

# 集合と論理

## §0 集合とは

今回は“ものの集まり”について考えていく。

まず、ここで言う“ものの集まり”とはどういうことかをもう少しはっきりさせておこう。

“ものの集まり”とは…

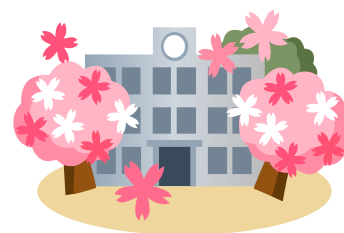
- ① 集まりを構成するもの1つ、1つが互いにはっきりと区別することができる
- ② その集まりの全体を指定する範囲が明確に与えられている

この条件を満たすものだとする。

例えば…

『現在,高校に通っている生徒の全体』

は“ものの集まり”である。



逆に…



『現在,高校に通っている生徒のうち,数学が得意な生徒の全体』

は、数学の得意、不得意の定義がはっきりせず、明確な範囲が与えられないため

“ものの集まり”にはならない。もちろん、「定期考査で必ず90点以上とる」というような定義がはっきり与えられればこれは“ものの集まり”と考えることはできる。

また、

『煙突からでている煙の全体』

は集まりを構成する1つ、1つが、互いにはっきり区別できないので、これも“ものの集まり”ではない。



以上のように考えられた“ものの集まり”をこれからは**集合**と呼ぶ。

これからこの“ものの集まり”について、あれこれと考えていこうというわけです。

# § 1 集合の基礎

先ほどの定義に従うと、

『豊島岡女子学園の生徒』

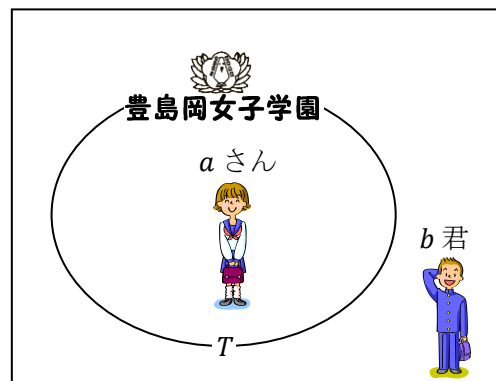
も立派な集合である。

今、この集合を  $T$  とおくと、この学校の生徒の  $a$  さんは集合  $T$  の要素であるといい、次のように表す。

$$a \in T$$

また、 $b$  君という男子校生がいたとすると  $b$  君は集合  $T$  の要素ではなく、次のように表す。

$$b \notin T$$



## ○ 集合の表し方

集合  $T$  の表し方は大きく分けて 2 通りある。

### ① 集合の要素を具体的に書き並べる方法

$$T = \{a \text{ さん}, a' \text{ さん}, a'' \text{ さん}, a''' \text{ さん}, \dots\}$$

しかし、この方法だと要素の数が多いたときに不便である。そのような場合は次の方法が便利である。

### ② 要素の条件を書き並べる方法

$$T = \{x | x \text{ は豊島岡女子学園の生徒}\}$$

**例** 12 の正の約数の集合を  $A$  とすると

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \text{ または } A = \{x | x \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$$

**例** 100 以下の奇数の集合を  $B$  とすると

$$B = \{1, 3, 5, \dots, 97, 99\} \text{ または } B = \{x | x \text{ は } 100 \text{ 以下の奇数}\}$$

$$\text{または } B = \{2x - 1 | 1 \leq x \leq 50, x \text{ は整数}\}$$

## ○ 部分集合

高校 1 年  $\bigcirc$  組も集合の 1 つと考えることができる。

この集合を  $C$  とすると、集合  $C$  は集合  $T$  の一部分である。

一般的に、2 つの集合  $C, T$  に対して、

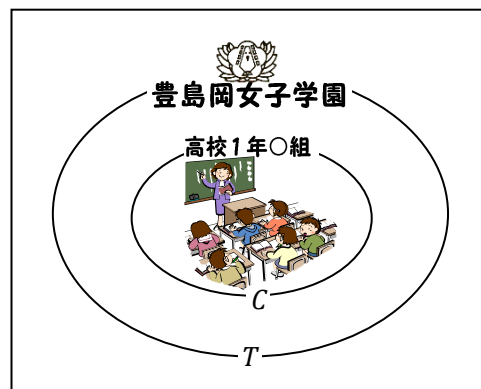
$C$  のどの要素も、 $T$  の要素である

とき、つまり、

$$x \in C \text{ ならば(必ず) } x \in T$$

のとき、集合  $C$  は集合  $T$  の部分集合といい、次のように表す。

$$C \subset T$$



また、**部分集合にはその集合自身も含まれる**。すなわち、集合  $T$  は  $T$  自身の部分集合である。つまり、 $T \subset T$  である。また、 $C \subset T$  かつ  $T \subset C$  が成立しているとき、集合  $C$  と集合  $T$  の要素は完全に一致している。このとき、2つの集合は**等しい**といい、

