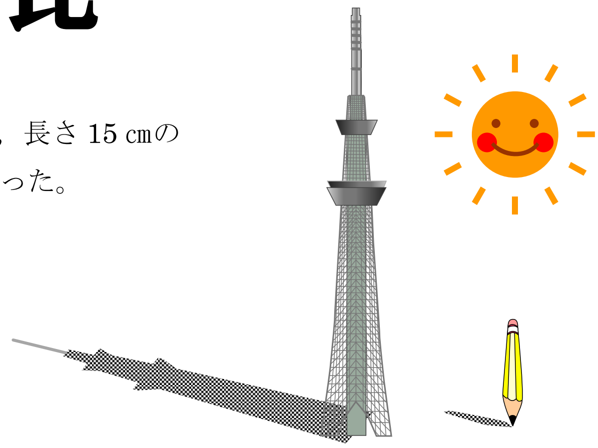
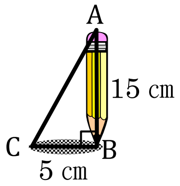
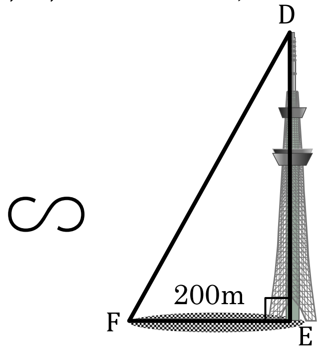
三 角 比



塔の高さを計るために，塔から伸びる影の長さを計った。
地図上で計ったところ塔の影の長さは200mであった。次に，長さ 15 ㎝の鉛筆を地面に立て，鉛筆の影の長さを計ったところ 5 ㎝であった。
右図のように，点 A，B，C，D，E，F を定めると，

△ABC ∽ △DEF



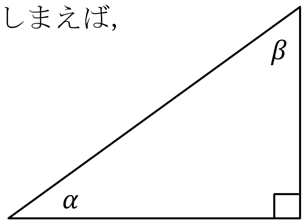


対応する辺の比は等しいので,

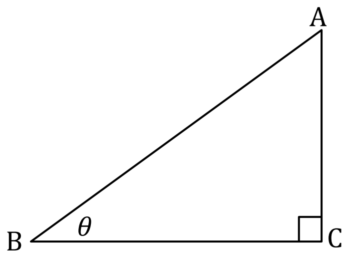
$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}} \iff \frac{15}{5}=\frac{\mathrm{DE}}{200} \iff \mathrm{DE}=600$$

これより，塔の高さは600mであることが分かる。

このように，相似な三角形は対応する辺の比が等しいので，辺の比さえ分かってしまえば，どのように大きな三角形の辺の長さも，すぐに求めることができる。
直角三角形の場合，直角以外の 1 つの角が決まると相似となるので，右図の角 α または β が決まれば辺の比が決まる。
この分野では，まず**直角三角形**の 1 つの角と 2 辺の比の関係について調べていく。



§1　三角比の定義



右図のような $\angle\mathrm{ABC}=\theta$ である直角三角形は，三角形の大きさに関わらずすべて相似なので，対応する辺の比はすべて等しい。

つまり，比 $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ の値は三角形の大きさに関係なく，角 θ のみによって決まる値である。比 $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ を角 θ の**正接**または**タンジェント**(tangent) といい， $\tan\theta$ で表す。

また，比 $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ の値も同様に三角形の大きさに関係なく，角 θ のみによって決まる。

比 $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**正弦**または**サイン**(sine) といい， $\sin\theta$ で表す。

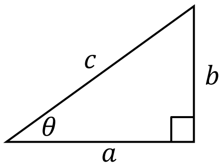
また，比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**余弦**または**サコイン**(cosine) といい， $\cos\theta$ で表す。

正弦，余弦，正接をまとめて**三角比**という。

三角比の定義

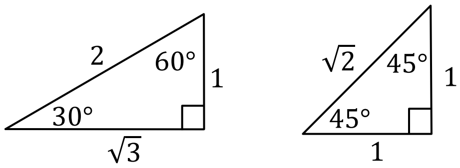
右図において，

$$\sin\theta = \frac{b}{c},\quad \cos\theta = \frac{a}{c},\quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$



例 1　三角比 $\sin 30°$，$\cos 45°$，$\tan 60°$ の値を求めなさい。

2 つの有名な直角三角形を使います。今後，何度も出てくる角度になりますので，右図を用いてすぐに三角比を求められるようにしておきましょう。



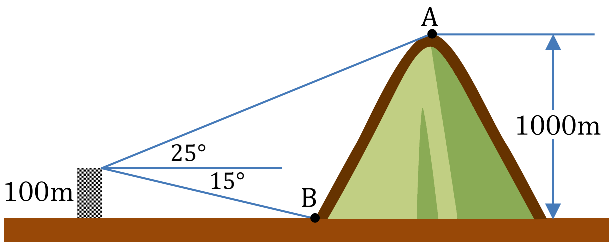
1 つの角が 30° である直角三角形の辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ となっているので，$\sin 30° = \dfrac{1}{2}$

また，1 つの角が 60° である直角三角形の辺の比も同様なので，$\tan 60° = \sqrt{3}$

1 つの角が 45° である直角三角形の辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ となっているので，$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

例 2　標高 100m の地点から，高さ 1000m の山の，山頂の A 地点を見上げたときの仰角が 25°，麓のB 地点を見下ろしたときの俯角が 15° であるとき，2 地点 A，B 間の直線距離を求めなさい。

仰角とは物を見上げたときの視線の方向と，水平方向とのなす角で，俯角とは物を見下ろしたときの視線の方向と，水平方向とのなす角です。15°，25° の三角比は次ページの三角比の表を利用しましょう。



△CDE において，

$$\tan 15° = \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CD}} \iff \mathrm{CD} = \frac{\mathrm{DB}}{\tan 15°} = \frac{100}{0.2679}$$

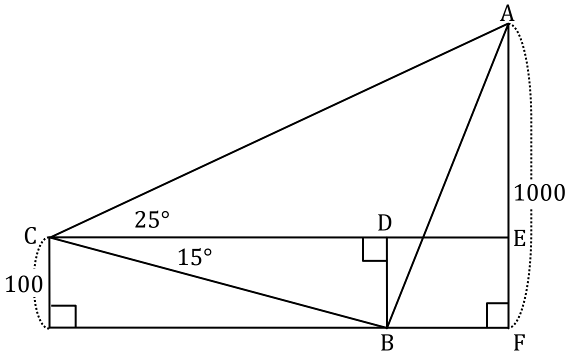
△CEA において，

$$\tan 25° = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{CE}} \iff \mathrm{CE} = \frac{\mathrm{EA}}{\tan 25°} = \frac{\mathrm{AF}-\mathrm{EF}}{\tan 25°} = \frac{900}{0.4663}$$

よって，$\mathrm{BF} = \mathrm{DE} = \mathrm{CE} - \mathrm{CD} = \dfrac{900}{0.4663} - \dfrac{100}{0.2697} \fallingdotseq 1556$

△CEA において，三平方の定理より，

$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AF}^2 + \mathrm{BF}^2} = \sqrt{1000^2 + 1559^2} \fallingdotseq 1849\ \mathrm{m}$



【三角比の表】

θ	sin θ	cos θ	tan θ
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

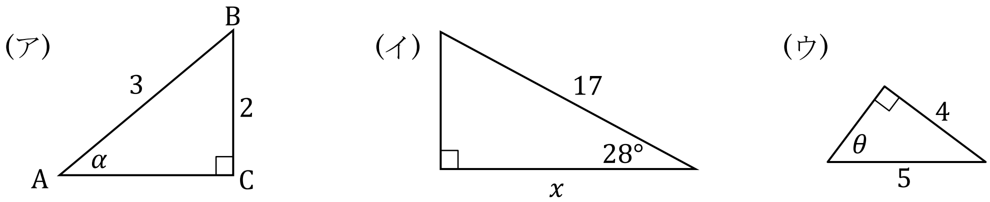
θ	sin θ	cos θ	tan θ
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900

例題1 次の問いに答えよ。ただし，(2)，(3)では，三角比の表を用いなさい。

(1) 下の図(ア)で，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求めなさい。

(2) 下の図(イ)で，x の値を求めなさい。ただし，小数第 2 位を四捨五入しなさい。

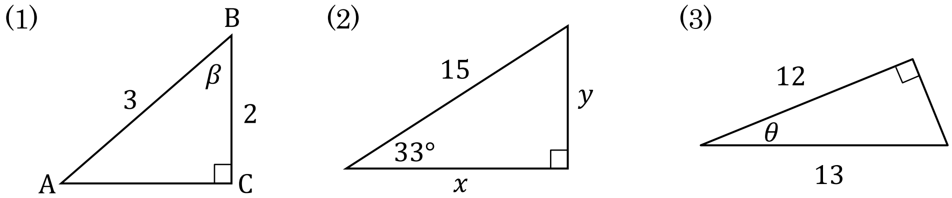
(3) 下の図(ウ)で角 θ を求めなさい。



練習1 (1) 図(1)の角 β について，$\sin\beta$，$\cos\beta$，$\tan\beta$ の値を求めなさい。

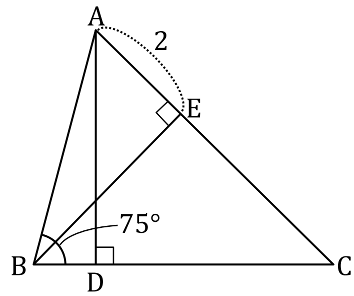
(2) 図(2)で，x，y の値を求めなさい。ただし，小数第 2 位を四捨五入しなさい。

