複素数と方程式

私たちは頭の中に$\sqrt{-1}$を思い浮かべた。
ルート 100 は 10，ルート 16 は 4，ルート 1 は 1 だから，ルートマイナス 1 は…。
博士は決して急かさなかった。じっと考え続ける私と息子の顔を見つめるのを，何よりも愛した。
「そんな数はないんじゃないでしょうか」
慎重に私は口を開いた。
「いいや，ここにあるよ」
彼は自分の胸を指した。
「とても遠慮深い数字だからね，目につくところには姿を現さないけど，ちゃんと我々の心の中にあって，その小さな両手で世界を支えているのだ。」
私たちは再び沈黙し，どこか知らない遠い場所で，精一杯両手をのばしているらしいマイナス 1 の平方根の様子に思いを巡らせた。雨の音だけが聞こえていた。

小川　洋子著　『博士の愛した数式』より

§1　複素数とその計算

まず，次の 3 つの 2 次方程式について考えてみましょう。

$$① \quad x^2-4=0 \qquad ② \quad x^2-2=0 \qquad ③ \quad x^2+1=0$$

小学生の頃を思い出してみてください。①の方程式の解，つまり

「同じ数を 2 回かけて 4 になる数は？」

と聞かれたら，**「2」**と答えるでしょう。しかし，中学 1 年生となり『負の数』を勉強すると，

$$x^2-4=0 \iff x=\pm 2$$

と 2 つの解を答えられるようになります。

では，②の方程式の解はどうでしょうか。
同じく，中学 1 年生にこの方程式の解を尋ねたら，

「だいたい，1.4 ぐらい」

というような答えが返ってくるでしょう。実際は…

$$x^2-2=0 \iff x=\pm 1.41421356\cdots$$

となり，解は無限に続く小数です。無限に続くものを正確に表すことは，残念ながらできません。
しかし，中学 2 年生となり，平方根$\sqrt{\ }$という記号を新たに学ぶことで，

$$x^2-2=0 \iff x=\pm\sqrt{2}$$

と正確に②の解を表すことができるのです。

以上のように方程式の解というものは

新たな記号を導入することにより，新たな解を獲得してきた

という歴史があるのです。

それでは，③の方程式はどうでしょうか？
2 乗して -1 になる数が答えになりますが，

$$(+)\times(+)=(+) \qquad (-)\times(-)=(+)$$

という性質があるので，今までは**「解なし」**と答えるのが普通でした。
しかし，今回は新たな記号を導入することにより，この方程式に解を与えてあげようというわけです。

これからは「2 乗し -1 になる数」を i（アイ)とし，これを**虚数単位**(imaginary unit)と呼びます。

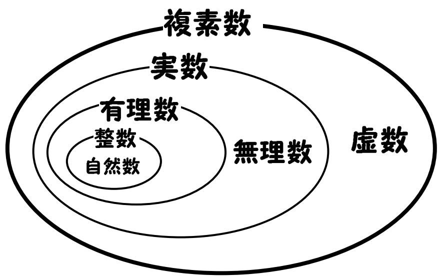
つまり，$i^2=-1$ または $\sqrt{-1}=i$ です。

○ 複素数とは

実数の単位 1 と虚数単位 i と 2 つの実数 a，b を用いて表されるものを**複素数**(complex number)といい，a を**実部**，b を**虚部**と呼ぶ。

$$\underset{\text{実部}}{a}\times\overset{\text{実数単位}}{1}+\underset{\text{虚部}}{b}\times\overset{\text{虚数単位}}{i}=\underset{\text{複素数}}{a+bi}$$

複素数 $a+bi$ は $b=0$ とすると a となる。これは実数なので実数は複素数の特別な数，つまり複素数の一部ということになる。複素数の中で実数ではないものを**虚数**といい，特に $a=0$，$b\neq 0$ のときを**純虚数**と呼ぶ。虚数も当然，複素数の一部である。



$ex.$ 実数…3，$\dfrac{2}{5}$，π

虚数…$2i$，$1-3i$

純虚数…$2i$，$-3i$

○　複素数の計算

ここでは，複素数の計算方法について解説していきます。

例 1　次の計算をしなさい。

(1)　$2+3i-(3-2i)$　　(2)　$(1+2i)(2-i)$　　(3)　$(1+i)^3$

i を文字としてとらえ，文字式の計算すればよいだけです。また，i^2 が出てきたら -1 におきかえます。

(1)　$2+3i-(3-2i)=2+\underset{\sim}{3i}-3+\underset{\sim}{2i}=-1+5i$

同類項をまとめる

(2)　$(1+2i)(2-i)=2+3i-2i^2=2+3i+2=4+3i$

−1 にする

(3)　$(1+i)^3=1+3i+3i^2+\underbrace{i^3}_{i^3=i\cdot i^2}=1+3i-3-i=-2+2i$　　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

○　共役な複素数

実数 a, b に対して，2 つの複素数 $a+bi$, $a-bi$ を互いに**共役な複素数**という。

複素数 α の共役な複素数を $\bar{\alpha}$ で表す。

$ex.$ $\alpha=1+2i \Rightarrow \bar{\alpha}=1-2i$

$\alpha=3-5i \Rightarrow \bar{\alpha}=3+5i$

$\alpha=3i \Rightarrow \bar{\alpha}=-3i$

$\alpha=-2 \Rightarrow \bar{\alpha}=-2$

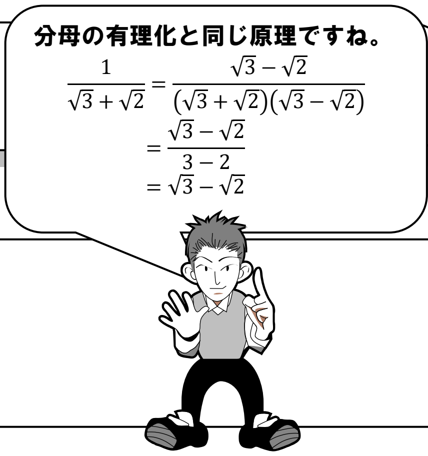
まず，共役な複素数には**和と積が必ず実数になる**という性質がある。

和：$a+bi+(a-bi)=2a$

積：$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

複素数の除法には，この共役な複素数を利用する。

例 2　複素数 $\dfrac{2-i}{3+2i}$ を簡単にしなさい。



分母の実数化をしていきます。

$$\frac{2-i}{3+2i}=\frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{6-7i+2i^2}{9+4}=\frac{4-7i}{13}$$

