 次関数でしか使えない方法です。

それに対し解②は，どの関数でもこの解法でとけます。その意味でかなり強力な方法なのです。

§3　導関数

$f(x)=2x^2-x$ とすると，微分係数の定義から

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)^2-(a+h)-2a^2+a}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4ah+h^2-h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4a+h-1)=4a-1$$

となる。これを求めておくと，

$y=f(x)$ の $x=1$ における接線の傾き　$f'(1)=4\cdot 1-1=3$

$y=f(x)$ の $x=2$ における接線の傾き　$f'(2)=4\cdot 2-1=7$

というように，$y=f(x)$ 上のどの点における接線の傾きもすぐに求まる。

このように，$f'(a)$ は a の値を 1 つ定めると，それに対して 1 つだけ接線の傾きが求まるので，$f'(a)$ は a についての関数といえる。

この関数をもとの関数 $f(x)$ の**導関数**という。

独立変数は普通 x を用いるので，導関数の定義は次のようになる。

導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

x の関数 $f(x)$ から $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を x で**微分する**という。

$y=f(x)$ の導関数を表す記号は $f'(x)$ のほかに，y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などの記号も使う。

例 5　関数 $f(x)=x^3-3x^2$ を微分しなさい。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-3(x+h)^2-(x^3-3x^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-3(x^2+2hx+h^2)-(x^3-3x^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3hx^2+3h^2x+h^3-3(2hx+h^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{3x^2+3hx+h^2-3(2x+h)\}$$

$$=3x^2-6x$$

○　微分公式

ここでは微分をより便利に感じるための公式を紹介しておきましょう。

①　$y=f(x)+g(x)$ の微分

$$\{f(x)+g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

よって，$\boxed{\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)}$

同様に　$\boxed{\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)}$　も成立している。

②　$y=kf(x)$ の微分

$$\{kf(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{k\times\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\quad =kf'(x)$$

よって，$\boxed{\{kf(x)\}'=kf'(x)}$

③　$y=x^n$（n：0 以上の整数）の微分

（ⅰ）$n\geqq 1$ のとき

$$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

二項定理
$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^nb^0+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\ \cdots\ +{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_na^0b^n$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\ \cdots\ +{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+h^n)-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\ \cdots\ +{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+h^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}({}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h+\ \cdots\ +{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-2}+h^{n-1})$$

$$=nx^{n-1}$$

（ⅱ）$n=0$ のとき

$$(x^0)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^0-x^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0(=0\cdot x^{0-1})$$

以上より，$\boxed{(x^n)'=nx^{n-1}}$

④ $y=(ax+b)^n$ (n : 0 以上の整数)の微分

$$\{(ax+b)^n\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\{a(x+h)+b\}^n-(ax+b)^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(ax+b+ah)^n-(ax+b)^n}{h}$$

$$=a\times\lim_{h\to 0}\frac{(ax+b+ah)^n-(ax+b)^n}{ah}\quad\cdots(*)$$

ここで，$ax+b=X$，$ah=t$ とおくと，

$$(*)=a\times\lim_{h\to 0}\frac{(X+t)^n-X^n}{t}=anX^{n-1}=an(ax+b)^{n-1}$$

よって，$\boxed{\{(ax+b)^n\}'=an(ax+b)^{n-1}}$

⑤ 積の微分（発展）

$$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

よって，$\boxed{\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

さらに，この結果を使うと 3 つの積の場合も公式を作ることができます。

$$\{f(x)g(x)h(x)\}'=f'(x)\{g(x)h(x)\}+f(x)\{g(x)h(x)\}'$$

$$=f'(x)\,g(x)h(x)+f(x)\{g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\}$$

$$=f'(x)\,g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

よって，$\boxed{\{f(x)g(x)h(x)\}'=f'(x)\,g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)}$