(3) 図(3)で，角 θ を求めなさい。なお，(2)，(3)では三角比の表を用いなさい。



例題2 目の高さが 1.5m の人が，平地に立っている木の高さを知るために，木の前方の地点 A から測った木の頂点の仰角が 30°，A から木に向かって 10m 近づいた地点 B から測った仰角が 45° であった。木の高さを求めなさい。

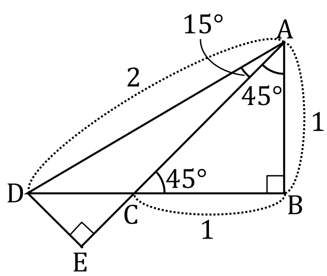
練習2 海面のある場所から崖の上に立つ高さ 30m の灯台の先端の仰角が 60° で, 同じ場所から灯台の下端の仰角が 30° のとき，崖の高さを求めなさい。



例題3 右の図の△ABCで，B = 75° とする。頂点 A から辺 BC に垂線 AD，頂点 B から辺 CA に垂線 BE を引くと，AD = DC，AE = 2 である。

(1) 線分 AD，BD の長さを求めなさい。

(2) $\sin 75°$，$\cos 75°$ の値を求めなさい。

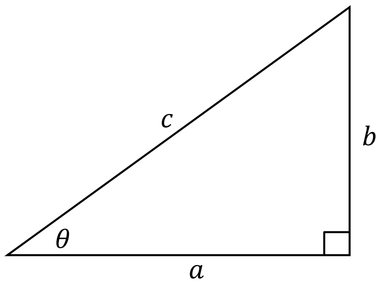


練習3 (1) 右の図で，線分 DE，AE の長さを求めなさい。

(2) 右の図を利用して，次の値を求めなさい。

$\sin 15°$，$\cos 15°$，$\tan 15°$

§2 三角比の相互関係



右図において， $\sin\theta=\dfrac{b}{c}$， $\cos\theta=\dfrac{a}{c}$ なので，

$$a=c\cos\theta,\ b=c\sin\theta$$

これより， $\tan\theta=\dfrac{c\sin\theta}{c\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ …①

また，三平方の定理より，

$$c^2=a^2+b^2 \iff c^2=c^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta \iff \cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad \cdots②$$

ここで，②の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると，

$$1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta} \iff 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

三角比の相互関係

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　③ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

例 3　θ は鋭角とする。 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき， $\cos\theta$， $\tan\theta$ の値を求めなさい。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より， $\dfrac{1}{9}+\cos^2\theta=1 \iff \cos^2\theta=\dfrac{8}{9}$

$\cos\theta>0$ より， $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

これより， $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

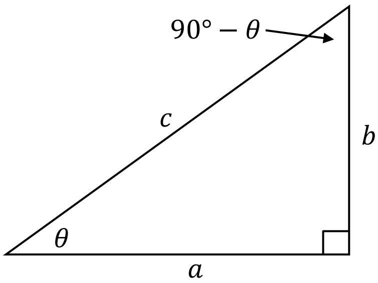
例 4　θ は鋭角とする。 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき， $\sin\theta$， $\cos\theta$ の値を求めなさい。

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より， $1+\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{\cos^2\theta} \iff \cos^2\theta=\dfrac{9}{10}$

$\cos\theta>0$ より， $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

これより， $\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

○　$90° - \theta$ の三角比



右図において，$\sin\theta = \dfrac{b}{c}$，$\cos\theta = \dfrac{a}{c}$，$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

また，$\sin(90° - \theta) = \dfrac{a}{c}$，$\cos(90° - \theta) = \dfrac{b}{c}$，$\tan(90° - \theta) = \dfrac{a}{b}$

これより，

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta,\ \cos(90° - \theta) = \sin\theta,\ \tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

が成り立つ。

$90° - \theta$ の三角比

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta,\ \cos(90° - \theta) = \sin\theta,\ \tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

例 5　$\sin 40° \cos 50° + \cos 40° \sin 50° + \tan 40° \tan 50°$ の値を求めなさい。

$\sin 40° \cos(90° - 40°) + \cos 40° \sin(90° - 40°) + \tan 40° \tan(90° - 40°)$

$= \sin^2 40° + \cos^2 40° + \tan 40° \cdot \dfrac{1}{\tan 40°}$

$= 1 + 1 = 2$

例題4　θ は鋭角とする。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。

(2)　$\tan\theta = 3$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めなさい。

練習4　θ は鋭角とする。$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき，各場合について残りの 2 つの三角比の値を求めなさい。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{12}{13}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$　　(3)　$\tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

例題5 (1)　次の三角比を $45°$ 以下の角の三角比で表しなさい。

（ア）　$\sin 58°$　　（イ）　$\cos 56°$　　（ウ）　$\tan 80°$

(2)　△ABC の 3 つの内角 ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，等式

$\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2}$ が成り立つことを証明しなさい。

練習5 (1)　次の三角比を $45°$ 以下の角の三角比で表しなさい。

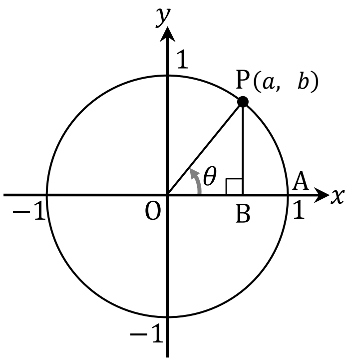
（ア）　$\sin 72°$　　（イ）　$\cos 85°$　　（ウ）　$\tan 47°$

(2)　△ABCの 3 つの内角 ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，次の等式が成り立つことを証明しなさい。

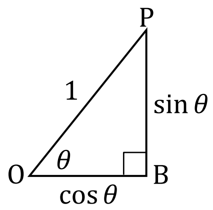
（ア）　$\sin\dfrac{B+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$　　（イ）　$\tan\dfrac{A+B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=1$

§3 三角比の拡張

これまでは直角三角形を用いて，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を考えていたので，当然 θ のとり得る値の範囲は，$0° < \theta < 90°$ であった。ここでは，その θ の範囲を $0° \leqq \theta \leqq 180°$ に拡張する。
つまりここでは，三角比を，直角三角形による定義と矛盾がないように**再定義**する。



座標平面上において，中心が原点で，半径 1 の円(**単位円**)上に動点 $P(a,\ b)$ をとる。また，$A(1,\ 0)$，$B(a,\ 0)$ とし，$\angle AOP = \theta$ とする。
$0° < \theta < 90°$ のとき，$\triangle OBP$ において，$OP = 1$ なので，
$OB = \cos\theta$，$PB = \sin\theta$ となる。これより，点 P の座標が $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ となっていることが分かる。つまり，



点 P の x 座標が $\cos\theta$，点 P の y 座標が $\sin\theta$ …①

となっている。また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，

$\dfrac{(\text{点 P の } y \text{ 座標})}{(\text{点 P の } x \text{ 座標})}$ が $\tan\theta$ …②

となっている。

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の三角比も,①,②と同様に定義する。
ただし，$\theta = 90°$ のときは，点 P の x 座標が 0 となるので，$\tan\theta$ の値は存在しない。

例 6 $0°$ と $120°$ の三角比の値を求めなさい。

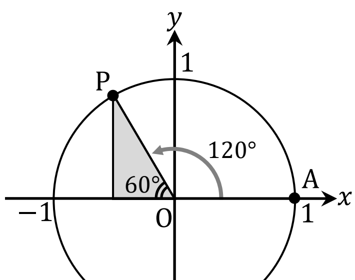
$0°$ の三角比は右図の点 A の座標を見ればわかる。
$A(1,\ 0)$ より，$\cos 0° = 1$，$\sin 0° = 0$ となる。

これより，$\tan 0° = \dfrac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0$

$120°$ の三角比は右図の点 A の座標を見ればわかる。

$A\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より，$\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$，$\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

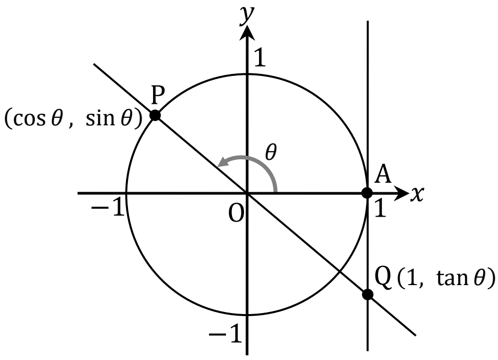
これより，$\tan 120° = \dfrac{\sin 120°}{\cos 120°} = -\sqrt{3}$



これをもとに，下の表を埋めてみよう。

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

○　傾きと正接



　x 軸の正の部分から**左回り**に角 θ をとると，
点 P の x 座標が $\cos\theta$，y 座標が $\sin\theta$ となるので，

直線 OP の傾きは，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ となる。

つまり，直線 OP を表す式は，傾き $\tan\theta$ で，
点 $(0,\ 0)$ を通るので，$y=(\tan\theta)x$ と表すことができる。
このことから，直線 OP と直線 $x=1$ との交点 Q の座標は
$\mathrm{Q}(1,\ \tan\theta)$ となっていることが分かる。つまり，$\tan\theta$ の値を調べるには
直線 OP と直線 $x=1$ との交点の y 座標を調べてもよい。

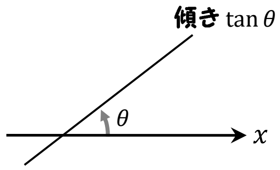
　以上のことから，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき，点 P は単位円周上の上半分を動くので
$\cos\theta$，$\sin\theta$ のとりうる値の範囲は $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$，$0\leqq\sin\theta\leqq 1$ となることが分かり，
$x=1$ 上を点 Q が動くことから，$\tan\theta$ の値の範囲は**全実数**となる。