$$C = T$$

と表す。

○ **共通部分，和集合**

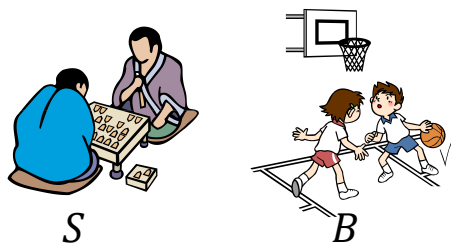
クラブも集合と考えることができる。

ここで2つの部活集合

$$S = \{x | x \text{ は将棋部の生徒}\}$$

$$B = \{x | x \text{ はバスケ部の生徒}\}$$

について考えよう。

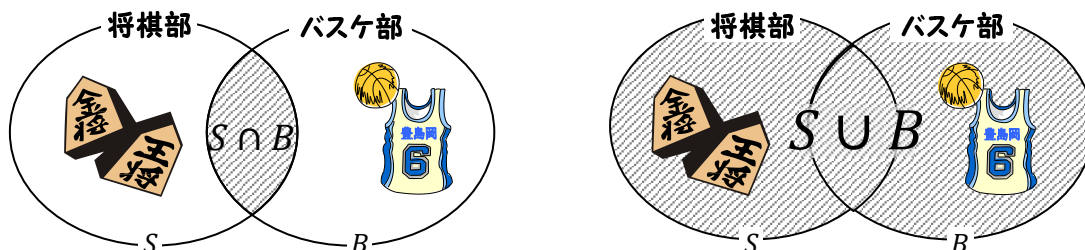


もし仮に、この2つの部活を兼部している人がいたとすると、兼部している人の集合を  $S$  と  $B$  の**共通部分**といい、次のように表す。

$$S \cap B$$

また、少なくともどちらか一方に所属している人の集合を  $S$  と  $B$  の**和集合**といい、次のように表す。

$$S \cup B$$



これは、当然3つ以上の集合に対しても同様に考えることができる。2つの部活に兼部しており、かつ高校1年〇組の生徒の集合は  $S, B, C$  の共通部分といい、 $S \cap B \cap C$  と表され、 $S, B, C$  の少なくとも1つに所属している生徒の集合は  $S, B, C$  の和集合といい、 $S \cup B \cup C$  と表される。



ここで、将棋部とバスケ部を兼部している生徒がいなかったとすると、集合  $S \cap B$  は1つも要素を持たないことになる。このような集合を**空集合**といい、記号  $\emptyset$  で表す。つまり

$$S \cap B = \emptyset$$

となる。なお、ある集合の部分集合を考える際には、 $\emptyset$  もその中に含まれる。

**例**  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  のとき,  
 $A \cap B = \{5, 7\}$ ,  $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

**例**  $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \text{ は実数}\}$ ,  $B = \{x \mid -1 < x < 3, x \text{ は実数}\}$  のとき,  
 $A \cap B = \{x \mid -1 < x \leq 2, x \text{ は実数}\}$ ,  $A \cup B = \{x \mid -2 \leq x < 3, x \text{ は実数}\}$

**例** 集合  $\{1, 2, 3\}$  の部分集合は  
 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$  の 8 個ある。

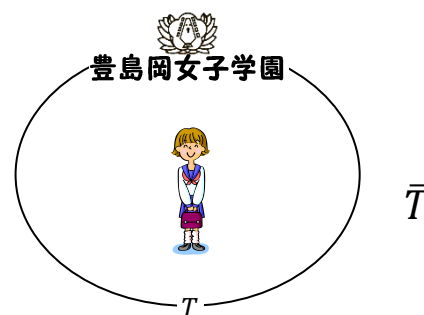
### ○ 補集合

ここで全国の高中生全体の集合  $H$

$$H = \{x \mid x \text{ は高校生}\}$$

を考えると、集合  $T$  は集合  $H$  の部分集合である。

このとき、豊島岡女子学園以外的高中生、つまり  $T$  に所属していない生徒は右図の斜線部分となり、これを  $H$  に関する  $T$  の**補集合**といい、 $\bar{T}$  で表す。また、このとき集合  $H$  を**全体集合**という。