ここまでのことから，複素数の計算の結果は

必ず $a+bi$ の形で表せることが分かる。

また，共役な複素数には次のような性質がある。

共役な複素数の性質

複素数 α，β について，次の性質が成り立つ。

① $\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$ (複号同順)　② $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$　③ $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$

証明

$\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ とする。

① $\overline{\alpha + \beta} = \overline{a + bi + c + di} = \overline{a + c + (b + d)i}$

$$= a + c - (b + d)i$$

$$= a - bi + c - di = \overline{a + bi} + \overline{c + di}$$

よって，$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

同様に考えると，$\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$

② $\overline{\alpha\beta} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{ac - bd + (ad + bc)i}$

$$= ac - bd - (ad + bc)i$$

$$= (a - bi)(c - di) = \overline{a + bi}\,\overline{c + di}$$

よって，$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$

③ $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \cdot \bar{\beta} = \overline{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta} = \bar{\alpha}$

よって，$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \cdot \bar{\beta} = \bar{\alpha} \iff \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$

○ 複素数の性質

① 複素数の大小

実数と違い，複素数では**大小を考えない**。実際，2 つの複素数 $2i$，$3i$ の大小について…

仮に $2i < 3i$ …① とすると，

$$2i < 3i \iff 3i - 2i > 0 \iff i > 0$$

このとき，①の両辺に $i(> 0)$ をかけると，

$$2i \times i < 3i \times i \iff -2 < -3$$

となり矛盾。

仮に $2i > 3i$ …② とすると，

$$2i > 3i \iff 3i - 2i < 0 \iff i < 0$$

このとき，②の両辺に $i(< 0)$ をかけると，

$$2i \times i > 3i \times i \iff -2 < -3$$

となり矛盾。つまり，大小関係を仮定したことが間違いであることが分かる。

② 複素数の相等

a，b，c，d を実数とするとき，2 つの複素数 $a+bi$，$c+di$ について次のことが成り立つ。

複素数の相等

$$a+bi=c+di \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

特に，$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

証明

$a+bi=0$ において，$b\neq 0$ と仮定する。

このとき，$i=-\dfrac{a}{b}$ となるが，右辺は $\dfrac{(\text{実数})}{(\text{実数})}$ となるので実数となるので，

左辺が虚数であることに矛盾する。

よって $b=0$ である。このとき，$a=0$ となる。

これより，$a+bi=c+di \iff a-c+(b-d)i=0$

$\iff a-c=0$ かつ $b-d=0$

$\iff a=c$ かつ $b=d$

③ 負の数の平方根

a を実数とするとき，負の数 $-a$ に対して，$\sqrt{-a}$ は 2 乗して$-a$ になる数なので $\sqrt{a}i$ と表すことができる。このことから $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}i$ と表わせる。

どこが違いますか?①

計算①

$$\begin{aligned}2i\times i&=\sqrt{-4}\times\sqrt{-1}\\&=\sqrt{-4\times(-1)}\\&=\sqrt{4}\\&=2\end{aligned}$$

計算②

$$\begin{aligned}i=i &\iff \sqrt{-1}=\sqrt{-1}\\&\iff \sqrt{\frac{-1}{1}}=\sqrt{\frac{1}{-1}}\\&\iff \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}\\&\iff \sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=1\\&\iff i\times i=1\end{aligned}$$

例題 1 次の計算をしなさい。

(1) $(4+5i)-(3-2i)$ (2) $(2+i)^2$ (3) $\left(2+\sqrt{-5}\right)\left(3-\sqrt{-5}\right)$

(4) $\dfrac{2+5i}{3-2i}$ (5) $\dfrac{3+2i}{2+i}-\dfrac{i}{1-2i}$

練習 1 次の計算をしなさい。

(1) $(5-3i)-(3-2i)$ (2) $(3-i)^2$ (3) $\left(\sqrt{-3}+2\right)\left(\sqrt{-3}-3\right)$

(4) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ (5) $\dfrac{2-i}{3+i}-\dfrac{5+10i}{1-3i}$

例題 2 次の等式を満たす実数 x，y の値を，それぞれ求めなさい。

(1) $(4+2i)x+(1+4i)y+7=0$ (2) $(x+2yi)(1+i)=3-2i$

練習 2 (1) 次の等式または条件を満たす実数 x，y の値を，それぞれ求めなさい。

（ア） $(3+2i)x+2(1-i)y=17-2i$ （イ） $(1+xi)(3-7i)=1+yi$

(2) $\dfrac{1+xi}{3+i}$ が(ア) 実数，(イ) 純虚数となるように，実数 x の値を定めなさい。

例題 3 2 乗すると $6i$ になるような複素数 z を求めなさい。

練習 3 2 乗すると i になるような複素数 z を求めなさい。

§2　解の公式と判別式

○　解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $\left(a\neq 0,\ a,\ b,\ c \text{ は実数}\right)$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

と表せる。

証明

$$ax^2+bx+c=0 \iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

よって，$x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}} \iff x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b=2b'$（b' は整数)とすると，

$$ax^2+2b'x+c=0 \iff x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b')^2-4ac}}{2a}=\boxed{\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}}$$

b が偶数のときは，こちらを使うと少し計算が楽になる。
使えるようにしておきましょう。

○　判別式

係数が実数である 2 次方程式の解は，解の公式の $\sqrt{\ }$ の中身 b^2-4ac の値により，
以下のように分類することができる。

（ⅰ）　$b^2-4ac>0$ のとき

$\pm\sqrt{b^2-4ac}$ は異なる 2 つの実数となるので，**異なる 2 つの実数解を持つ**。

（ⅱ）　$b^2-4ac=0$ のとき

解は $\pm$ 以降の部分が 0 になり，$x=-\dfrac{b}{2a}$ の部分だけが残る。

つまり，**1 つの実数解(重解)を持つ**。

（ⅲ）　$b^2-4ac<0$ のとき

$\pm\sqrt{b^2-4ac}$ は異なる 2 つの虚数となるので，**異なる 2 つの虚数解を持つ**。

このように，2 次方程式の解は b^2-4ac の正負を調べることによって，解かなくても解の様子を知ることができる。この b^2-4ac のことを**判別式**という。また，虚数解の存在により，**2 次方程式は必ず 2 解を持つ**ことが分かる。

なお，$b=2b'$（b' は整数)のとき，判別式は ${}^{D}\!/_{4}=(b')^2-ac$ と表せる。

どこが違いますか?②

問題

x についての方程式 $2x^2-4ix-5=0$ の解を判別しなさい。

解答

$2x^2-4ix-5=0$ の判別式を D とすると，

$$D/_4=(-2i)^2-2\cdot(-5)=6>0$$

よってこの方程式は異なる 2 つの実数解を持つ。

例題 4　次の 2 次方程式を解きなさい。

(1)　$3x^2+5x-2=0$　　(2)　$2x^2+5x+4=0$　　(3)　$\dfrac{1}{10}x^2-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{2}=0$