直線の傾きと正接の関係は，一般的には以下のようになっている。

傾きと正接

直線 $y=mx+n$ と x 軸の正の部分とのなす角
(x 軸から左回りに，角をとる)が θ であるとき，

$$m=\tan\theta$$



例題6 (1)　直線 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$　…①，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$　…② が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α，β とする。
α，β を求めなさい。また，2 直線①，②のなす鋭角を求めなさい。ただし，$0°<\alpha<180°$，
$0°<\beta<180°$ とする。

(2)　2 直線 $y=-\sqrt{3}x$，$y=x+1$ のなす鋭角を求めなさい。

練習6　次の 2 直線のなす鋭角 θ を求めなさい。

(1)　$\sqrt{3}x-y=0$，$x-\sqrt{3}y=0$　　　(2)　$x-y=1$，$x+\sqrt{3}y+2=0$

○　相互関係

右図のように点 P をとると，

$\mathrm{OP}^2 = 1$ より，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \cdots (*)$

また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ が成り立っているので，

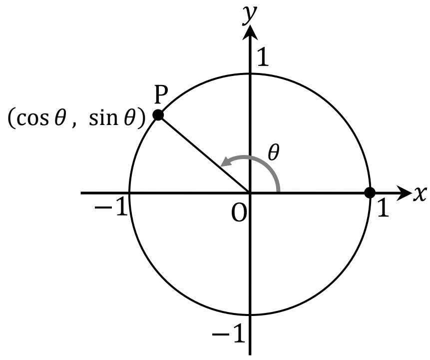
$\cos\theta \neq 0$ のとき，$(*)$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると，

$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

が成り立つ。つまり，$0° < \theta < 90°$ のときに成り立っていた

「三角比の相互関係」

が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ でも成り立っていることが分かる。



例 7　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\tan\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めなさい。

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，$1 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\theta = \dfrac{9}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\tan\theta > 0$ より，$0° < \theta < 90°$

よって，$\cos\theta > 0$ となるので，$\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

これより，$\sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

例 8　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めなさい。

与式の両辺を 2 乗すると，

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$$

例題7　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。

(2)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。

(3)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めなさい。

練習7　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき，各場合について残りの 2 つの三角比の値を求めなさい。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{6}{7}$　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{3}{4}$　　(3)　$\tan\theta = -\dfrac{12}{5}$

例題8　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(0° < \theta < 180°)$ のとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta + \cos^3\theta$　　(2)　$\sin\theta - \cos\theta$，$\tan\theta - \dfrac{1}{\tan\theta}$

練習8　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ $(0° < \theta < 180°)$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin\theta - \cos\theta$，$\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$，$\sin^4\theta + \cos^4\theta$ $\sin^4\theta - \cos^4\theta$ の値をそれぞれ求めなさい。

例題9　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

練習9　$0° < \theta < 180°$ とする。$4\cos\theta + 2\sin\theta = \sqrt{2}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

○ $180° - \theta$ の三角比

単位円周上を x 軸の正の部分から左回りに θ，$180° - \theta$ 移動した点をそれぞれ P，P′とすると，

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{P}'(\cos(180° - \theta),\ \sin(180° - \theta))$$

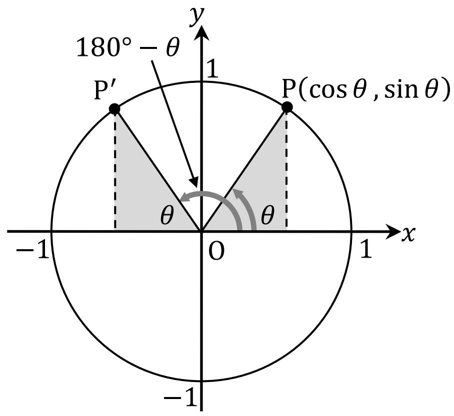
この 2 点は y **軸に関して対称**なので，

$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta,\ \sin(180° - \theta) = \sin\theta$$

が成り立つ。また，

$$\tan(180° - \theta) = \frac{\sin(180° - \theta)}{\cos(180° - \theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$$

も成り立っている。



$180° - \theta$ の三角比

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$$

例 9　$\cos 20° \sin 110° - \sin 20° \cos 110° + \tan 20° \tan 110°$ の値を求めなさい。

$\cos 20° \sin(180° - 70°) - \sin 20° \cos(180° - 70°) + \tan 20° \tan(180° - 70°)$

$= \cos 20° \sin 70° + \sin 20° \cos 70° - \tan 20° \tan 70°$

$= \cos 20° \sin(90° - 20°) + \sin 20° \cos(90° - 20°) - \tan 20° \tan(90° - 20°)$

$= \cos^2 20° + \sin^2 20° - \tan 20° \cdot \dfrac{1}{\tan 20°}$

$= 1 - 1 = 0$

例題10　次の式の値を求めなさい。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。

(1)　$\cos(90° - \theta) + \cos\theta + \cos(90° + \theta) - \sin(90° + \theta)$

(2)　$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin(180° - \theta) + \cos\theta + \cos(180° - \theta) + \sin\theta$

練習10 (1)　$\cos 160° - \cos 110° + \sin 70° - \sin 20°$ の値を求めなさい。

(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin(\theta + 90°) \times \tan(90° - \theta) \times \cos(180° - \theta) \times \tan(180° - \theta)$ を求めなさい。

○　三角方程式・不等式

ここでは $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を含んだ方程式・不等式の解法について学んでいく。

例 10　次の方程式を解きなさい。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

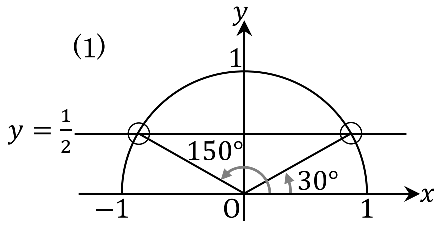
(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　　　(2)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$

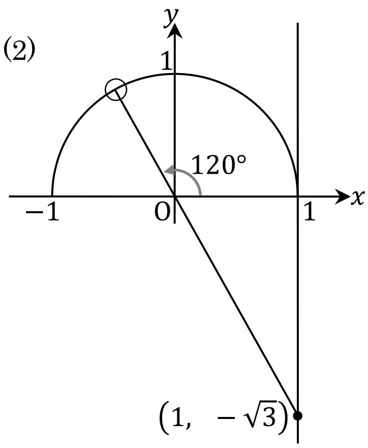
(1)　単位円周上の点の y 座標が $\dfrac{1}{2}$ になるところを探せばよい。

下図より，$\theta = 30°,\ 150°$

(2)　直線 $x = 1$ 上の点の y 座標が $-\sqrt{3}$ になるところを探せばよい。

右図より，$\theta = 120°$





例 11　方程式 $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$　$(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ を解きなさい。

$\cos\theta = t$ とおく。

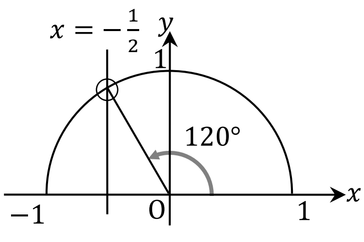
このとき，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より，$-1 \leqq t \leqq 1$

これより，

$$2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0 \iff 2t^2 - 3t - 2 = 0$$
$$\iff (2t+1)(t-2) = 0$$

$-1 \leqq t \leqq 1$ より，$t = -\dfrac{1}{2}$

よって，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2} \iff \theta = 120°$



例題11　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす θ を求めなさい。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　(3)　$\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

練習11　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす θ を求めなさい。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　(3)　$\tan\theta = -1$

例題12　次の方程式を解きなさい。

(1)　$2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$　　(2)　$\sin\theta\tan\theta=-\dfrac{3}{2}$ $(90°<\theta\leqq180°)$

練習12　次の方程式を解きなさい。

(1)　$2\sin^2\theta-\cos\theta-1=0$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$　　(2)　$\tan\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ $(0°\leqq\theta<90°)$

例 12　次の不等式を解きなさい。ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

(1)　$\cos\theta<\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\tan\theta\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

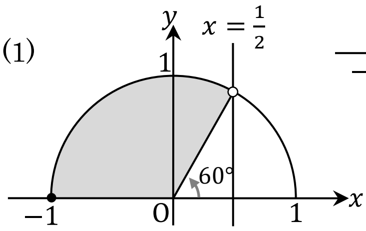
(1)　単位円周上の点の x 座標が $\dfrac{1}{2}$ より小さくなるところを探せばよい。

下図より，$60°<\theta\leqq180°$

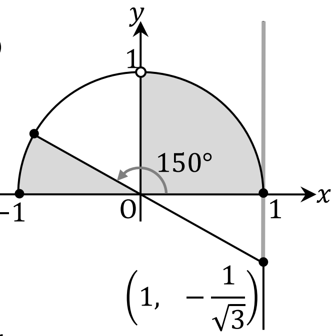
(2)　直線 $x=1$ 上の点の y 座標が $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 以上になるところを探せばよい。

右図より，$0°\leqq\theta<90°$，$150°\leqq\theta\leqq180°$

(1)



(2)



例 13　不等式 $2\sin^2\theta+3\sin\theta-2<0$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ を解きなさい。

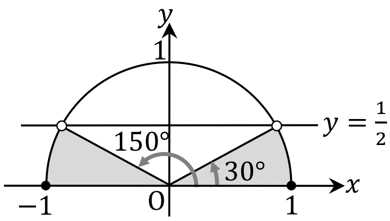
$\sin\theta=t$ とおく。

このとき，$0°\leqq\theta\leqq180°$ より，$0\leqq t\leqq1$

これより，

$$\begin{aligned}2\sin^2\theta+3\sin\theta-2<0 &\iff 2t^2+3t-2<0\\ &\iff (2t-1)(t+2)<0\end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq1$ より，$0\leqq t<\dfrac{1}{2}$