例 6　次の関数の導関数を求めなさい。

(1)　$y=x^3-3x^2+x+2$　　(2)　$y=(2x+1)^3$　　(3)　$y=(2x^3+1)(x^2-3)$

(1)　$y'=(x^3)'-(3x^2)'+(x)'+(2)'=3x^2-6x+1$

(2)　$y'=2\cdot 3(2x+1)^2=6(2x+1)^2$

(3)　$y'=(2x^3+1)'(x^2-3)+(2x^3+1)(x^2-3)'$

$\quad=6x^2\cdot(x^2-3)+(2x^3+1)\cdot 2x=10x^4-18x^2+2x$

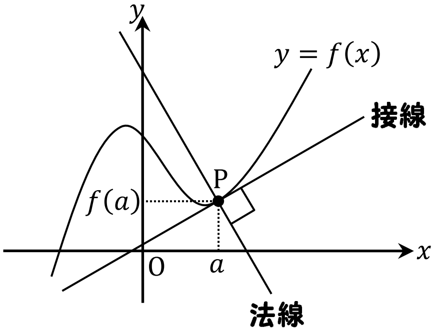
(2)，(3)はともに，公式を用いると展開する手間が省けるので便利である。

しっかりと練習をして，使えるようにしておこう。

§4　接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\big(a,\ f(a)\big)$ における
接線の傾きは $f'(a)$ となるので，接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$



また，曲線 $y=f(x)$ 上の点 P を通り，点 P における
接線に垂直な直線を点 P における**法線**という。

法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ となるので，法線の方程式は，$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

例 7　$y=x^2-2x+3$ の $(-1,\ 6)$ における接線と法線の方程式を求めなさい。

例 4 の解答と比べてみてください。微分の公式の便利さが実感できるはずです。

$y'=2x-2$ より接線の傾きは，$2\cdot(-1)-2=-4$
よって，接線の方程式は，$y=-4(x+1)+6=-4x+2$
また，法線の方程式は，$y=\dfrac{1}{4}(x+1)+6=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{25}{4}$

例 8　$y=x^2-2x+3$ の $(-1,\ 2)$ から引いた接線の方程式を求めなさい。

例 6 は接点の座標が与えられているので，簡単に求まりますが，この問題は，$(-1,\ 2)$ から引いた
接線なので，接点が分かりません。そこで，まず接点の座標を文字で置くところから始めます。

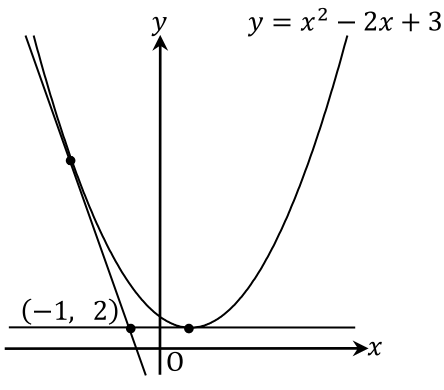
接点を $(t,\ t^2-2t+3)$ とおく。
$y'=2x-2$ より，接線の方程式は，

$$\begin{aligned} y&=(2t-2)(x-t)+t^2-2t+3 \\ &=(2t-2)x-t^2+3 \end{aligned}$$

これが，$(-1,\ 2)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 2=-2t+2-t^2+3 \quad &\Leftrightarrow \quad t^2+2t-3=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (t-1)(t+3)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad t=-3,\ 1 \end{aligned}$$

よって，接線の方程式は，$y=-8x-6$，$y=2$



§5　関数の増減と極値

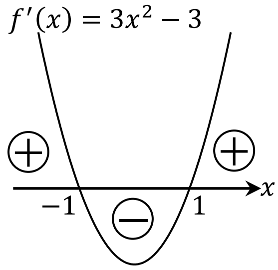
　微分を用いることで，接線の傾きを簡単に求めることができるようになった。実は，この接線を利用することで，グラフの概形を調べることができる。

それでは具体的に 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x$ のグラフを，微分を用いて調べてみよう。