(4)　$\left(\sqrt{3}-1\right)x^2+2x+\left(\sqrt{3}+1\right)=0$

練習 4　次の 2 次方程式を解きなさい。

(1)　$4x^2-8x+3=0$　　(2)　$3x^2-5x+4=0$　　(3)　$2x(3-x)=2x+3$

(4)　$\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{3}=0$　　(5)　$\left(2+\sqrt{3}\right)x^2+2\left(\sqrt{3}+1\right)x+2=0$

例題 5　次の 2 次方程式の解の種類を判別しなさい。ただし，k は実数の定数とする。

(1)　$3x^2-5x+3=0$　　(2)　$2x^2-(k+2)x+k-1=0$　　(3)　$x^2+2(k-1)x-k^2+4k-3=0$

練習 5　次の 2 次方程式の解の種類を判別しなさい。ただし，k は実数の定数とする。

(1)　$x^2-3x+1=0$　　(2)　$4x^2-12x+9=0$　　(3)　$-13x^2+12x-3=0$

(4)　$x^2-(k-3)x+k^2+4=0$　　(5)　$x^2-(k-2)x+\dfrac{k}{2}+5=0$

例題 6 k は定数とする。次の 2 つの 2 次方程式

$$x^2-kx+k^2-3k=0 \quad \cdots①,\ (k+8)x^2-6x+k=0 \quad \cdots②$$

について，次の条件を満たす k の値の範囲をそれぞれ求めなさい。

(1) ①，②のうち，少なくとも一方が虚数解を持つ。

(2) ①，②のうち，一方だけが虚数解を持つ。

練習 6 2 次方程式 $x^2+4ax+5-a=0 \quad \cdots①$，$x^2+3x+3a^2=0 \quad \cdots②$ について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲をそれぞれ求めなさい。

(1) ①，②がどちらも実数解を持たない。

(2) ①，②のうち，一方だけが虚数解を持つ。

例題 7 x の方程式 $(i+1)x^2+(k+i)x+ki+1=0$ が実数解をもつように，実数 k の値を求めなさい。

練習 7 x の方程式 $(1+i)x^2+(k+i)x+3-3ki=0$ が純虚数解をもつとき，実数 k の値を求めなさい。

例題 8 次の式を，複素数の範囲で因数分解しなさい。

(1) $2x^2-3x+4$　　(2) x^4-64　　(3) x^4+4x^2+36

練習 8 次の式を，複素数の範囲で因数分解しなさい。

(1) $\sqrt{3}x^2-2\sqrt{2}x+\sqrt{27}$　　(2) x^4-81　　(3) x^4+2x^2+49

例題 9 $x^2+3xy+2y^2-3x-5y+k$ が x，y の 1 次式の積に分解できるように，定数 k の値を定めなさい。また，その場合に，この式を因数分解しなさい。

練習 9 次の 2 次式が x，y の 1 次式の積に因数分解できるように，定数 k の値を定めなさい。また，その場合に，この式を因数分解しなさい。

(1) $x^2+xy-6y^2-x+7y+k$　　(2) $2x^2-xy-3y^2+5x-5y+k$

§5　解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$　$(a\neq 0)$ の 2 解が $x=\alpha,\ \beta$ であるとき，この方程式は

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解することができる。ここで，右辺を展開して

$$ax^2+\ bx+\ c\ =ax^2-\ a(\alpha+\beta)\,x+\ a\alpha\beta$$

係数を比較することで，2 次方程式の**解と係数の関係**が得られる。

2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta$ とするとき，次の関係式が成り立つ。

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

例 3　2 次方程式 $3x^2-x-6=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}$　　(3)　$\alpha-\beta$

対称式の値を求める問題です。解と係数の関係から基本対称式 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ の値が求まるので，まずは，与式を基本対称式に分解するところから始めます。

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=\dfrac{1}{3},\ \alpha\beta=-2$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-2\cdot(-2)=\dfrac{1}{9}+4=\dfrac{37}{9}$

(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\cdot(-2)\cdot\frac{1}{3}}{4}=\dfrac{55}{108}$

(3)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-4\cdot(-2)=\dfrac{73}{9}$

よって，$\alpha-\beta=\pm\dfrac{\sqrt{73}}{3}$

対称式…与えられた文字の順番を入れ替えても元の式と同じ式になるもの。
交代式…与えられた文字の順番を入れ替えると元の式と符号だけが異なるもの。

例題 10　2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　$(\alpha+1)(\beta+1)$　　(2)　$\alpha^2+\beta^2$　　(3)　$\alpha^3+\beta^3$　　(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

練習 10　2 次方程式 $2x^2+8x-3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2)　$2(3-\alpha)(3-\beta)$　　(3)　$\alpha^3+\beta^3$

(4)　$\alpha^4+\beta^4$　　(5)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(6)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

例題 11　2 次方程式 $2x^2+4x+3=0$ の 2 つの解を α，β とする。このとき，$(\alpha-1)(\beta-1)=\boxed{\text{ア}}$ であり，

$(\alpha-1)^4+(\beta-1)^4=\boxed{\text{イ}}$ である。

練習 11　2 次方程式 $x^2-3x+7=0$ の 2 つの解を α，β とする。このとき，$(2-\alpha)(2-\beta)=\boxed{\text{ア}}$ であり，

$(\alpha-2)^3+(\beta-2)^3=\boxed{\text{イ}}$ である。

例題 12　2 次方程式 $x^2-6x+k=0$ について，次の条件を満たすように，定数 k の値を定めなさい。

(1)　1 つの解が他の解の 2 倍　　(2)　1 つの解が他の解の 2 乗

練習 12 (1)　2 次方程式 $x^2-(k-1)x+k=0$ の 2 つの解の比が 2 : 3 となるとき，定数 k の値を求めなさい。

(2)　x の 2 次方程式 $x^2-2kx+k=0$（k は定数)が異なる 2 つの解 α，α^2 をもつとき，α の値を求めなさい。

例題 13　2 次方程式 $x^2-mx+p=0$ の 2 つの解を α，β とし，2 次方程式 $x^2-mx+q=0$ の 2 つの解を γ，δ とする。

(1)　$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ を p，q を用いて表しなさい。

(2)　p，q が x の 2 次方程式 $x^2-(2n+1)x+n^2+n-1=0$ の解であるとき，$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)(\delta-\beta)$ の値を求めなさい。