### ○ 集合の性質

集合  $A, B$  が全体集合  $U$  の部分集合であるとき、次のような関係が成立している。

**集合の性質**

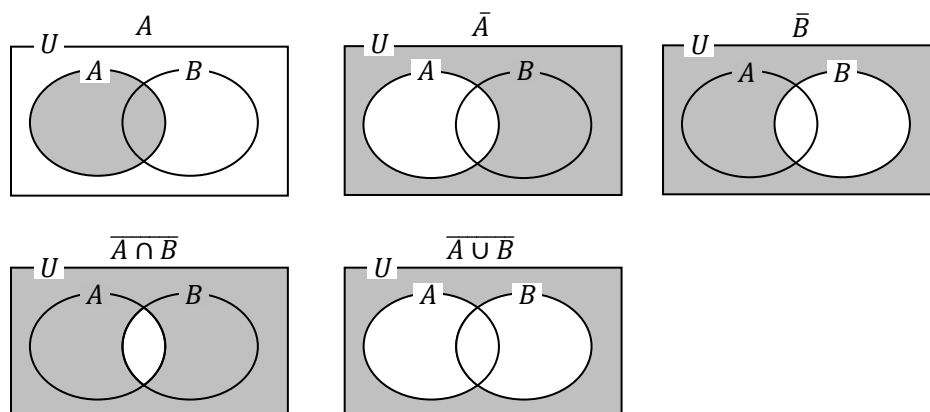
①  $\overline{(\bar{A})} = A$

②  $A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \emptyset$

③  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  (ド・モルガンの法則)

これは実際に図を使うことで簡単に確認することができる。

下の図を参考に、上記の性質が成り立っていることを確認してみよう。



## §2 命題と条件

### ○ 命題とは

正しいか正しくないかがはっきりと決まっている主張を**命題**という。命題が正しいとき、その命題は**真**であるといい、正しくないときその命題は**偽**であるという。

例 『豊島岡女子学園は女子高である』 ⇒ **真**

『池袋には都庁がある』 ⇒ **偽**

『11は素数である』 ⇒ **真**

などは、真偽が確定するので命題と呼べる。

『数学は楽しい教科だ』

『カレーはからい』

などは、真偽がはっきり定まらないので命題と呼ぶことはできない。

### ○ 条件とは

『 $x$ の2乗は4である』は $x = \pm 2$ のとき真となり、それ以外のとき偽となる。また、

『 $x$ は正の数である』は $x = 2$ のときは真となるが、 $x = -1$ のときは偽となる。

この様に与えられた文字の値によって、初めて真偽が決まる文や式を**条件**という。

### ○ ~ならば…

2つの条件  $p$ ,  $q$  に対し、『 $p$ ならば $q$ (は真)である』という命題を

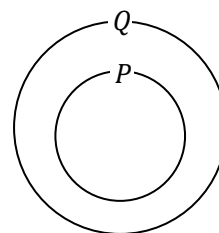
$$p \Rightarrow q$$

と表す。以下、条件  $p$  を表す集合を  $P$ 、条件  $q$  を表す集合を  $Q$  とすると、

命題『 $p \Rightarrow q$ 』が真であるとき、これら2つの集合には

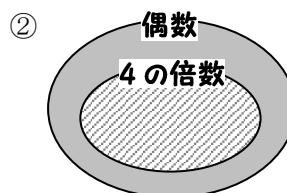
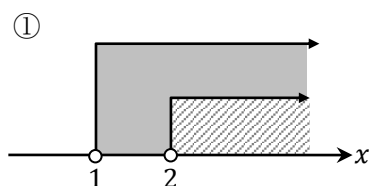
$$P \subset Q$$