まず，関数 $f(x)$ を微分する。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

ここで，$y = f'(x)$ のグラフをかいてみると右図のようになるが，ここから次のようなことが分かる。



$x < -1$，$x > 1$ のとき，$f'(x) > 0$

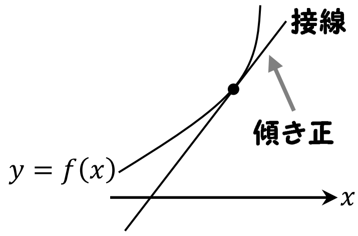
$x = -1$，$x = 1$ のとき，$f'(x) = 0$

$-1 < x < 1$ のとき，$f'(x) < 0$

$f'(x)$ は接線の傾きを表しているので，$f'(x)$ の符号を調べることで次のことが分かる。

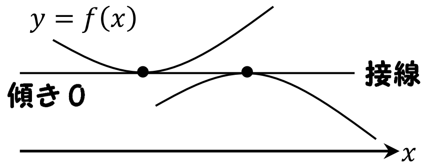
（ⅰ）　$x < -1$，$x > 1$ のとき

　このとき，$f'(x) > 0$ なので，この区間において，$y = f(x)$ の接線の傾きは正となる。つまり，これに接している $y = f(x)$ は**単調増加**となる。



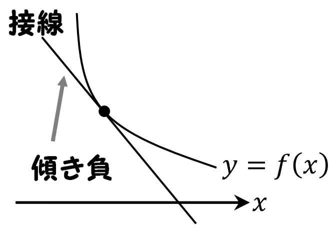
（ⅱ）　$x = \pm 1$ のとき

　このとき，$f'(x) = 0$ なので，接線の傾きも 0 となる。つまり，これに接している $y = f(x)$ はその瞬間，**平らになる。**

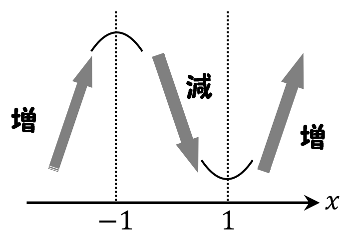


（ⅲ）　$-1 < x < 1$ のとき

　このとき，$f'(x) < 0$ なので，この区間において，$y = f(x)$ の接線の傾きは負となる。つまり，これに接している $y = f(x)$ は**単調減少**となる。

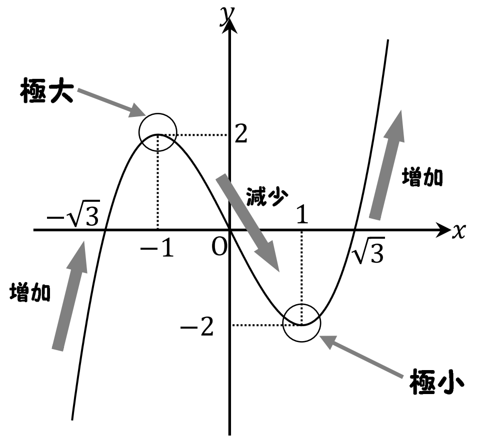


以上より，$y = f(x)$ の増減の関係は，右図のようになっていることが分かる。



では，これを用いてグラフをかいてみましょう。

$y=x^3-3x$ のグラフは $x=-1$ を境に**増加から減少**に変わり，$x=1$ を境に**減少から増加**に変わる。このとき，$y=f(x)$ は $x=-1$ で**極大**，$x=1$ で**極小**になるという。また，そのときの y の値をそれぞれ**極大値**，**極小値**といい，2 つを合わせて**極値**という。