練習 13 (1)　x の 2 次方程式 $(x-a)(x-b)-2x+1=0$ の解を α，β とする。このとき，$(x-\alpha)(x-\beta)+2x-1=0$ の解を求めなさい。

(2)　2 次方程式 $(x-1)(x-2)+(x-2)x+x(x-1)=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，

$\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}+\dfrac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}$ の値を求めなさい。

例題 14 (1)　$\dfrac{-1+\sqrt{5}i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{5}i}{2}$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作りなさい。

(2)　和が 3，積が 3 である 2 数を求めなさい。

練習 14 (1)　次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作りなさい。

（ア）　$3,\ -5$　　（イ）　$2+\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5}$　　（ウ）　$3+4i,\ 3-4i$

(2)　和と積が次のようになる 2 数を求めなさい。

（ア）　和が 7，積が 3　　（イ）　和が -1，積が 1

例題 15 (1)　2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha+\dfrac{1}{\beta}$，$\beta+\dfrac{1}{\alpha}$ を解とする 2 次方程式を 1 つ作りなさい。

(2)　2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解を α，β とするとき，2 数 α^2，β^2 を解とする 2 次方程式の 1 つが $x^2-4x+36=0$ であるという。このとき，実数の定数 p，q の値を求めなさい。

練習 15 (1)　2 次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$，$\beta-\dfrac{1}{\beta}$ を解とする 2 次方程式を 1 つ作りなさい。

(2)　2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解を α，β とするとき，2 数 α^2+1，β^2+1 を解とする 2 次方程式の 1 つが $x^2-2x+5=0$ であるという。このとき，実数の定数 p，q の値を求めなさい。

例題 16　2 次方程式 $x^2-mx+3m=0$ が整数解のみを持つような定数 m の値とそのときの整数の解をすべて求めなさい。

練習 16 (1)　2 次方程式 $x^2-(k+6)x+6=0$ の解がすべて整数となるような定数 k の値とそのときの整数解をすべて求めなさい。

(2)　p を正の定数とする。$x^2+px+2p=0$ の 2 つの解 α，β がともに整数となるとき，組 $(\alpha,\ \beta,\ p)$ をすべて求めなさい。

例 4　x についての 2 次方程式 $x^2+2ax+a+2=0$ の解が次の条件を満たすような実数 a の値の範囲をそれぞれ求めなさい。

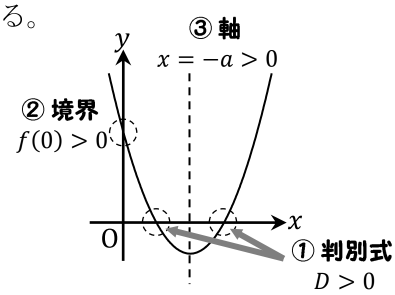
(1)　異なる 2 つの正の解をもつ　　　　(2)　異符号の解をもつ

2 次方程式の解の配置の問題です。まずはグラフを用いて解いてみましょう。

ここで注目すべきポイントは『判別式，軸，境界』の 3 つになります。

解①

$f(x)=x^2+2ax+a+2$ とおき，$y=f(x)$ を x 軸との交点を考える。



(1)　$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D/4=a^2-(a+2)>0 \iff (a+1)(a-2)>0$

$\iff a<-1,\ a>2 \quad \cdots ①$

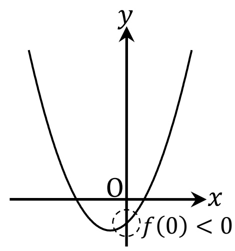
軸　$x=-a>0 \iff a<0 \quad \cdots ②$

$f(0)>0 \iff a+2>0 \iff a>-2 \quad \cdots ③$

①，②，③より　$-2<a<-1$

(2)　満たすべき条件は　$f(0)<0$

よって，$a+2<0 \iff a<-2$



次に解と係数の関係を用いて解いてみます。

解②

$x^2+2ax+a+2=0 \quad \cdots (*)$ の判別式を D とすると

$D/4=a^2-(a+2)>0 \iff (a+1)(a-2)>0$

$\iff a<-1,\ a>2 \quad \cdots ①$

このとき，$(*)$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=a+2$

(1)　2 解がともに正より，

$$\boxed{\begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha+\beta>0\\ \alpha\beta>0\end{cases}} \iff \begin{cases}-2a>0\\ a+2>0\end{cases} \iff \begin{cases}a<0 & \cdots ②\\ a>-2 & \cdots ③\end{cases}$$

①，②，③より，$-2<a<-1$

(2)　$\boxed{\text{2 解が異符号より，}\alpha\beta<0} \iff a+2<0 \iff a<-2 \quad \cdots ④$

①，④より，$a<-2$

例題17　2次方程式$x^2-(a-10)x+a+14=0$が次のような解をもつように, 定数aの値の範囲を定めなさい。

(1)　異なる2つの正の解

(2)　異符号の解

練習 17　2 次方程式を$x^2-2(k+1)x+2(k^2+3k-10)=0$の解が次の条件を満たすような定数$k$の値の範囲を求めなさい。

(1)　異符号の解をもつ。

(2)　正でない実数解のみをもつ。

例題18　2次方程式$x^2-2px+p+2=0$が次の条件を満たす解をもつように, 定数pの値の範囲を定めなさい。

(1)　2つの解がともに1より大きい。

(2)　1つの解は3より大きく，他の解は3より小さい。

練習 18　2 次方程式$x^2-2(a-4)x+2a=0$が次の条件を満たす解をもつように，定数aの値の範囲を定めなさい。

(1)　2つの解がともに2より大きい。

(2)　2つの解がともに2より小さい。

(3)　1つの解が4より大きく，他の解は4より小さい。

§4　整式の除法

　ここでは整式の割り算について学んでいきます。基本的な考え方は，整数における割り算と同じで，それを文字に拡張すればよいだけです。そこで，まずは整数の割り算から見ていきましょう。

　例えば，14 を 4 で割ると商は 3，余りは 2 となるが，この計算において以下の 2 点に注目する。

①　右のような式を用いて表すことができる。
②　(割る数) > (余り)

$$\underset{\text{割られる数}}{14} = \underset{\text{割る数}}{4} \times \underset{\text{商}}{3} + \underset{\text{余り}}{2}$$

　このことをもとに，整式の割り算を定義する。

整式 $f(x)$，$g(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ が…

①　右のような式を用いて表すことができる。
②　$\bigl(g(x)$の次数$\bigr) > \bigl(R(x)$の次数$\bigr)$

$$\underset{\text{割られる数}}{f(x)} = \underset{\text{割る数}}{g(x)} \times \underset{\text{商}}{Q(x)} + \underset{\text{余り}}{R(x)}$$