よって，$0\leqq\sin\theta<\dfrac{1}{2}$　$\iff$　$0°\leqq\theta<30°$，$150°<\theta\leqq180°$

例題13 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めなさい。

(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3) $\tan\theta < \sqrt{3}$

練習13 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めなさい。

(1) $\sqrt{2}\sin\theta - 1 \leqq 0$　　(2) $2\cos\theta + 1 > 0$　　(3) $\tan\theta > -1$

例題14 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を解きなさい

(1) $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 \leqq 0$　　(2) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta < 3$

練習14 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を解きなさい

(1) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta > 0$　　(2) $4\cos^2\theta + \left(2 + 2\sqrt{2}\right)\sin\theta > 4 + \sqrt{2}$

例題15 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。x の 2 次方程式 $x^2 - 2\sqrt{2}(\cos\theta)x + \cos\theta = 0$ が，異なる 2 つの実数解を持ち，それらがともに正となるような θ の値の範囲を求めなさい。

練習15 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。x の 2 次方程式 $x^2 + 2(\sin\theta)x + \cos^2\theta = 0$ が，異なる 2 つの実数解を持ち，それらがともに負となるような θ の値の範囲を求めなさい。

○　最大・最小

例 14　関数 $y=\cos^2\theta+\cos\theta+1\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の最大値，最小値を求めなさい。

$\cos\theta=t$ とおく。このとき，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$-1 \leqq t \leqq 1$

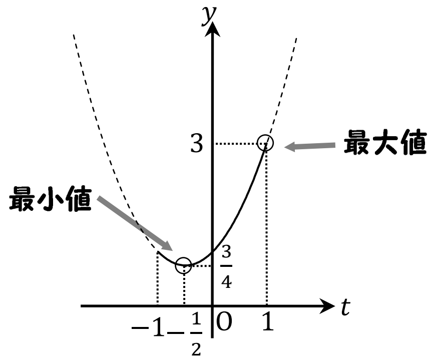
よって，

$y=\cos^2\theta+\cos\theta+1\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ) \iff y=t^2+t+1\ (-1 \leqq t \leqq 1)$

$y=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ より，

$t=1$ すなわち $\theta=0^\circ$ のとき，最大値 3

$t=-\dfrac{1}{2}$ すなわち $\theta=120^\circ$ のとき，最小値 $\dfrac{3}{4}$



例題16　$30^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta+\cos\theta+1$ の最大値，最小値を求めなさい。また，そのときの θ の値も求めなさい。

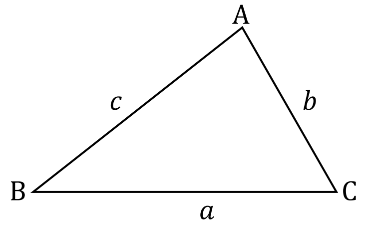
練習16　次の関数の最大値・最小値，およびそのときの θ の値を求めなさい。

(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$y=4\cos^2\theta+4\sin\theta+5$

(2)　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき，$y=2\tan^2\theta-4\tan\theta+3$

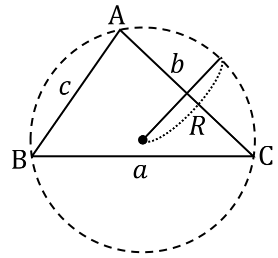
三角比の応用

ここでは三角形を計量するための様々な定理を学んでいく。なお，ここでは△ABCの3つの角の大きさをA，B，Cで表し，その対辺の長さをそれぞれa，b，cと表すこととする。



§1 正弦定理

まずは定理を紹介する。



正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

（Rは△ABCの外接円の半径）

証明

まず，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$を示す。

△ABCの外接円の中心をOとする。

（ⅰ） $0<A<90°$のとき

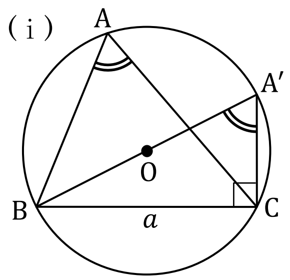
直線BOと円の交点のうち，Bと異なる方をA′とすると，

円周角の定理より，$A=A'$

また，線分A′Bは円の直径となるので，$\angle \mathrm{A'CB}=90°$

よって，$\sin A=\sin A'=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{A'B}}=\dfrac{a}{2R}$

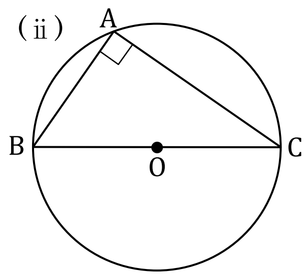
これより，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$が成り立つ。



（ⅱ） $A=90°$のとき

$\mathrm{BC}=2\mathrm{R}=a$

$\sin A=\sin 90°=1$より，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$が成り立つ。



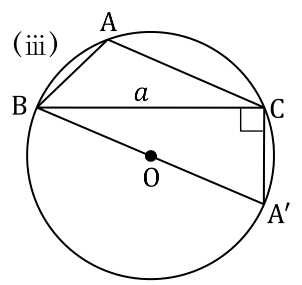
（ⅲ） $90°<A<180°$のとき

直線BOと円の交点のうち，Bと異なる方をA′とすると，

四角形ABA′Cは円Oに内接しているので，$A+A'=180°$

また，線分A′Bは円の直径となるので，$\angle \mathrm{A'CB}=90°$

よって，$\sin A=\sin(180°-A')=\sin A'=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{A'B}}=\dfrac{a}{2R}$



これより，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つ。

以上より，$0^\circ<A<180^\circ$ において，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つ。

同様に，$\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$ も証明できるので，定理は成り立つ。

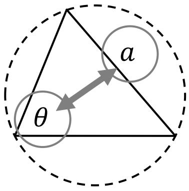
例 1　△ABC において，外接円の半径を R とする。次のものを求めなさい。

(1)　$A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$b=2$ のとき，R と a　　(2)　$B=45^\circ$，$b=2$，$c=\sqrt{6}$ のとき，C と A

正弦定理の使いどころは，以下の 2 点になります。

① ある角とその対辺のペアが分かっている。

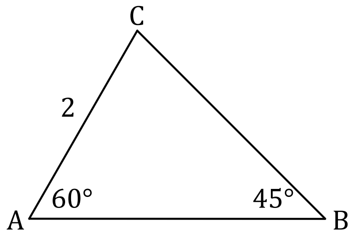
② 外接円の半径が分かっている，または問われている。



(1)　正弦定理より

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{\mathrm{BC}}{\sin 60^\circ}=2R \iff 2\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{BC}=2R$$

よって，$\mathrm{BC}=\sqrt{6}$，$R=\sqrt{2}$



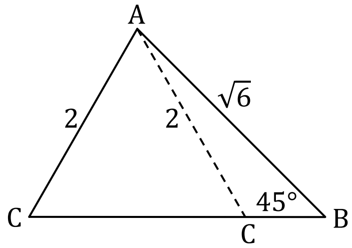
(2)　正弦定理より

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin C} \iff \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ<C<180^\circ$ より，$C=60^\circ$，120°

$C=60^\circ$ のとき，$A=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$

$C=120^\circ$ のとき，$A=180^\circ-45^\circ-120^\circ=15^\circ$



例題1　△ABC において，外接円の半径を R とする。次のものを求めなさい。

(1)　$b=4$，$B=30^\circ$，$C=105^\circ$ のとき a と R

(2)　$a=\sqrt{6}$，$b=2$，$A=60^\circ$ のとき B と C

(3)　$c=R$，$B=20^\circ$ のとき A

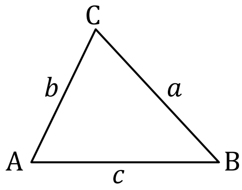
練習1　△ABC において，外接円の半径を R とする。次のものを求めなさい。

(1)　$A=60^\circ$，$C=45^\circ$，$a=3$ のとき c と R

(2)　$a=\sqrt{2}$，$B=50^\circ$，$R=1$ のとき A と C

§2　余弦定理

まずは定理を紹介する。



余弦定理①

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

証明

座標平面を用いて示す。

A$(0,\ 0)$，B$(c,\ 0)$，C$(p,\ q)$ とする。

$(\text{左辺}) = a^2 = \text{BC}^2 = (p-c)^2 + q^2$　…①

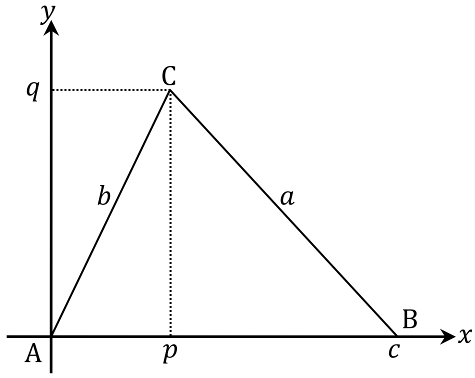
また，$\cos A = \dfrac{p}{b}$　⇔　$p = b\cos A$

$b^2 = p^2 + q^2$

これより，

$(\text{右辺}) = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = p^2 + q^2 + c^2 - 2pc$

$= (p-c)^2 + q^2$　…②

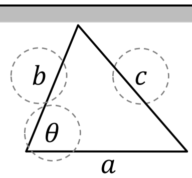


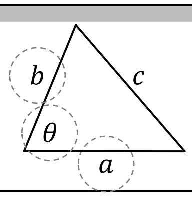
①，②より，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成り立つ。