それではいくつか例を見ていきましょう。

例 9　$f(x)=2x^3-6x^2+3$ のグラフをかき，極値を求めなさい。

グラフのかくためには $f'(x)$ の変化を調べる必要があります。
その変化の様子は，**増減表**と呼ばれる表を用いることで分かりやすくなります。

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

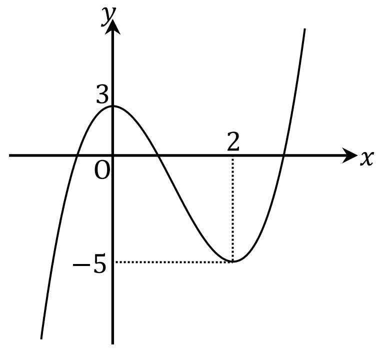
$f'(x)=0 \iff x=0,\ 2$

これより，増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-5	↗

増減表よりグラフは右図のようになる。

$x=0$ のとき極大値 3　　　$x=2$ のとき極小値 -5



増減表をかく手順をまとめると以下のようになる。

増減表のかき方

① 1 段目に $f'(x)=0$ となる点を記入する。
② 2 段目に $f'(x)$ の符号を記入する。正なら $+$，負なら $-$，①で記入した値の下には 0 を記入。
③ 3 段目には増減の様子を矢印で記入する。$f'(x)$ が $+$ なら↗，$-$ なら↘。
さらに $f'(x)=0$ となる点にはそのときの y の値を記入する。

あとはこの表をもとに，グラフをかけばよい。
3 段目を見て，↗ の矢印がかかれている部分は単調増加，↘ の矢印がかかれている部分は単調減少となる。

例 10 $f(x)=x^3$ のグラフをかきなさい。

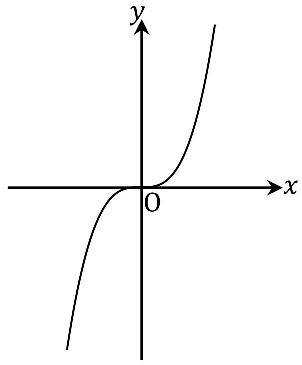
$f'(x)=3x^2$

$f'(x)=0 \iff x=0$

これより，増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

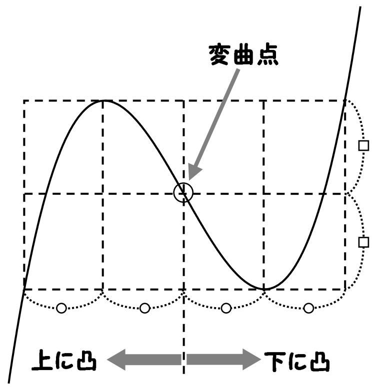
増減表よりグラフは右図のようになる。



極値とは増加から減少，減少から増加に変化したときの境目の値のことです。
このグラフの場合，常に増加し続ける(単調増加)ので極値を持ちません。

○ 3 次関数のグラフの特徴

3 次関数のグラフは右のような点線の枠に収まるという特徴がある。
また，3 次関数のグラフは上に凸の部分と下に凸部分に分かれており，この境目となる点を**変曲点**という。右図を見ても分かる通り，変曲点は極大と極小の中点となっている。
さらに，3 次関数は**変曲点に関して対称**である。