を満たすとき，$Q(x)$ を「$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商」，$R(x)$ を「$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの余り」とする。

　例えば，$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 5$，$g(x) = x^2 + x - 2$ とすると，

$$x^4 - 2x^3 - 4x + 5 = (x^2 + x - 2) \times (x^2 - 3x + 5) - 15x + 15 \quad \cdots (*)$$

となるので，$f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商が $x^2 - 3x + 5$，余りが $-15x + 15$ となる。

それでは，どのように $(*)$ 式を作るのか見ていこう。

割り算の手順

①　整数の除法のように割る式，割られる式を並べる。

$$x^2 + x - 2 \;\overline{)\, x^4 - 2x^3 \;\boxed{}\; - 4x + 5}$$

2 次の項がないので空けておく

②　割られる式の最高次の項 x^4 が消えるように商を選ぶ。

$$\begin{array}{rllll}
 & x^2 & & & \\
x^2 + x - 2 \;\big) & x^4 & -\,2x^3 & & -\,4x + 5 \\
 & x^4 & +\;\; x^3 & -\,2x^2 & \leftarrow (x^2 + x - 2) \times x^2 \\ \hline
\end{array}$$

この部分が等しくなるように商を選ぶ

③　上下の式の引き算をして，$-4x$ を下に下げる。

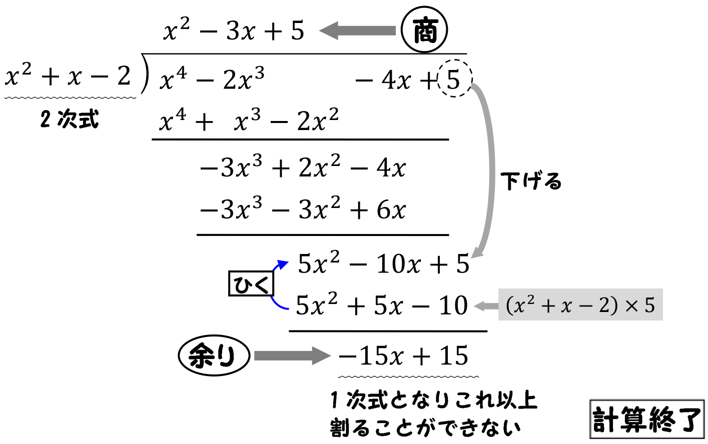
$$\begin{array}{rllll}
 & x^2 & & & \\
x^2 + x - 2 \;\big) & x^4 & -\,2x^3 & & -\,4x + 5 \\
\text{ひく} & x^4 & +\;\; x^3 & -\,2x^2 & \\ \hline
 & & -3x^3 & +\,2x^2 & -\,4x \\
\end{array}$$

下げる

④　②と同様に最高次の項 $-3x^3$ が消えるように商を選ぶ。

$$\begin{array}{rllll}
 & x^2 & -\,3x & & \\
x^2 + x - 2 \;\big) & x^4 & -\,2x^3 & & -\,4x + 5 \\
 & x^4 & +\;\; x^3 & -\,2x^2 & \\ \hline
 & & -3x^3 & +\,2x^2 & -\,4x \\
\text{ひく} & & -3x^3 & -\,3x^2 & +\,6x \leftarrow (x^2 + x - 2) \times (-3x) \\ \hline
\end{array}$$

⑤　引き算した結果が割る式の次数より低くなるまで繰り返す。



以上により，$(*)$ 式が導かれる。

例題 19 (1)　次の整式 A を整式 B で割った商と余りを求めなさい。

$$A=2x^3-5x^2-5,\ B=2x-1$$

(2)　次の式 A，B を x についての整式とみて，A を B で割った商と余りを求めなさい。

$$A=2x^3+10y^3-3xy^2,\ B=x+2y$$

練習 19 (1)　次の整式 A を整式 B で割った商と余りを求めなさい。

（ア）$A=3x^2+5x+4$，$B=x+1$　　　（イ）$A=2x^4-6x^3+5x-3$，$B=2x^2-3$

(2)　次の式 A，B を x についての整式とみて，A を B で割った商と余りを求めなさい。

$$A=3x^3+4y^3-11x^2y,\ B=3x-2y$$

例題 20 (1)　$2x^2-x-1$ で割ると，商が $4x+5$，余りが $-2x+1$ である整式 A を求めなさい。

(2)　$x^4+3x^3+2x^2-1$ を整式 B で割ると，商が x^2+1，余りが $-3x-2$ である。整式 B を求めなさい。

練習 20 (1)　$2x^2+x-2$ で割ると，商が $-3x+5$，余りが $-2x+4$ である整式 A を求めなさい。

(2)　$3x^3-2x^2+1$ を整式 B で割ると，商が $x+1$，余りが $x-3$ であるという。整式 B を求めなさい。

例題 21　$x=1+\sqrt{2}i$ のとき，$P(x)=x^4-4x^3+2x^2+6x-7$ の値を求めなさい。

練習 21　$x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$x^5+x^4-2x^3+x^2-3x+1$ の値を求めなさい。