例2　△ABC において，次のものを求めなさい。

(1)　$b = 2$，$c = 3$，$A = 120°$ のとき，a　　(2)　$B = 45°$，$b = 2$，$c = \sqrt{6}$ のとき，a

余弦定理は，2 辺の長さと 1 つの角の大きさが分かっているときに，使うことができます。

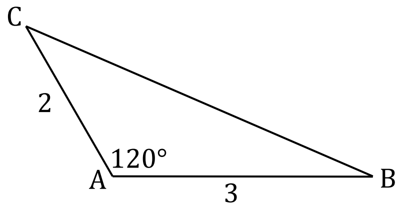




(1)　余弦定理より，

$a^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120° = 19$

$a > 0$ より，$a = \sqrt{19}$

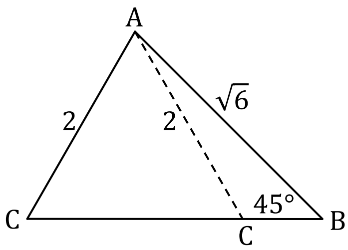


(2)　余弦定理より，

$4 = a^2 + 6 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{6} \cdot \cos 45°$

⇔　$a^2 - 2\sqrt{3}a + 2 = 0$

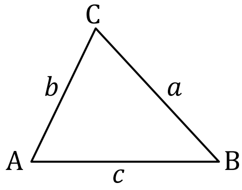
⇔　$a = \sqrt{3} \pm 1$



余弦定理は，3 辺の長さが分かっている際に，それぞれの角の余弦の値を求めるときにも用いられる。このときは，下のように「cos〇 =」に変形して使われる。

余弦定理②

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

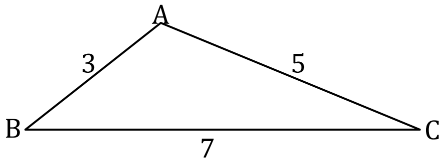


例 3　△ABC において，$a = 7$，$b = 5$，$c = 3$ のとき，A を求めなさい。

余弦定理より，

$$\cos A = \frac{9 + 25 - 49}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$0° < A < 180°$ より，$A = 120°$



三角形の決定条件

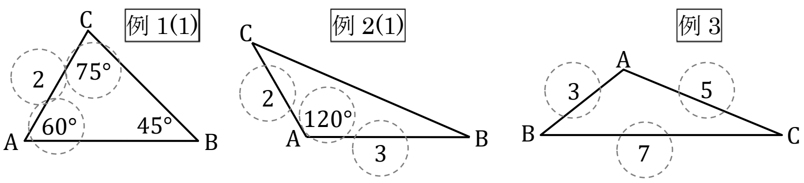
例 1(1)，例 2(1)，例 3 は与えられた条件に対し答えが 1 通りに定まるのに対し，例 1(2)，例 2(2)では，答えが 2 通り出てくる。この 2 つの違いに，実は中学で学んだ『**合同条件**』が深く関係している。

合同条件

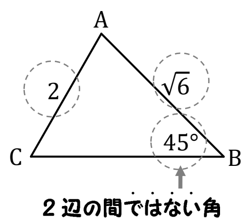
① 3 辺がそれぞれ等しい。
② 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい。
③ 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

合同条件を満たしていれば，どの 2 組の三角形も常に合同になる。
つまり，合同条件を満たしている三角形は**「ただ 1 通りに決定される」**ということを意味している。
例 1(1)，例 2(1)，例 3 はそれぞれ，

例 1(1)　⇒　合同条件③
例 2(1)　⇒　合同条件②
例 3　　⇒　合同条件①



を満たしているが，例 1(2)，例 2(2)は「2 辺とその間ではない 1 つの角」なので，三角形が 1 つの決定できず，答えが 2 通り現れる。



例題2　△ ABCにおいて，次のものを求めなさい。

(1)　$A=60°$，$b=5$，$c=3$のときa

(2)　$a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$のときA

(3)　$a=2$，$b=\sqrt{6}$，$B=60°$のときc

練習2　△ ABCにおいて，次のものを求めなさい。

(1)　$b=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{3}$，$A=45°$のときaとC

(2)　$a=1+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$のときB

(3)　$a=2$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$C=30°$のときb

例題3　△ABCにおいて，次のものを求めなさい。

(1)　$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}-1$，$A=45°$のときa，B，C

(2)　$a=1+\sqrt{3}$，$b=2$，$c=\sqrt{6}$のときA，B，C

練習3　△ ABCにおいて，次のものを求めなさい。

(1)　$b=2(\sqrt{3}-1)$，$c=2\sqrt{2}$，$A=135°$のときa，B，C

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}+1$のときA，B，C

例題4　△ ABCにおいて，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$A=30°$のとき，c，B，Cを求めなさい。

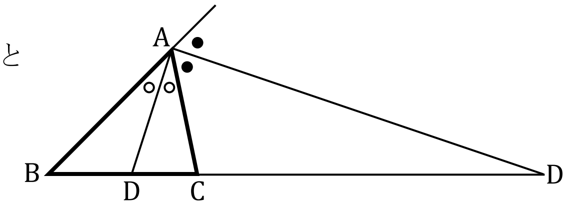
練習4　△ ABCにおいて，$a=1+\sqrt{3}$，$b=2$，$B=45°$のとき，c，A，Cを求めなさい。

○　三角形の内角と外角の二等分線

角の二等分線と比

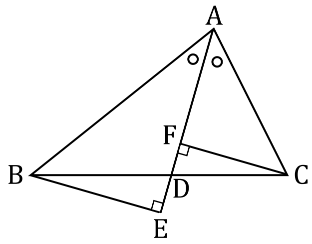
△ABCの∠Aの内角または外角の二等分線と辺BCとの交点をDとすると

BD : DC = AB : AC



証明(内角の二等分線に関して)

B，Cから直線ADに垂線を下ろし，垂線の足をそれぞれE，Fとする。



△ABEと△ACFにおいて

仮定より，∠BAE = ∠CAF，∠AEB = ∠AFC = 90°

2組の角がそれぞれ等しいので，△ABE∽△ACF

対応する辺の比は等しいので，AB : AC = BE : CF　…①

△BEDと△CFDにおいて

∠BDE = ∠CDF (対頂角)，∠DEB = ∠DFC = 90°

2組の角がそれぞれ等しいので，△BED∽△CFD

対応する辺の比は等しいので，BD : CD = BE : CF　…②

①，②より，BD : DC = AB : AC

外角の二等分線に関しても同様に垂線を下ろすことで証明できる。

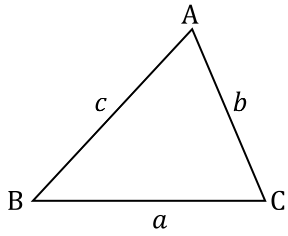
例題5　△ABCにおいて，AB = 15，BC = 18，AC = 12とし，頂角Aの二等分線と辺BCの交点をDとする。線分BD，ADの長さを求めなさい。

練習5　△ABCの∠Aの二等分線と辺BCの交点をDとする。次の各場合について，線分BD，ADの長さを求めなさい。

(1)　AB = 6，BC = 5，CA = 4　　　(2)　AB = 6，BC = 10，$B = 120°$

○　三角形の成立条件

2 点B，C を結ぶ最短経路は線分 BC となるので，△ABC において以下の関係が成り立つ。



$\mathrm{BC} < \mathrm{AC} + \mathrm{AB} \iff a < b + c$ …①

他の辺に関しても同様に，$b < c + a$ …②，$c < a + b$ …③ が成り立つ。

②，③は，$b - c < a$，$-(b - c) < a$ と変形できるので，この 2 式をまとめると

$|b - c| < a$ …④

となる。①，④より，△ABC において次の関係式が成り立つ。

$|b - c| < a < b + c$

これはつまり，**「三角形のある辺の長さは,残りの 2 辺の長さの和と差に挟まれる」**ということである。

逆に a，b，c がこの関係式を満たせば，a，b，c を 3 辺の長さとする△ABC が存在する。

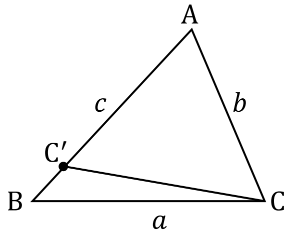
三角形の成立条件

3 数 a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が成立する条件は，

$$|b - c| < a < b + c$$

○　三角形の辺と角の関係

△ABC において，$b < c$ とすると，辺 AB 上に $\mathrm{AC} = \mathrm{AC'}$ となるような点 C′ をとることができる。このとき，



$\angle \mathrm{AC'C} = \angle \mathrm{C'BC} + \angle \mathrm{BCC'}$

△ACC′ は二等辺三角形なので，$\angle \mathrm{AC'C} = \angle \mathrm{ACC'}$

これを用いると，以下の関係式が成り立つ。

$\angle \mathrm{ACB} > \angle \mathrm{ACC'} = \angle \mathrm{AC'C} = \angle \mathrm{C'BC} + \angle \mathrm{BCC'} > \angle \mathrm{C'BC} = \angle \mathrm{ABC}$

これはつまり，△ABC において「$b < c$ ならば $\angle \mathrm{B} < \angle \mathrm{C}$」が成り立つということである。

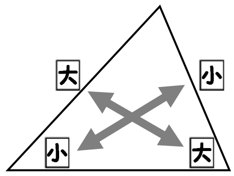
逆に，△ABC において「$\angle \mathrm{B} < \angle \mathrm{C}$ ならば $b < c$」も成り立っている。

以上をまとめると，三角形の辺と角には次のような関係が成り立つ。

三角形の辺と角の大小

・大きい辺に向かい合う角は，小さい辺に向かい合う角より大きい。

・大きい角に向かい合う辺は，小さい角に向かい合う辺より大きい。



例題6　△ABC において，$\dfrac{\sin A}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}=\sin C$ が成り立つとき