という関係があり、図にすると右のようになる。

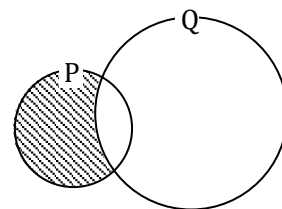


例 ①  $x > 2 \Rightarrow x > 1$       ②  $n$ は4の倍数  $\Rightarrow n$ は偶数

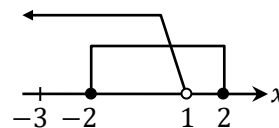
これら2つの命題は明らかに真であり、集合の関係は下図のようになる。



逆に、命題『 $p$ ならば $q$ 』が偽ならば、集合  $P, Q$  は  $P \subset Q$  とはならない。  
 つまり、集合  $P, Q$  は右図のような関係にある。よって、命題『 $p$ ならば $q$ 』が偽であるならば、右図の斜線部分 ( $P \cap \bar{Q}$ ) の要素が存在する。  
 よって、命題『 $p$ ならば $q$ 』が偽であることを示すには、  
 『 $p$ であるのに  $q$  でない』例を1つ示せばよい。これを**反例**という。

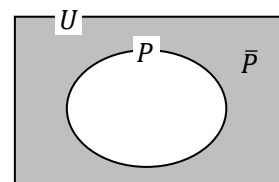


**例** 『 $x < 1 \Rightarrow x^2 \leq 4$ 』という命題は偽であり、  
 反例は  $x = -3$  である。

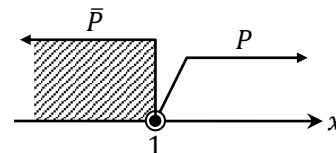


### ○ 条件の否定

条件  $p$  に対して、「 $p$ ではない」という条件を  $p$  の**否定**といい、 $\bar{p}$  で表す。  
 $\bar{p}$  を表す集合は  $P$  の補集合となり、 $\bar{P}$  となる。

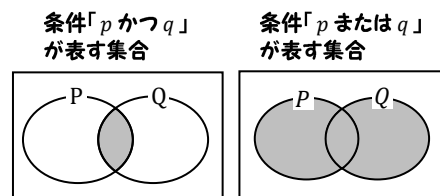


**例** 条件  $p$  が『 $p: x > 1$ 』であるとき、その否定  $\bar{p}$  は  
 『 $\bar{p}: 「x > 1」$ ではない』つまり『 $\bar{p}: x \leq 1$ 』となる。



### 『かつ』、『または』の否定

条件  $p, q$  に対して、「 $p$ かつ $q$ 」、「 $p$ または $q$ 」という条件が表す集合は  $P$  と  $Q$  の共通部分、または和集合として表すことができる。



このことから、条件「 $p$ かつ $q$ 」の否定「 $\overline{p \text{ かつ } q}$ 」が表す集合は、  
 $\overline{P \cap Q} = \bar{P} \cup \bar{Q}$  となるので、「 $\bar{p}$ または $\bar{q}$ 」と言い換えることができる。

**ド・モルガンの法則**  
 $\overline{P \cap Q} = \bar{P} \cup \bar{Q}$   
 $\overline{P \cup Q} = \bar{P} \cap \bar{Q}$

また、条件「 $p$ または $q$ 」の否定「 $\overline{p \text{ または } q}$ 」も同様に、  
 集合  $\overline{P \cup Q} = \bar{P} \cap \bar{Q}$  を考えることで、「 $\bar{p}$ かつ $\bar{q}$ 」と言い換えられる。

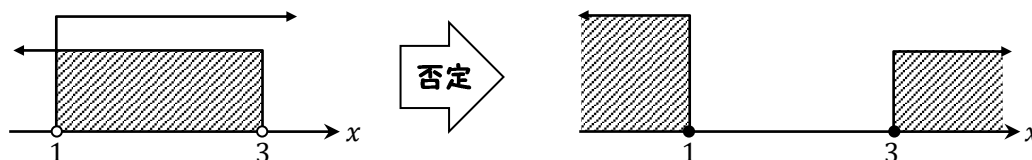
⊛『かつ』、『または』の否定 ⊛

条件  $p, q$  に対して、

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ または } \bar{q}$$

$$\overline{p \text{ または } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}$$

**例**  $\overline{x > 1 \text{ かつ } x < 3} \Leftrightarrow \overline{x > 1} \text{ または } \overline{x < 3} \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ または } x \geq 3$



## ○ 命題の否定

ある命題  $p$  に対して、「 $p$  ではない」という命題を  $p$  の否定といい、 $\bar{p}$  と表す。  
 $p$  が真ならば  $\bar{p}$  は偽であり、 $p$  が偽ならば  $\bar{p}$  は真である。