○　１次式の割り算

整式 $P(x)$ の 1 次式 $x-\alpha$ にで割ったときの商と余りを，より簡単な方法で求めてみよう。

ここでは具体的に，$x^3+3x^2+4x-10$ を $x-3$ で割った結果について考えてみます。

係数比べによる方法

①　左辺の 3 次の係数が 1 となるので，商の 2 次の係数も 1 となることが分かる

$$x^3+3x^2+4x-10=(x-3)(x^2+\cdots\qquad)$$

②　右辺の 2 次の項を展開すると $-3x^2$ となる。左辺の 2 次の係数は 3 なので商の 1 次の係数が 6 とな

$$-3x^2+\boxed{?}x^2=3x^2$$

$$x^3+3x^2+4x-10=(x-3)(x^2+6x\cdots\qquad)$$

③　右辺の 1 次の項を展開すると $-18x$ となる。左辺の 1 次の係数は 4 なので商の定数項が 22 となる。

$$-18x+\boxed{?}x=4x$$

$$x^3+3x^2+4x-10=(x-3)(x^2+6x+22)+\cdots$$

④　右辺の定数項を展開すると -66 となる。左辺の定数項は－10 なので両辺が同じ形になるためには右辺に 56 を足せばよい

$$-66+\boxed{?}=-10$$

$$\boxed{x^3+3x^2+4x-10=(x-3)(x^2+6x+22)+56}$$ **出来上がり!!**

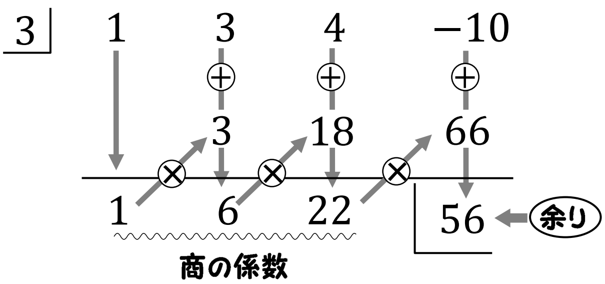
組み立て除法

こちらは先ほどに比べると機械的にできる分，やりやすい方法である。

まず，$x^3+3x^2+4x-10$ の係数だけを並べ，左上には $x-3$ を 0 にする値の 3 をおく。

そして，下に移動するときには足し算をして，ななめ上に移動するときには左上の数字 3 と掛け算をする。

下のように左から順に掛け算，足し算を繰り返していくと，商の係数と余りが得られる。



これより，商が $x^2+6x+22$，余りが 56 と分かる。

○　分数式の計算

例 5　次の計算をしなさい。

(1)　$\dfrac{x^2+2x+3}{x}-\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}$　　(2)　$\dfrac{3x+5}{x^2+3x+2}+\dfrac{3}{x^2+x-2}$

まずは，通分して地道に計算していきます。

解①

(1)　$\dfrac{x^2+2x+3}{x}-\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}=\dfrac{(x^2+2x+3)(x+1)-x(x^2+3x+5)}{x(x+1)}$

$$=\frac{x^3+3x^2+5x+3-x^3-3x^2-5x}{x(x+1)}=\frac{3}{x(x+1)}$$

(2)　$\dfrac{3x+5}{x^2+3x+2}+\dfrac{3}{x^2+x-2}=\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$

$$=\frac{(3x+5)(x-1)+3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{3x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x+2)(3x-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}$$

少し工夫します。まず(1)は**帯分数化**です。例えば，仮分数 $\dfrac{14}{3}$ は帯分数にすると $4\dfrac{2}{3}$ となりますが，これは，14 を 3 で割ったときの，商 4 と余り 2 を用いています。これと同じように分数式を帯分数化します。

$$\frac{14}{3}=\underset{\textbf{商}}{4}\frac{2}{3}$$ **余り**

解②

(1)　$\dfrac{x^2+2x+3}{x}=\dfrac{x(x+2)+3}{x}=x+2+\dfrac{3}{x}$

$\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}=x+2+\dfrac{3}{x+1}$

$$\begin{array}{r}
x+2 \\
x+1\,\overline{)\,x^2+3x+5} \\
\underline{x^2+x} \\
2x+5 \\
\underline{2x+2} \\
3
\end{array}$$

よって，$\dfrac{x^2+2x+3}{x}-\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}=x+2+\dfrac{3}{x}-\left(x+2+\dfrac{3}{x+1}\right)$

$$=\frac{3}{x}-\frac{3}{x+1}$$

$$=\frac{3}{x(x+1)}$$

(2)は分母を因数分解して，2 つの分数に分解します。例えば，

$$\frac{3x+5}{x^2+3x+2}=\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$$

というように分解できたとすると，

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}=\frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}=\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}$$

これが x についての恒等式となる。

より，$a+b=3$，$2a+b=5$ が成り立つことが分かります。

この 2 式を解くと，$a=2$，$b=1$ となるので，

$$\frac{3x+5}{x^2+3x+2}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}$$

となります。このように，分数式をいくつかの分数に分けることを**部分分数分解**といいます。

解②

(2) $$\frac{3x+5}{x^2+3x+2}+\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

$$=\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{3}{(x-1)(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$$

これを満たす a，b を求める。

例題 22 (1)　次の分数式を約分して，既約分数式にしなさい。

(ア) $\dfrac{9ax^2y}{18a^3xy^2}$　　(イ) $\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-2x-12}$

(2)　次の計算をしなさい。

(ア) $\dfrac{2xy}{3ab}\times\dfrac{9a^2b^3}{8x^3y}$　　(イ) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+3}\times\dfrac{x+3}{x^2+x-2}\div\dfrac{x+1}{x-1}$

練習 22 (1)　次の分数式を約分して，既約分数式にしなさい。

(ア) $\dfrac{4a^2bc^3}{12ab^3c}$　　(イ) $\dfrac{a^4+a^3-2a^2}{a^2-4}$　　(ウ) $\dfrac{x^4-y^4}{(x-y)(x^3+y^3)}$

(2)　次の計算をしなさい。

(ア) $\dfrac{8x^3z}{9bc^3}\times\dfrac{27abc}{4xyz^2}$　　(イ) $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}\times\dfrac{a^3+ab^2}{a^2-b^2}$　　(ウ) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+2x}\div\dfrac{x+4}{x}\times\dfrac{1}{x+1}$

例題 23 次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}-\dfrac{x}{x^2-9}$ (2) $\dfrac{4}{x^2+4}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$

練習 23 次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{2x+7}{x^2+6x+8}-\dfrac{x-4}{x^2-4}$ (2) $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$

例題 24 次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+b}\right)$ (2) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}+\dfrac{1}{(x+5)(x+7)}$

練習 24 次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{1}{(x-1)x}+\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ (2) $\dfrac{2}{(n-2)n}+\dfrac{2}{n(n+2)}+\dfrac{2}{(n+2)(n+4)}$

例題 25 次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x^2+4x+5}{x+3}-\dfrac{x^2+5x+6}{x+4}$ (2) $\dfrac{x+4}{x+2}-\dfrac{x+5}{x+1}-\dfrac{x-5}{x-1}+\dfrac{x-4}{x-2}$

練習 25 次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x^2+2x+3}{x}-\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}$ (2) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

例題 26 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x}}$ (2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{2+a}}}$

練習 26 次の式を簡単にしなさい。

(1) $\dfrac{x-1+\dfrac{2}{x+2}}{x+1-\dfrac{2}{x+2}}$ (2) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}$ (3) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}}$

§5 剰余の定理

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

と表すことができる。この式に $x=\alpha$ を代入すると

$$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R=R$$

となる。つまり，整式 $P(x)$ に $x=\alpha$ を代入すると，$x-\alpha$ で割ったときの余り R を求めることができる。

剰余の定理

整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りを R とすると

$$R=P(\alpha)$$

これを用いると $P(x)=x^3-3x^2+1$ を $x-1$，$2x+3$ で割った余りはそれぞれ

$$P(1)=1-3+1=-1,\ P\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{8}-\frac{27}{4}+1=-\frac{73}{8}$$