(1)　△ABCの内角のうち，最も大きい角の大きさを求めなさい。

(2)　△ABCの内角のうち，2 番目に大きい角の正接を求めなさい。

練習6　△ABC において，$\dfrac{5}{\sin A}=\dfrac{8}{\sin B}=\dfrac{7}{\sin C}$ が成り立つとき

(1)　△ABCの内角のうち，2 番目に大きい角の大きさを求めなさい。

(2)　△ABCの内角のうち，最も小さい角の正接を求めなさい。

例題7　$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=x$，$\mathrm{CA}=3$ である△ ABC がある。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めなさい。

(2)　△ABC が鈍角三角形であるとき，x の値の範囲を求めなさい。

練習7　$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{BC}=x-3$，$\mathrm{CA}=x+3$ である△ ABC がある。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めなさい。

(2)　△ ABC が鋭角三角形であるとき，x の値の範囲を求めなさい。

例題8　$x>1$ とする。三角形の 3 辺の長さがそれぞれ x^2-1，$2x+1$，x^2+x+1 であるとき，この三角形の最大の角の大きさを求めなさい。

練習8　三角形の 3 辺の長さが x^2+3，$4x$，x^2-2x-3 である。

(1)　三角形が存在するための x の条件を求めなさい。

(2)　三角形の最大の内角の大きさを求めなさい。

例 4　△ABC において等式 $c\cos B = b\cos C$ が成り立つとき，この三角形はどのような形ですか。

まずは辺の長さのみの関係式を作ります。

解①

余弦定理より，$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

よって，$c\cos B = b\cos C \iff c\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\iff c^2+a^2-b^2 = a^2+b^2-c^2$

$\iff b^2 = c^2$

$b>0$，$c>0$ より，$b=c$

よって，△ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形。

次に角の大きさのみの関係式を作ります。

解②

正弦定理より，$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ （R は外接円の半径）

よって，$b = 2R\sin B$，$c = 2R\sin C$

これより，$c\cos B = b\cos C \iff 2R\sin C\cos B = 2R\sin B\cos C$

$\iff \sin C\cos B = \sin B\cos C$

$\cos B\cos C \neq 0$ より，$\dfrac{\sin C}{\cos C} = \dfrac{\sin B}{\cos B} \iff \tan C = \tan B$

$0° < B < 180°$，$0° < C < 180°$ より，$B = C$

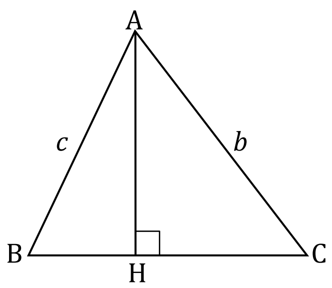
よって，△ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形。

最後に図形の性質を用いて解きます。

解③

$c\cos B = b\cos C$ より，$\cos B$，$\cos C$ の符号は一致する。
$\cos B$，$\cos C$ がともに負になるときは B，C はともに鈍角となるので不適。よって，$\cos B$，$\cos C$ がともに正となる。
つまり，B，C はともに鋭角となる。

これより，A から BC に下ろした垂線の足 H は線分 BC 上に存在する。よって，



$\cos B = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} \iff c\cos B = \mathrm{BH}$　　$\cos C = \dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AC}} \iff b\cos C = \mathrm{CH}$

$c\cos B = b\cos C$ より，$\mathrm{BH} = \mathrm{CH}$

これより，$\triangle\mathrm{ABH} \equiv \triangle\mathrm{ACH}$ （$\because \mathrm{BH}=\mathrm{CH}$，AH 共通，$\angle\mathrm{AHB} = \angle\mathrm{AHC} = 90°$）

対応する辺の長さは等しいので，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$

よって，△ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形。

例題9　△ ABC において次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形ですか。

(1)　$a\sin A + c\sin C = b\sin B$　　　(2)　$b\cos B = c\cos C$

練習9　△ ABC において次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形ですか。

(1)　$a\sin A = b\sin B$　　　(2)　$\dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{\cos B}{b} = \dfrac{\cos C}{c}$　　　(3)　$\sin A\cos A = \sin B\cos B + \sin C\cos C$

例題10　△ ABC において，次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$a\sin A - b\sin B = c(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$$

練習10　△ ABC において，次の等式が成り立つことを証明しなさい。

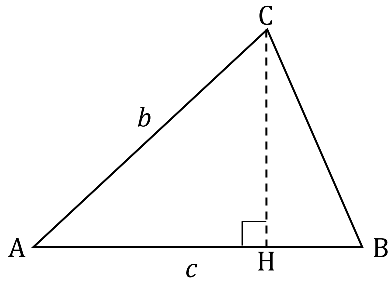
(1)　$(b-c)\sin A + (c-a)\sin B + (a-b)\sin C = 0$

(2)　$c(\cos B - \cos A) = (a-b)(1+\cos C)$

(3)　$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = 2\sin B\sin C\cos A$

§3 三角形の面積

まず，右図のような三角形の面積 S を求める。



三角形の面積は $(\text{底辺})\times(\text{高さ})\div 2$ で求まるので，C から AB に下ろした垂線の足を H とすると，

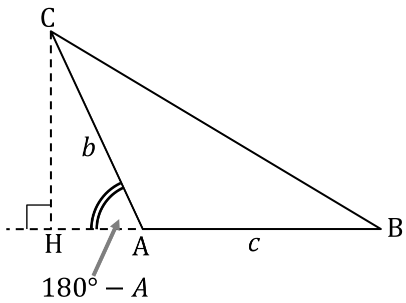
$$\sin A=\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AC}} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{CH}=b\sin A$$

となるので，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

となる。

また，∠A が鈍角のときも同様に垂線の足を H とすると，



$$\sin(180°-A)=\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AC}} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{CH}=b\sin(180°-A)=b\sin A$$

となるので，面積 S は鋭角のときと同じに与えられる。

三角形の面積

△ ABC の面積 S は次の式で与えられる。

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

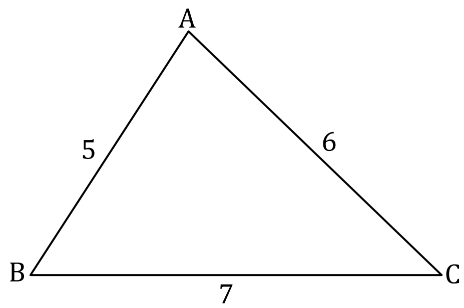
例 5　△ ABC において，$a=7$，$b=6$，$c=5$ のとき，面積 S を求めなさい。

余弦定理より，

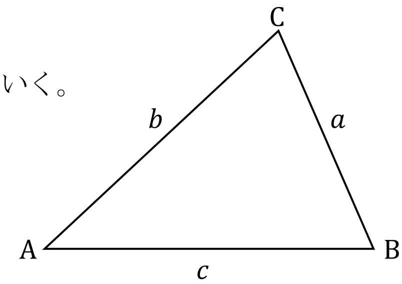
$$\cos A=\frac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6}=\frac{1}{5}$$

$\sin A>0$ より，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

よって，$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$



○　ヘロンの公式



ここでは△ABC の面積 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ を辺の長さのみを用いて表していく。

つまり，$\sin A$ を a，b，c を用いて表すことを目標とする。

まず，余弦定理より，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\sin A>0$ より，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$

よって，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\sqrt{1-\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(bc+\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)\left(bc-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{16}}$$

ここで，$a+b+c=2t$ とおくと，

$$S=\sqrt{\frac{2t(2t-2a)(2t-2c)(2t-2b)}{16}}=\boxed{\sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}}$$

これは，ヘロンの公式と呼ばれる面積公式で，**三角形の３辺の長さが与えられているとき**に用いられる。

ヘロンの公式

△ABC において，$\dfrac{a+b+c}{2}=t$ のとき，面積 S は次の式で与えられる。

$$S=\sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}$$

これを用いると，$\boxed{\text{例 5}}$は

$\dfrac{5+6+7}{2}=9$ より，$S=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=\sqrt{9\cdot4\cdot3\cdot2}=6\sqrt{6}$

と簡単に求めることができる。

例 6　ABCにおいて，$a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{5}$ のとき，面積 S を求めなさい。

まずは $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ を用いて解きます。

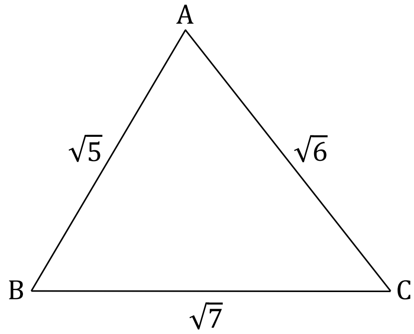
解①

余弦定理より，

$$\cos A=\frac{5+6-7}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{30}}$$

$\sin A>0$ より，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{2}{15}}=\sqrt{\frac{13}{15}}$

よって，$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{13}{15}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$



次にヘロンの公式を用いてみます。

解②

ヘロンの公式より，

$$S=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}{2}-\sqrt{5}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}{2}-\sqrt{6}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}{2}-\sqrt{7}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sqrt{42}+8}{4}\cdot\frac{2\sqrt{42}-8}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{26}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

いかがでしょうか？ いくら3辺の長さが分かっているとは言っても，この場合「ヘロンの公式」を使うのは結構大変ですよね。基本的には，**3辺の長さが全て有理数のとき**に使うようにするとよいでしょう。

例題11　次のような△ABCの面積 S を求めなさい。

(1)　$a=3$，$c=2\sqrt{2}$，$B=45°$　　(2)　$a=6$，$b=5$，$c=4$

練習11　次のような△ABCの面積 S を求めなさい。

(1)　$a=10$，$b=7$，$C=150°$　　(2)　$a=5$，$b=9$，$c=8$

例題12　次のような四角形 ABCD の面積 S を求めなさい。

(1)　平行四辺形 ABCD で，対角線の交点を O とする。

$\mathrm{AC}=10$，$\mathrm{BD}=6\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOD}=135°$