例 11 $f(x)=x^3+3x^2-9x-5$ とする。曲線 $y=f(x)$ は，変曲点に関して対称であることを示しなさい。

奇関数の性質を用いて証明していきます。

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0 \iff x=-3,\ 1$

これより，増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	22	↘	-10	↗

よって，極大となる点は $(-3,\ 22)$，極小となる点は $(1,\ -10)$ となる。

変曲点はその中点となるので，$(-1,\ 6)$。

ここで，$y=f(x)$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -6 平行移動すると，

$$y+6=f(x-1) \iff y+6=(x-1)^3+3(x-1)^2-9(x-1)-5 \iff y=x^3-12x$$

$g(x)=x^3-12x$ とすると，$g(-x)=(-x)^3-12(-x)=-x^3+12x=-g(x)$

よって，$y=g(x)$ は奇関数となるので，原点 O に関して対称となる。

これより，元の関数 $y=f(x)$ は $(-1,\ 6)$ に関して対称であることが分かる。

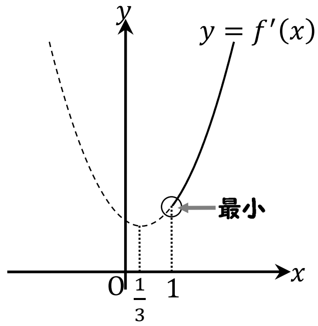
偶関数
$f(x)=f(-x)$
y 軸に関して対称

奇関数
$-f(x)=f(-x)$
原点に関して対称

例 12　関数 $f(x)=x^3-x^2+kx+2$ が $x \geqq 1$ で単調増加となるような定数 k の値の範囲を求めなさい。

『$x \geqq 1$ で単調増加』とは『$x \geqq 1$ で $f'(x) \geqq 0$』と言い換えることができます。
あとはこの条件を満たす k を考えればよいだけです。

$f'(x)=3x^2-2x+k$
$x \geqq 1$ で $f'(x) \geqq 0$ となるには，$y=f'(x)$ の最小値が正となればよい。
$f'(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+k$ より，$x=1$ のとき，
最小値 $f'(1)=3-2+k=1+k$
よって，$f'(x) \geqq 0$ となるのは，$1+k \geqq 0 \iff k \geqq -1$



なお，本問が仮に

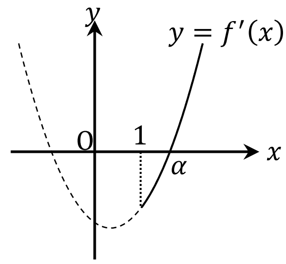
『関数 $f(x)=x^3-x^2+kx+2$ が $x \geqq 1$ で極値を持つような定数 k の値の範囲を求めなさい。』

という問題だったら，『$x \geqq 1$ において $f'(x)$ の符号が変化する』ように k の範囲を定めればよいので，

$f'(1)<0 \iff 1+k<0 \iff k<-1$

となります。

また，このときの $f'(x)=0$ の解を $x=\alpha$ とすると，α の前後で $f'(x)$ の符号が負から正に変化するので，増減表は以下のようになり，$x=\alpha$ で極小となることが分かります。



x	1	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

§6　関数の最大・最小

最大値・最小値はいままでもやってきたように，グラフをかき，与えられた区間内における最も高い位置と低い位置を見つければよい。具体的に見てみよう。

例 13　3 次関数 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ の以下の定義域における最大値，最小値を求めなさい。

(1)　$-2 \leqq x \leqq -1$　　(2)　$-2 \leqq x \leqq 1$　　(3)　$-2 \leqq x \leqq 4$

増減表は全範囲をかくのではなく，問題で与えられた定義域のみをかけば十分です。

$y'=x^2-2x=x(x-2)$ より，(1)～(3)の増減表は次のようになる。

(1)

x	-2	$\cdots$	-1
y'		$+$	
y	$-\frac{14}{3}$	↗	$\frac{2}{3}$

最大値　$\frac{2}{3}$ $(x=-1)$

最小値　$-\frac{14}{3}$ $(x=-2)$

(2)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{14}{3}$	↗	2	↘	$\frac{4}{3}$

最大値　2 $(x=0)$

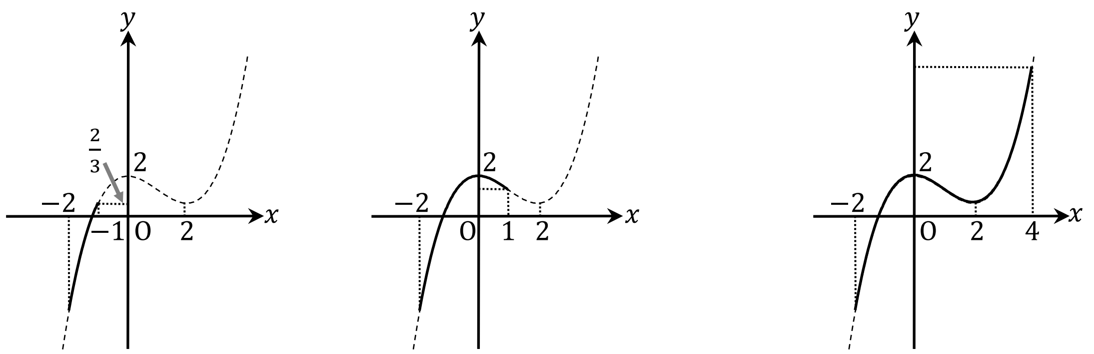
最小値　$-\frac{14}{3}$ $(x=-2)$

(3)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\frac{14}{3}$	↗	2	↘	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{22}{3}$