**例** 「 $p$ : 豊島岡女子学園は女子校である」 **真**  $\Rightarrow$  「 $\bar{p}$ : 豊島岡女子学園は女子校ではない」 **偽**

### すべての～,ある～

**例 1** 次の命題の否定を述べなさい。

「すべての豊島岡の生徒は数学が好きである」

「すべての豊島岡の生徒は数学が嫌いである」としてしまおうのがよくある誤答です。次のように考えるとよいでしょう。



「好き」を「嫌い」にするだけが否定ではありません。まず命題の全体を否定するのがポイントです。

すべての豊島岡の生徒は数学が好きである

$\Leftrightarrow$  「すべての豊島岡の生徒は数学が好きである」ではない

$\Leftrightarrow$  すべての豊島岡の生徒が数学が好きというわけではない

$\Leftrightarrow$  ある豊島岡の生徒は数学が嫌いである **つまりこういうこと**

もう少し分かりやすく言うと…

これより、命題「ある豊島岡の生徒は数学が嫌いである」の否定が、「すべての豊島岡の生徒は数学が好きである」となる。

一般的に「すべての～」、「ある～」という命題の否定は次のように考えればよい。

すべての  $x$  について  $y$  である  $\rightarrow$  ある  $x$  について  $y$  ではない

ある  $x$  について  $y$  である  $\rightarrow$  すべての  $x$  について  $y$  ではない

つまり、「すべて」と「ある」、「である」と「ではない」を入れ替えればよい。

「ある 豊島岡の生徒は数学が 嫌い である」  
 ここを入れ替えればよい  
 「すべて の豊島岡の生徒は数学が 好き であ

～ならば…

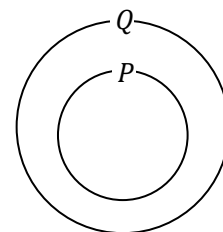
**例 2** 次の命題の否定を述べなさい。  
 「高校 1 年〇組の生徒であるならば豊島岡の生徒である」

「高校 1 年〇組の生徒であるならば豊島岡の生徒ではない」としてしまふのがよくある誤答です。  
 この命題は「高校 1 年〇組の生徒であるならば**必ず**豊島岡の生徒である」というように「必ず」を補ってみると論理が明確になります。

高校 1 年〇組の生徒であるならば(必ず)豊島岡の生徒である

- ⇔ 「高校 1 年〇組の生徒であるならば(必ず)豊島岡の生徒である」ではない 必ず全体を否定する
- ⇔ 高校 1 年〇組の生徒が必ず豊島岡の生徒というわけではない もう少し分かりやすく言うと…
- ⇔ 高校 1 年〇組の生徒で、豊島岡の生徒ではない者がいる つまりこういうこと

一般的に、条件  $p, q$  に対して、命題『 $p \Rightarrow q$ 』の否定『 $\overline{p \Rightarrow q}$ 』は次のように考えることができる。

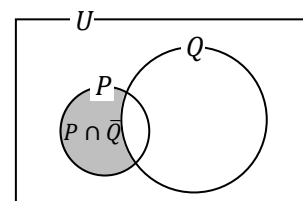


条件  $p, q$  が表す集合を  $P, Q$  とすると、命題『 $p \Rightarrow q$ 』は『 $P \subset Q$ 』と言い換えられる。

$$P \subset Q \Leftrightarrow P \cap \bar{Q} = \emptyset$$

となるので、結局、命題『 $p \Rightarrow q$ 』は『 $P \cap \bar{Q} = \emptyset$ 』となる。

これより、『 $\overline{p \Rightarrow q}$ 』は『 $P \cap \bar{Q} \neq \emptyset$ 』と言い換えることができる。



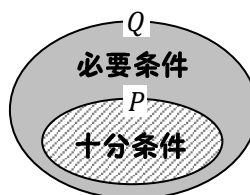
よって、『 $\overline{p \Rightarrow q}$ 』を言葉を用いて表現すると、

**P の要素で、かつ Q の要素でないものが存在する**

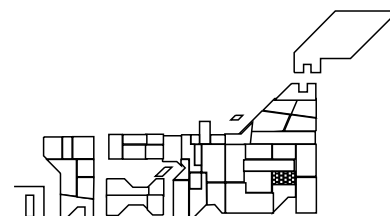
となる。

○ **必要条件, 十分条件**

命題『 $p \Rightarrow q$ 』が真であるとき、  
 $p$  は  $q$  であるための**十分条件**  
 $q$  は  $p$  であるための**必要条件** という。