というように，割り算をすることなく求めることができる。

例題 27 次の条件を満たすように，定数 a，b の値をそれぞれ定めなさい。

(1) 整式 $P(x)=x^3+ax+6$ は $x+3$ で割り切れる。

(2) 整式 $P(x)=4x^3+ax^2-5x+3$ を $2x+1$ で割ると 4 余る。

(3) 整式 $P(x)=x^3+ax^2+bx-9$ が $x+3$ で割り切れ，$x-2$ で割ると -5 余る。

練習 27 (1) $2x^3+3ax^2-a^2+6$ が $x+1$ で割り切れるように，定数 a の値を定めなさい。

(2) $2x^3+ax^2+bx-3$ は $x-3$ で割り切れ，$2x-1$ で割ると余りが 5 であるという。このとき，定数 a，b の値を求めなさい。

例題 28 (1) 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りは 5，$x-2$ で割ると余りは 7 となる。このとき，$\mathrm{P}(x)$ を x^2-3x+2 で割った余りを求めなさい。

(2) 整式 $P(x)$ を x^2-1 で割ると $4x-3$ 余り，x^2-4 で割ると $3x+5$ 余る。このとき，$P(x)$ を x^2+3x+2 で割った余りを求めなさい。

練習 28 (1) 整式 $P(x)$ を $x+2$ で割った余りが 3，$x-3$ で割った余りが -1 のとき，$\mathrm{P}(x)$ を x^2-x-6 で割った余りを求めなさい。

(2) 整式 $P(x)$ を x^2+5x+4 で割ると $2x+4$ 余り，x^2+x-2 で割ると $-x+2$ 余る。このとき，$P(x)$ を x^2+6x+8 で割った余りを求めなさい。

例題 29　整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ると余りが -2, x^2-3x+2 で割ると余りが $-3x+7$ であるという。このとき，$P(x)$ を $(x+1)(x-1)(x-2)$ で割った余りを求めなさい。

練習 29　整式 $P(x)$ を $(x-3)^2$ で割った余りが $2x-5$ であり，$x-1$ で割った余りが 5 であるとき，$P(x)$ を $(x-1)(x-3)^2$ で割った余りを求めなさい。

例題 30 (1)　n を 2 以上の自然数とするとき，x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めなさい。

(2)　$3x^{100}+2x^{97}+1$ を x^2+1 で割ったときの余りを求めなさい。

練習 30 (1)　n を 2 以上の自然数とするとき，x^n を $(x-2)^2$ で割ったときの余りを求めなさい。

(2)　$x^{10}+x^5+1$ を x^2+4 で割ったときの余りを求めなさい。

○　因数定理

剰余の定理を利用すると

$$P(\alpha)=0 \iff P(x)\text{ を } x-\alpha \text{ で割った余りが } 0 \iff P(x)\text{ は } x-\alpha \text{ を因数に持つ}$$

と考えることができる。これは因数定理といい，高次式の因数分解の際に利用される。

因数定理

整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割りきれる $\iff$ $P(\alpha)=0$

例 6　x^3+4x^2+x-6 を因数分解しなさい。

$f(x)=x^3+4x^2+x-6$とおく。

$f(1)=1+4+1-6=0$ より $x-1$ を因数にもつ。

よって，$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x-1)(x+2)(x+3)$

（組み立て除法）

1	1	4	1	−6
		1	5	6
	1	5	6	0

因数の見つけ方

$P(\alpha)=0$ となる α のより効率よく見つけるには次のように考えるとよい。

$P(x)$ が $ax-b$ で割り切れ，商を $Q(x)=cx^n+dx^{n-1}+\ \cdots\ +ex+f$ とする(各項の係数は整数)。

このとき，$P(x)$ の最高次の係数は ac，定数項は $-bf$ となるので，

$$\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\textbf{定数項の約数}}{\textbf{最高次の係数の約数}}$$

となるような α を探せばよい。

展開

$$P(x)=(ax-b)(cx^n+dx^{n-1}+\ \cdots\ ex+f)$$
$$=acx^{n+1}+\ \cdots\ -bf$$

例えば，x^3+4x^2+2x-3 を因数分解する際に，$x=\pm2$ を代入する必要は全くなく，最高次の係数 1 と定数項 -3 の約数を考えればよいから，$x=\pm1,\ \pm3$ の代入を検討すれば十分である。

例題 31　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$x^3-x^2-10x-8$　　(2)　$2x^4-3x^3-x^2-3x+2$

練習 31　次の式を因数分解しなさい。

(1)　x^3-x^2-4　　(2)　$2x^3-5x^2-x+6$　　(3)　x^4-4x+3

(4)　$x^4-2x^3-x^2-4x-6$　　(5)　$12x^3-5x^2+1$

§6 高次方程式

$P(x)$ を x についての n 次多項式とするとき，$P(x)=0$ を n 次方程式という。ここでは，高次の方程式について学んでいく。

例 7　4 次方程式 $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$ を解きなさい。

解①

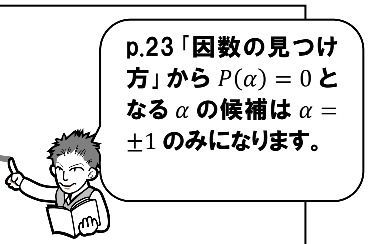
$P(x)=x^4-3x^3+4x^2-3x+1$ とおくと，$P(1)=0$ より $x-1$ を因数に持つ。

よって，$x^4-3x^3+4x^2-3x+1=(x-1)(x^3-2x^2+2x-1)$

$Q(x)=x^3-2x^2+2x-1$ とおくと，$Q(1)=0$ より $x-1$ を因数に持つ。

よって，$x^3-2x^2+2x-1=(x-1)(x^2-x+1)$

以上より，$P(x)=0 \iff (x-1)^2(x^2-x+1)=0 \iff x=1\,(\text{重解}),\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$



この方程式は**相反方程式**と呼ばれるもので，係数が左右対称に配置されているのが特徴です。この点に注目すると，以下のような解法があります。

$$1x^4\boxed{-3}x^3+4x^2\boxed{-3}x+1$$

解②

$x=0$ は解ではないので，方程式の両辺を x^2 で割ると，

$$x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \iff x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0 \quad \cdots(*)$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2 \iff x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$

$$\begin{aligned}\text{よって，}(*) \iff t^2-2-3t+4=0 &\iff t^2-3t+2=0\\ &\iff (t-1)(t-2)=0\\ &\iff t=1,\ 2\end{aligned}$$