(2)　AD // BC の台形 ABCD で，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=8$，$\mathrm{BD}=7$，$\angle\mathrm{A}=120°$

練習12　次のような四角形 ABCD の面積 S を求めなさい(O は AC と BD の交点)。

(1)　平行四辺形 ABCD で，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{AC}=7$

(2)　平行四辺形 ABCD で，$\mathrm{AC}=p$，$\mathrm{BD}=q$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$

(3)　AD // BC の台形 ABCD で，$\mathrm{BC}=9$，$\mathrm{CD}=8$，$\mathrm{CA}=4\sqrt{7}$，$\angle\mathrm{D}=120°$

例題13(1)　△ABC において，$\mathrm{AB}=8$，$\mathrm{AC}=5$，$\angle\mathrm{A}=120°$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めなさい。

(2)　1 辺の長さが 1 の正八角形の面積を求めなさい。

練習13(1)　△ABC において，$\angle\mathrm{A}=60°$，$\mathrm{AB}=7$，$\mathrm{AC}=5$ のとき，∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D とすると $\mathrm{AD}=\boxed{}$となる。

(2)　半径 a の円に内接する正八角形の面積 S を求めなさい。

(3)　1 辺の長さが 1 の正十二角形の面積 S を求めなさい。

例題14　面積が 1 である△ ABC の辺 AB，BC，CA 上にそれぞれ点 D，E，F を

$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=\mathrm{CF}:\mathrm{FA}=t:(1-t)$ (ただし，$0<t<1$)となるようにとる。

(1)　△ ADF の面積を t を用いて表しなさい。

(2)　△ DEF の面積を S とするとき，S の最小値とそのときの t の値を求めなさい。

練習14　1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の辺 AB，BC，CA 上にそれぞれ頂点と異なる点 D，E，F をとり，$\mathrm{AD}=x$，$\mathrm{BE}=2x$，$\mathrm{CF}=3x$ とする。

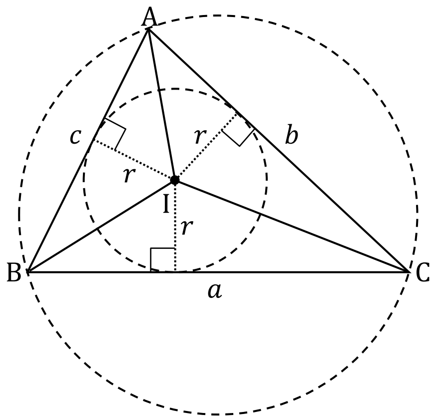
(1)　△ DEF の面積 S を x で表しなさい。

(2)　(1)の S を最小にする x の値と最小値を求めなさい。

○ 三角形の外接円，内接円と面積

△ABCの内接円の中心(内心)をIとすると，Iから各辺に下ろした垂線の長さがrとなる。

これより，△ABCの面積をSとすると，



$$S = \triangle\mathrm{IAB} + \triangle\mathrm{IBC} + \triangle\mathrm{ICA} = \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb$$

$$= \frac{r}{2}(a+b+c)$$

が成り立つ。

また，正弦定理より， $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ となるので，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

が成り立つ。

内接円,外接円と面積

△ ABCにおいて，内接円の半径をr，外接円の半径をRとするとき，

面積Sは次の式で与えられる。

$$S = \frac{r}{2}(a+b+c) = \frac{abc}{4R}$$

例 7 △ABCにおいて，$a=7$，$b=6$，$c=5$のとき，△ABCの外接円，内接円の半径を求めなさい。

外接円の半径をR，内接円の半径をrとする。

例 5 より，三角形の面積Sは， $S = 6\sqrt{6}$

よって，$S = \dfrac{abc}{4R} \iff 6\sqrt{6} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{4R} \iff R = \dfrac{35\sqrt{6}}{24}$

$$S = \frac{r}{2}(7+6+5) \iff 6\sqrt{6} = 9r \iff r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

外接円の半径は，△ABCにおいて正弦定理を用いて，

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} \iff R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$$

としてもよい。

例題15　△ABCにおいて，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=1$とする。次のものを求めなさい。

(1)　$\cos B$，$\sin B$　　(2)　△ABCの面積S

(3)　△ABCの内接円の半径r　　(4)　△ABCの外接円の半径R

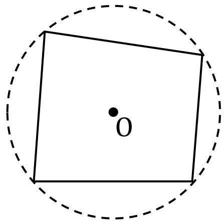
練習15　△ABCにおいて，$a=1+\sqrt{3}$，$b=2$，$C=60°$とする。次のものを求めなさい。

(1)　辺ABの長さ　　(2)　∠Bの大きさ　　(3)　△ABCの面積

(4)　外接円の半径　　(5)　内接円の半径

§4　円に内接する四角形

円 O が四角形のすべての頂点を通るとき，この四角形は円 O に**内接する**，または，円 O は四角形に**外接する**という。三角形とは違い，四角形の場合はすべてが円に内接するとは限らない。



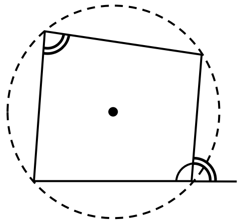
円に内接する四角形の性質として次のようなものがある。

円に内接する四角形

円に内接する四角形の性質について次のことが成り立つ。

（ⅰ）　対角の和は 180° である。

（ⅱ）　外角は隣り合う内角の対角に等しい。



証明

$\angle\mathrm{BAD} = a$，$\angle\mathrm{BCD} = b$ とすると，

弧 BCD に対する中心角が $2a$，弧 BAD に対する中心角が $2b$

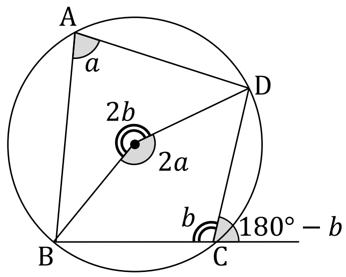
となるので，$2a + 2b = 360°$

よって，$a + b = 180°$

つまり，円に内接する四角形の対角の和は 180° となる。

また，∠BCD の外角は $180° - b$ となり，これは a となるので，

外角は隣り合う内角の対角に等しい。



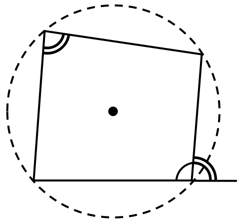
円に内接する四角形の性質は逆も成り立っている。

四角形が円に内接するための条件

次の(ⅰ)または(ⅱ)が成り立つ四角形は円に内接する。

（ⅰ）　対角の和は 180° である。

（ⅱ）　外角は隣り合う内角の対角に等しい。



証明

右図の四角形 ABCD において ∠B + ∠D = 180°　…①とする。

ここで，△ABC の外接円を考え，弧 AC 上の点 B を含まない部分に

点 D′ をとると，円に内接する四角形の性質より，∠B + ∠D′ = 180°　…②

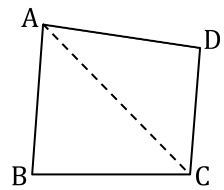
①，②より，∠D = ∠D′

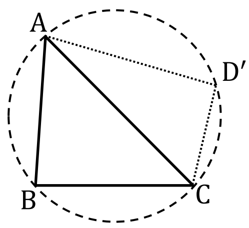
円周角の定理の逆より点Dはこの△ABCの外接円の周上にあり，

四角形ABCDは円に内接する。つまり，(ⅰ)が成り立つ。

(ⅱ)が成立している四角形では，(ⅰ)が成立しており，

(ⅱ)のとき四角形は円に内接する。





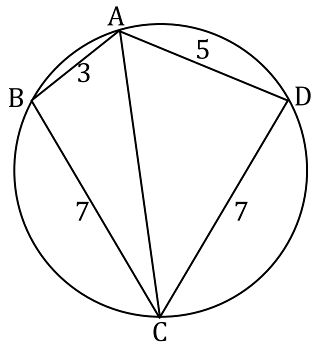
例 8　四角形 ABCD は円 O に内接していて，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CD}=7$，$\mathrm{DA}=5$ とする。
(1)　対角線 AC の長さを求めなさい。　　　(2)　四角形 ABCD の面積 S を求めなさい。

(1)　△ ABC において，余弦定理より

$$\mathrm{AC}^2=9+49-2\cdot 3\cdot 7\cos B=58-42\cos B$$

△ ACD において，余弦定理より

$$\mathrm{AC}^2=25+49-2\cdot 5\cdot 7\cos(180^\circ-B)=74+70\cos B$$



よって，$58-42\cos B=74+70\cos B \iff \cos B=-\dfrac{1}{7}$

これより，$\mathrm{AC}^2=58-42\left(-\dfrac{1}{7}\right)=64$

$\mathrm{AC}>0$ より，$\mathrm{AC}=8$

(2)　$\sin B=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{7}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

これより，$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 7\sin B+\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\sin(180^\circ-B)$

$$=28\sin B$$

$$=28\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=16\sqrt{3}$$

もし,BD の長さも聞かれたら…

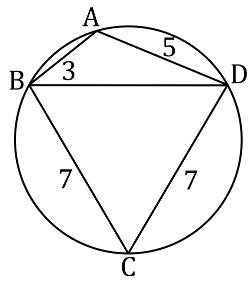
【方法①】もう一度，対角の和が 180° を使う。

△ BAD において，余弦定理より

$$\mathrm{BD}^2=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cos A=34-30\cos A$$

△ BCD において，余弦定理より

$$\mathrm{BD}^2=49+49-2\cdot 7\cdot 7\cos(180^\circ-A)=98+98\cos A$$



よって，$34-30\cos A=98+98\cos A \iff \cos A=-\dfrac{1}{2}$

よって，$\mathrm{BD}^2=34-30\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$　　　$\mathrm{BD}>0$ より，$\mathrm{BD}=7$