最大値　$\frac{22}{3}$ $(x=4)$

最小値　$-\frac{14}{3}$ $(x=-2)$



上の例ではグラフがかいてありますが，増減表に定義域を入れることでグラフをかかなくても最大・最小の判断ができます。

一般的に，$y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ における最大値，最小値を求める際に，増減表が右のようになったとすると

最大値の候補は　$f(\alpha)$，$f(b)$

最小値の候補は　$f(a)$，$f(\beta)$

となるので，それぞれの候補を比べることで求まります。

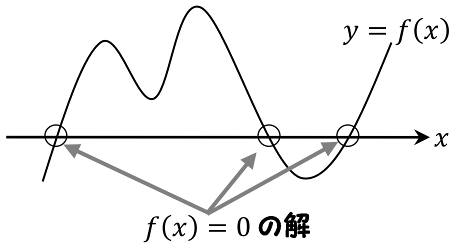
最小値の候補

x	a	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	b
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$f(a)$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗	$f(b)$

最大値の候補

§7　方程式・不等式への応用

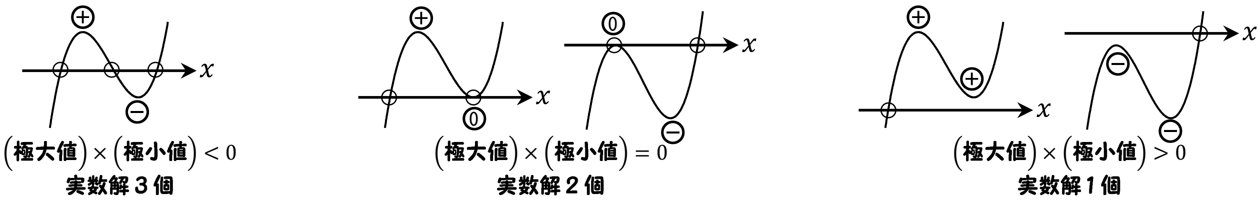
方程式，不等式の問題はグラフを用いることで，視覚的に大変わかりやすくなります。さっそく，例を見てみよう。



○　方程式

例 14　3次方程式 $x^3+3x^2-9x+a=0$ の実数解の個数を調べなさい。

3次関数と x 軸との交点の個数は，$(極大値)\times(極小値)$ の正負を考えることにより解決します。



解①

$f(x)=x^3+3x^2-9x+a$ とおき，$y=f(x)$ と x 軸との交点の個数を調べればよい。

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0 \iff x=1,\ -3$

増減表より，極大値 $a+27$ $(x=-3)$　　極小値 $a-5$ $(x=1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+27$	$\searrow$	$a-5$	$\nearrow$