よって，$x+\dfrac{1}{x}=1 \iff x^2-x+1=0 \iff x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$x+\dfrac{1}{x}=2 \iff x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=1 \iff x=1\,(\text{重解})$

以上より，$P(x)=0 \iff x=1\,(\text{重解}),\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

例題 32 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3 = 27$ (2) $x^4 - x^2 - 6 = 0$ (3) $x^4 + x^2 + 4 = 0$

練習 32 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^4 = 16$ (2) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ (3) $x^4 - 3x^2 + 9 = 0$

例題 33 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = 0$ (2) $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$

練習 33 次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^3 + 4x^2 - 6x - 7 = 0$ (2) $x^4 + 6x^3 - 24x - 16 = 0$

例題 34 (1) $t = x + \dfrac{1}{x}$ とおく。x の 4 次方程式 $2x^4 - 9x^3 - x^2 - 9x + 2 = 0$ から t の 2 次方程式を導きなさい。

(2) (1)を利用して，方程式 $2x^4 - 9x^3 - x^2 - 9x + 2 = 0$ を解きなさい。

練習 34 方程式 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ を解きなさい。

例題 35 3 次方程式 $x^3 + (a-2)x^2 - 4a = 0$ が 2 重解をもつように，定数 a の値を定めなさい。

練習 35 3 次方程式 $x^3 + (a+1)x^2 - a = 0$ …① について

(1) ①が 2 重解をもつように，定数 a の値を定めなさい。

(2) ①が異なる 3 つの実数解をもつように，a の値の範囲を定めなさい。

例 8 1の3乗根のうち，虚数であるものの1つをωとする。これを用いて，$P(x)=x^4+x^2+1$を因数分解しなさい。

解①

$x^3=1 \iff (x-1)(x^2+x+1)=0$ より，虚数解ωは$\begin{cases}\omega^2+\omega+1=0\\ \omega^3=1\end{cases}$を満たす。

$P(\omega)=\omega^4+\omega^2+1=\omega^3\cdot\omega+\omega^2+1=\omega^2+\omega+1=0$

$P(\omega^2)=\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

因数定理より，$P(x)$は$(x-\omega)(x-\omega^2)$を因数にもつ。

$(x-\omega)(x-\omega^2)=x^2-(\omega+\omega^2)x+\omega^3=x^2+x+1$ $(\because\ \omega+\omega^2=-1,\ \omega\cdot\omega^2=-1)$

これより，$P(x)$はx^2+x+1を因数にもつ。

よって，$P(x)$をx^2+x+1で割ることで，$P(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$となる。

工夫をすれば以下のように，$(\quad)^2-(\quad)^2$の形をつくることができます。

解②

$P(x)=x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

例題 36 (1) 1の3乗根を求めなさい。

(2) 1の3乗根のうち，虚数であるものの1つをωとする。

(ア) ω^2も1の3乗根であることを示しなさい。

(イ) $\omega^7+\omega^8$，$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1$，$(\omega+2\omega^2)^2+(2\omega+\omega^2)^2$の値をそれぞれ求めなさい。

練習 36 ωが$x^2+x+1=0$の解の1つであるとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\omega^{100}+\omega^{50}$　　(2) $\dfrac{1}{\omega^8}+\dfrac{1}{\omega^4}$　　(3) $(\omega^{200}+1)^{100}+(\omega^{100}+1)^{10}+2$

例題 37 $f(x)=x^{80}-3x^{40}+7$とする。

(1) 方程式$x^2+x+1=0$の解の1つをωとするとき，$f(\omega)$の値をωの1次式で表しなさい。

(2) $f(x)$をx^2+x+1で割ったときの余りを求めなさい。

練習 37 x^{2018}をx^2+x+1で割ったときの余りを求めなさい。

○　3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ \ (a\neq 0)$ の3解が $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ であるとき，この方程式は

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解することができる。ここで，右辺を展開して

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

係数を比較することで，3次方程式の**解と係数の関係**が得られる。

3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，次の関係式が成り立つ。

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

3式 $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$ は3文字における基本対称式となっている。

例題 38　3次方程式 $x^3-3x+5=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$，$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ の値をそれぞれ求めなさい。

練習 38　3次方程式 $x^3-2x^2-4=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする。次の式の値を求めなさい。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$　　(3)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

例題 39　3次方程式 $x^3-2x^2-x+3=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，$\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$ を解とする3次方程式を1つ作りなさい。

練習 39　3次方程式 $x^3-3x^2-5=0$ の3つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする。次の3つの数を解とする3次方程式を求めなさい。

(1)　$\alpha-1,\ \beta-1,\ \gamma-1$　　(2)　$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha},\ \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta},\ \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$

例題 40　3次方程式 $x^3+x^2+ax+b=0$ の解のうち，2つが -1 と -3 である。このとき，定数 a，b の値と他の解を求めなさい。

練習 40　3次方程式 $x^3+ax^2-21x+b=0$ の解のうち，2つが1と3である。このとき，定数 a，b の値と他の解を求めなさい。

○　共役解

$\alpha = a + bi$ が実数係数の n 次方程式 $P(x) = 0$ の解ならば，共役の複素数 $\bar{\alpha} = a - bi$ も解となる。
これは p.4 の「複素数の性質」を用いて示すことができる。
ここでは 3 次方程式 $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ を用いてこの性質を示しておこう。

証明　$x = \alpha$ が $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ の解なので，$p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s = 0$

これより，

$$\overline{p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s} = \bar{0} \iff \overline{p\alpha^3} + \overline{q\alpha^2} + \overline{r\alpha} + \bar{s} = \bar{0}$$

$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$

$$\iff \bar{p}\overline{\alpha^3} + \bar{q}\overline{\alpha^2} + \bar{r}\bar{\alpha} + \bar{s} = \bar{0}$$

$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$

$$\iff p\overline{\alpha^3} + q\overline{\alpha^2} + r\bar{\alpha} + s = 0 \quad \cdots (*)$$

$\overline{\alpha^3} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = (\bar{\alpha})^3$，$\overline{\alpha^2} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} = (\bar{\alpha})^2$ より

$$(*) \iff p(\bar{\alpha})^3 + q(\bar{\alpha})^2 + r\bar{\alpha} + s = 0$$

よって，$px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ は $x = \bar{\alpha}$ を解にもつ。

例題 41　3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$ の 1 つの解が $2 + i$ であるとき，実数の定数 a, b の値と他の解を求めなさい。

練習 41　方程式 $x^4 + ax^2 + b = 0$ が $2 - i$ を解にもつとき，実数の定数 a, b の値と他の解を求めなさい。