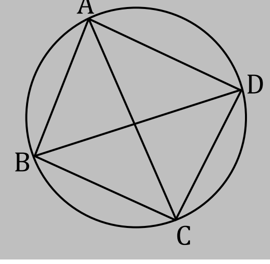
【方法②】『トレミーの定理』を利用する。

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

$$\iff 3\cdot 7+5\cdot 7=8\mathrm{BD}$$

$$\iff \mathrm{BD}=7$$

【トレミーの定理】
四角形 ABCD **が円に内接しているとき，**
$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$
が成り立つ。



例題16　円Oに内接する四角形ABCDは，$AB = 2$，$BC = 3$，$CD = 1$，$\angle ABC = 60°$を満たす。このとき，次のものを求めなさい。

(1)　線分ACの長さ　　(2)　辺ADの長さ

(3)　円Oの半径　　(4)　四角形ABCDの面積

練習16　円Oに内接する四角形ABCDは，$AD \parallel BC$，$AB = 3$，$BC = 5$，$\angle ABC = 60°$を満たす。このとき，次のものを求めなさい。

(1)　線分ACの長さ　　(2)　辺CDの長さ　　(3)　辺ADの長さ

(4)　円Oの半径　　(5)　四角形ABCDの面積

例題17　円に内接する四角形ABCDがある。$AB = 4$，$BC = 5$，$CD = 7$，$DA = 10$のとき

(1)　$\cos A$の値を求めなさい。　　(2)　四角形ABCDの面積を求めなさい。

練習17　円に内接する四角形ABCDがある。$AB = 1$，$BC = 3$，$CD = 3$，$DA = 2$のとき

(1)　$\cos B$の値を求めなさい。　　(2)　四角形ABCDの面積を求めなさい。

§5 空間図形の計量

例 9 全ての辺の長さが 2 である正四角錐 $\mathrm{A-BCDE}$ に内接する球の体積を求めなさい。

空間図形の問題を解く際には，**「平面を取り出す」**作業がとても大切になります。
これさえできれば，平面図形の問題として処理することができるからです。

解①(平面を取り出して解く)

BC，DE の中点をそれぞれ M，N，A から MN に下ろした垂線の足を H とすると，

$\mathrm{AM}=\mathrm{AN}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AH}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$

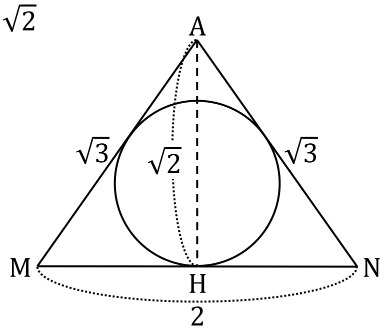
よって，$\triangle\mathrm{AMN}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$

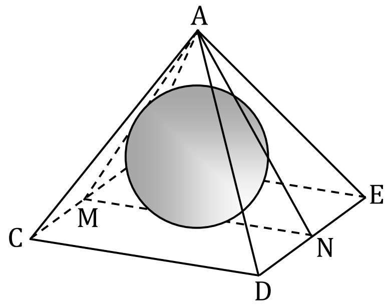
内接球の半径を r とすると，

$$\frac{r}{2}\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

以上より，内接球の体積は，$\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^3=\dfrac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$





半径 r の球の
体積：$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$
表面積：$S=4\pi r^2$

次に，空間図形の性質を使って解いてみます。

解②

内接球の中心を I，半径を r とする。

四面体の体積 V は，$V=\dfrac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

また，正四角錐 ABCDE = 四面体 IABC + 四面体 IABE
+ 四面体 IADE + 四面体 IACD + 四角錐 IBCDE

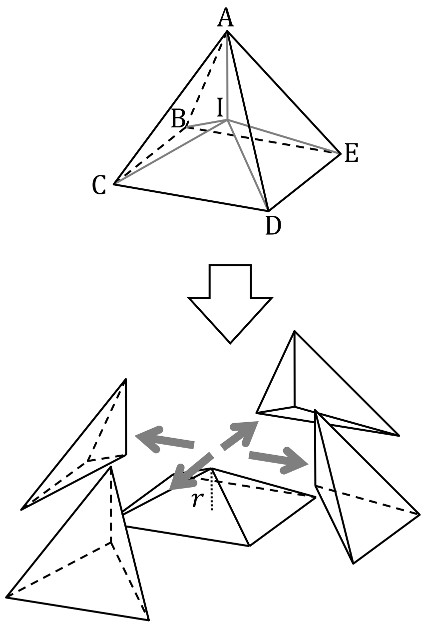
なので，

$$V=\frac{r}{3}\left(\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ABE}+\triangle\mathrm{ADE}+\triangle\mathrm{ACD}+\text{四角形 BCDE}\right)$$

$$=\frac{r}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin 60^\circ\times 4+2^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{3}+4}{3}r\quad\Leftrightarrow\quad r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

以上より，内接球の体積は，$\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^3=\dfrac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$



例題18 1辺の長さが6の正四面体OABCがある。辺OA，OB，OC上に，それぞれ点L，M，Nを$\mathrm{OL}=3$，$\mathrm{OM}=4$，$\mathrm{ON}=2$となるようにとる。このとき，$\triangle\mathrm{LMN}$の面積を求めなさい。

練習18 1辺の長さが6の正四面体ABCDについて，辺BC上で$2\mathrm{BE}=\mathrm{EC}$を満たす点をE，辺CDの中点をMとする。

(1) 線分AM，AE，EMの長さをそれぞれ求めなさい。

(2) $\angle\mathrm{EAM}=\theta$とおくとき，$\cos\theta$の値を求めなさい。

(3) $\triangle\mathrm{AEM}$の面積を求めなさい。

例題19 1辺の長さがaである正四面体ABCDがある。次の値をそれぞれaの式で表しなさい。

(1) Aから$\triangle\mathrm{BCD}$に下ろした垂線AHの長さ

(2) 正四面体ABCDの体積

(3) (1)のHに対して，Hから$\triangle\mathrm{ABC}$に下ろした垂線の長さ

練習19 1辺の長さが3の正三角形ABCを底面とし，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}=2$の四面体PABCがある。辺AB上の点Eと辺AC上の点Fが，$\mathrm{AE}=\mathrm{AF}=1$を満たす。

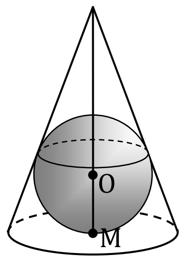
(1) 四面体PAEFの体積を求めなさい。

(2) 点Aから3点P，E，Fを通る平面に下ろした垂線の長さhを求めなさい。

例題20 水平な地面の地点Hに，地面に垂直にポールが立っている。2つの地点A，Bからポールの先端を見ると，仰角はそれぞれ$30°$と$60°$であった。また，地面上の測量ではA，B間の距離が20m，地点Hから2地点A，Bを見込む角度は$60°$であった。このとき，ポールの高さを求めなさい。ただし，目の高さは考えないものとする。

練習20 あるタワーが立っている地点Kと同じ標高の地点Aからタワーの先端の仰角を測ると$30°$であった。また，地点Aから$\mathrm{AB}=114$ (m)となるところに地点Bがあり，$\angle\mathrm{KAB}=75°$および$\angle\mathrm{KBA}=60°$であった。このとき，A，K間の距離は$\boxed{}$m，タワーの高さは$\boxed{}$mである。

例題21 図のように，高さ4，底面の半径$\sqrt{2}$の円錐が，球Oと側面で接し，底面の中心Mでも接している。



(1) 円錐の母線の長さを求めなさい。

(2) 球Oの半径を求めなさい。

(3) 球Oの体積Vと表面積Sを求めなさい。

練習21 底面の半径2，母線の長さ6の円錐が，球Oと側面で接し，底面の中心でも接している。この球の半径，体積，表面積をそれぞれ求めなさい。

例題22　半径 1 の球 O に正四面体 ABCD が内接している。このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，正四面体の頂点から底面の三角形に引いた垂線と底面の交点は，底面の三角形の外接円の中心であることを証明なしで用いてよい。

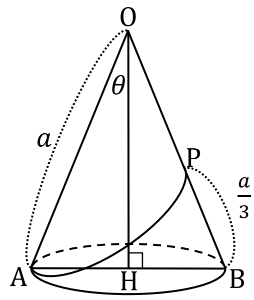
(1)　正四面体 ABCD の 1 辺の長さを求めなさい。

(2)　球 O と正四面体 ABCD の体積比を求めなさい。

練習22　1 辺の長さが a の正四面体に球が内接している。

(1)　球の半径を a を用いて表しなさい。

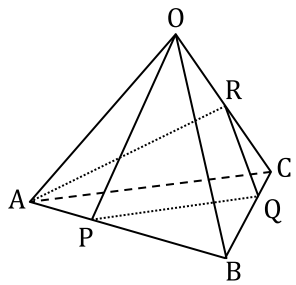
(2)　正四面体と球の体積比を求めなさい。



例題23　右の図の直円錐で，H は円の中心，線分 AB は直径，OH は円に垂直で

$\mathrm{OA} = a$，$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ とする。点 P が母線 OB 上にあり，$\mathrm{PB} = \dfrac{a}{3}$ とするとき，

点 A からこの直円錐の側面を通って点 P に至る最短経路の長さを求めなさい。



練習23　1 辺の長さが a の正四面体 OABC において，辺 AB，BC，OC 上にそれぞれ点 P，Q，R をとる。頂点 O から，P，Q，R の順に 3 点を通り，頂点 A に至る最短経路の長さを求めなさい。