**例** 命題『東京都民である  $\Rightarrow$  日本国民である』は当然真であるので  
 東京都民であることは、日本国民であるために十分な条件である。  
 日本国民であることは、東京都民であるために必要な条件である。  
 ということができます。



仮に…,

「東京都民であることは、日本国民であるために必要な条件である。」  
 と言ってしまったら大変なことになります(他県の方は怒りますよね?)。

$p$  が  $q$  の必要条件であると同時に、十分条件でもあるとき、つまり『 $p \Rightarrow q$ 』かつ『 $q \Rightarrow p$ 』が成り立つとき、 $p$  は  $q$  であるための**必要十分条件**といい、

$$p \Leftrightarrow q$$

と表す。またこのとき、「 $p$  と  $q$  は**同値**である」ともいう。

**例 3**  $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$  は  $\begin{cases} x + y > 2 \\ xy > 1 \end{cases}$  であるための  条件である。  に適する語句を入れなさい。

$\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$  のとき、2つの不等式の辺々の、和と積を考えることで  $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y > 2 \\ xy > 1 \end{cases}$  は成り立つ。

逆に、 $\begin{cases} x + y > 2 \\ xy > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$  は成り立たない。

反例は、 $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 4$  である。

命題が偽であることを示すには、  
反例を1つあげる。

つまり、 $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$  は  $\begin{cases} x + y > 2 \\ xy > 1 \end{cases}$  であるための十分条件である。

**例 4**  $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$  は  $\begin{cases} x + y > 2 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}$  であるための  条件である。  に適する語句を入れなさい。

$\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$  のとき、 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases}$  より、この不等式の辺々の和と積を考えると、

$$\begin{cases} x-1+y-1 > 0 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 2 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}$$

これより、 $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y > 2 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}$  は成り立つ。...①

逆に、 $\begin{cases} x + y > 2 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}$  が成り立つとき、

$(x-1)(y-1) > 0$  より、 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases}$  または  $\begin{cases} x-1 < 0 \\ y-1 < 0 \end{cases}$  となるが、

$x + y > 2 \Leftrightarrow (x-1) + (y-1) > 0$  となるので、 $\begin{cases} x-1 < 0 \\ y-1 < 0 \end{cases}$  は成り立たない。

つまり、 $\begin{cases} x + y > 2 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$  は成り立つ。...②

①, ②より、 $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$  は  $\begin{cases} x + y > 2 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}$  であるための必要十分条件である。

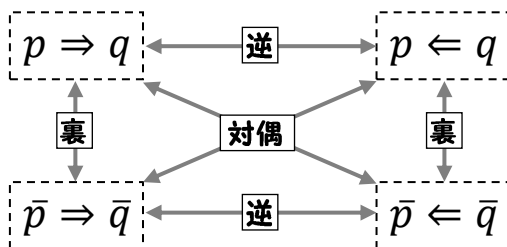
### §3 論証

#### ○ 逆, 裏, 対偶

条件  $p, q$  に対して, 命題  $P : p \Rightarrow q$  について考える。このとき,

『 $p \Leftarrow q$ 』を  $P$  の逆, 『 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ 』を  $P$  の裏, 『 $\bar{p} \Leftarrow \bar{q}$ 』を  $P$  の対偶

という。図にすると以下のようになっている。つまり, 命題『 $p \Rightarrow q$ 』の逆の裏が対偶となる。



**例** 『高校1年〇組の生徒は豊島岡の生徒である』という命題について

逆: 豊島岡の生徒であれば高校1年〇組の生徒である。 **偽**

裏: 高校1年〇組の生徒でなければ豊島岡の生徒ではない。 **偽**

対偶: 豊島岡の生徒でなければ高校1年〇組の生徒ではない。 **真**

この例を見て分かるとおり, 逆と裏はともに偽となるが, 対偶は真となっている。

一般的には, 次のように考えられる。

条件  $p, q$  を表す集合をそれぞれ  $P, Q$  とすると,

『 $p \Rightarrow q$ 』が真であるということは,  $P$  が  $Q$  の部分集合になっているので,

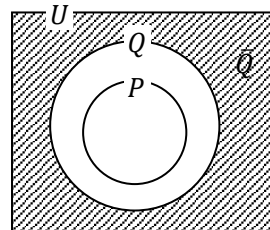
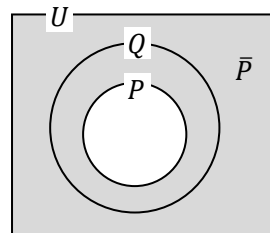
$\bar{p}, \bar{q}$  を表す集合  $\bar{P}, \bar{Q}$  を考えると,  $\bar{Q}$  は  $\bar{P}$  の部分集合になっている。