実数解を3つ持つのは　$f(-3)\cdot f(1)<0 \iff (a+27)(a-5)<0 \iff -27<a<5$　のとき

実数解を2つ持つのは　$f(-3)\cdot f(1)=0 \iff (a+27)(a-5)=0 \iff a=-27,\ 5$　のとき

実数解を1つ持つのは　$f(-3)\cdot f(1)>0 \iff (a+27)(a-5)>0 \iff a<-27,\ a>5$　のとき

次に定数を分離することで解きます。

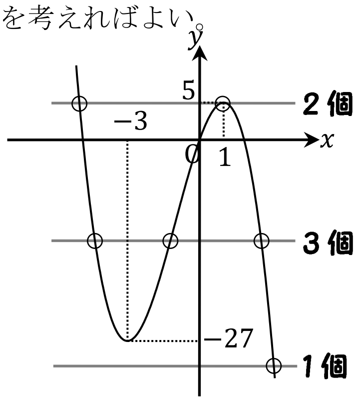
解②

$a=-x^3-3x^2+9x$ として，$y=-x^3-3x^2+9x$ と $y=a$ の交点を考えればよい。

$y'=-3x^2-6x+9=-3(x-1)(x+3)$

$y'=0 \iff x=1,\ -3$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$



増減表よりグラフは右図となる。これより，

$-27<a<5$ のとき　3個

$a=-27,\ 5$ のとき　2個

$a<-27,\ a>5$ のとき　1個

解①は3次関数の性質をうまく使った解法になりますが，3次関数以外だと使えません。
それに対して解②は，方程式の解の個数を調べる問題では広く使われる解法になります。

○ 不等式

例 15　$x \geqq 0$ のとき，$x^3 - 3a^2x + 2 \geqq 0$ が常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めなさい。
ただし，$a > 0$ とする。

$x \geqq 0$ における，$y = x^3 - 3a^2x + 2$ の最小値を考えます。
最も小さい値が 0 以上になれば，どの x に対しても常に 0 以上が成り立ちます。

解①

$f(x) = x^3 - 3a^2x + 2$ とおき，$y = f(x)$ の最小値を求める。

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2$ より，$f'(x) = 0 \iff x = \pm a$

これより，$x \geqq 0$ における増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	$-2a^3+2$	↗

よって，最小値は $-2a^3 + 2$ $(x = a)$ となるので，条件を満たすには

$$-2a^3 + 2 \geqq 0 \iff a^3 - 1 \leqq 0$$

$a > 0$ より，$0 < a \leqq 1$

この問題も**『定数分離』**を用いて解くこともできます。

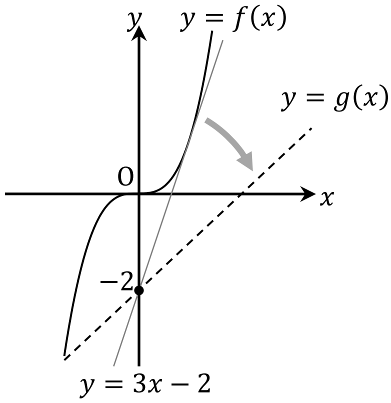
解②

$x^3 - 3a^2x + 2 \geqq 0 \iff x^3 \geqq 3a^2x - 2$

ここで，$f(x) = x^3$，$g(x) = 3a^2x - 2$ とおくと，

$x \geqq 0$ において，3 次関数 $y = f(x)$ が，直線 $y = g(x)$ の上側にあればよい。$\cdots(*)$

$f'(x) = 3x^2 \geqq 0$ より，$y = f(x)$ は単調増加となるので，グラフは下図となる。



ここで，$y = f(x)$ の $(0,\ -2)$ を通る接線を考える。

接点の x 座標を $x = t$ とすると，接線の方程式は

$$y = 3t^2(x - t) + t^3 = 3t^2x - 2t^3$$

これが，$(0,\ -2)$ を通るので，

$$-2t^3 = -2 \iff t = 1$$

よって，接線の方程式は，$y = 3x - 2$

これより，条件 $(*)$ を満たすには，直線 $y = g(x)$ の傾きが，

$3a^2 \leqq 3$ となればよいので，

$$3a^2 \leqq 3 \iff -1 \leqq a \leqq 1$$

$a > 0$ より，求める a の範囲は，$0 < a \leqq 1$

解①では最小値に注目して解いたわけですが，仮に「常に $f(x) \leqq 0$ となるような条件」を求めるのであれば，今度は『$f(x)$ の最大値』に注目して，それが 0 以下になる条件を求めます。
不等式の問題は結局，最大・最小の問題に帰着することができるわけです。

MEMO