つまり, 『 $\bar{p} \Leftarrow \bar{q}$ 』は真である。同様に考えると, 『 $p \Rightarrow q$ 』が偽であるとき,

『 $\bar{p} \Leftarrow \bar{q}$ 』も偽である。

このことから, 命題『 $p \Rightarrow q$ 』とその対偶『 $\bar{p} \Leftarrow \bar{q}$ 』の真偽は常に一致する。

しかし, 逆『 $p \Leftarrow q$ 』と裏『 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ 』に関しては, 常に一致するとは限らない。



この事実を用いた証明法を**対偶法**という。1つ例を見てみよう。

**例5** すべての整数  $m, n$  について,  $mn$  が奇数ならば  $m, n$  はともに奇数であることを示しなさい。

当たり前のことのように感じますが, 対偶法を用いると論理が明確になります。

この命題の対偶は『 $m$  が偶数または  $n$  が偶数ならば,  $mn$  は偶数である』となる。

$m = 2k$  ( $k$ : 整数) とおくと,  $mn = 2kn$

$kn$  は整数なので  $mn$  は偶数となる。

また,  $n = 2l$  ( $l$ : 整数) とおくと,  $mn = 2lm$

$lm$  は整数なので  $mn$  は偶数となる。

以上より, 対偶の命題が証明されたので, もとの命題

『 $mn$  が奇数ならば  $m, n$  はともに奇数である』

も示された。

$m, n$  はともに奇数  
↓  
 $m$  が偶数または  $n$  が偶数

○ 背理法

ある命題を証明する際に、その命題の**否定を仮定し、矛盾が生じることを示す**ことで、もとの命題が成り立つことを示す論法を**背理法**という。

具体的に見ていこう。

**例 6** 素数が無数にあることを証明しなさい。

紀元前 3 世紀ごろにはすでに、ユークリッド原論において証明されています。大変有名な証明です。



ユークリッド (紀元前 365 年? ~ 紀元前 275 年?)

素数が有限個であると仮定する。 ←まず命題の否定を仮定する

今それらを  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  とおく。

このとき、自然数  $q = a_1 a_2 a_3 \dots a_n + 1$  について考える。

(i)  $q$  が素数であるとき

このとき、 $q$  は  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  のどれも異なるので新たな素数となり、仮定に反する

(ii)  $q$  が素数でないとき

このとき、 $q$  は素数  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  のどれかで割り切れなくてはならないが、どれで割っても必ず 1 余ってしまうので、 $q$  は素数となる。

これは「 $q$  が素数でない」としたことに反する。

以上より素数は無数に存在する。

**例 7** すべての整数  $m, n$  について、 $mn$  が奇数ならば、 $m, n$  はともに奇数であることを示しなさい。

**例 5** と同じ問題を今度は背理法を用いて示します。

p.10 を参考にして、まずは命題『 $p \Rightarrow q$ 』の否定をつくることを始めます。

$m$  が偶数または  $n$  が偶数と仮定する。

$m = 2k$  ( $k$ : 整数) とおくと、 $mn = 2kn$

$kn$  は整数なので  $mn$  は偶数となり、 $mn$  が奇数であることに矛盾する。

よって、 $m$  は奇数となる。

また、 $n = 2l$  ( $l$ : 整数) とおくと、 $mn = 2lm$

$lm$  は整数なので  $mn$  は偶数となり、 $mn$  が奇数であることに矛盾する。

よって、 $n$  は奇数となる。

以上より、 $mn$  が奇数ならば、 $m, n$  はともに奇数である。

$mn$  が奇数ならば、 $m, n$  ともに奇数



$mn$  が奇数であつて、 $m$  が偶数または  $n$  が偶数であるものが存在する



これを仮定して矛盾を導く。

# MEMO