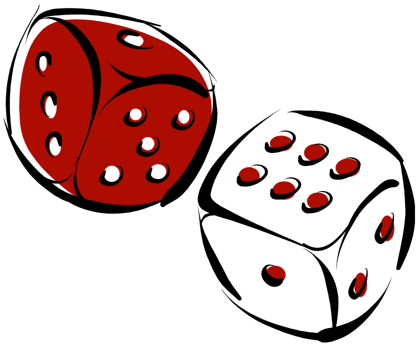
確　率

§0　未来の的中率

　世の中には未来を予測するための数というものが存在する。
「降水確率 70%です」と聞けば，傘を持ち，
「〇〇大学の競争率は 10 倍だって」と聞けば，少し弱気になる。
また，「打率が 4 割を超えている打者」と聞けば，次の打席に期待をする。

　しかし，これはあくまでも予測であって，現実ではない。
降水確率 70%でも，雨が降らないときもあるし，競争率が激しくてもがんばって勉強すれば合格する。
どんな大打者だってヒットを打てない日もある…。



　たとえば，さいころを 1 個振ってみる。

　　　「1 の目がでる確率は？」

と問われれば，すぐに $\frac{1}{6}$ と答えるであろう。

　しかし，これは**「さいころを 6 回振れば必ず 1 回 1 の目が出る!」**ということではない。
10 回振っても 1 が出ないときがあれば，何回も連続で出ることだってある。
これはさいころを何百回，何万回と振ったときに，

　　　全体の大体 6 分の 1 が 1 になる

ということである。

つまり，この $\frac{1}{6}$ とは理想化された数字であり，あくまでも一つの判断基準にすぎない。

　あとはこれを踏まえて各自がどのような行動をとるかということが重要であり，どのようなことでも信じてしまえば，その人にとって 100%になってしまうものである。

　　今回勉強していくのはそんな大まかな数の話である。

§1　事象と確率

○　試行と事象

同じ条件のもとで何回も繰り返される実験，観察，調査などをまとめて**試行**といい，その結果起こる事柄を**事象**という。

例えば，「さいころを1回振る」という試行においては，以下のような事象を考えることができる。

A：1の目が出る　　B：偶数の目が出る　　C：3以上の目が出る

このとき，起こりうる結果全体の集合を U とすると，

$$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

となり，事象 A，B，C を集合で表すと，

$$A=\{1\},\ B=\{2,\ 4,\ 6\},\ C=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

となる。

また，U で表される事象を**全事象**，U の部分集合のうち1つの要素からなる集合で表される事象を**根元事象**という。つまり，「さいころを1回振る」という試行において根元事象は6個あり，集合で表すと，

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

となる。

○　確率の定義

ある試行において，事象 A が起こることが期待される割合を**確率(probability)**といい，記号では $P(A)$ と表す。確率 $P(A)$ は次のように定義される。

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{\text{事象Aの起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

つまり，上で定めた事象 A，B，C が起こる確率は，

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

となる。

根元事象について

確率を考える際には，**「どの根元事象も,起こり方が同程度に期待できる」**ことをしっかりと確認する必要がある。例えば，「さいころを1回振る」という試行を考えると，さいころが変形していたり，細工がされていたりということがなく，どの目も同じ割合で出ることが期待できるということである。

このように，ある試行によって起こる全ての結果が同程度に期待できるとき，その根元事象は**同様に確からしい**という。

例 1 10 円玉 2 枚を投げるとき，2 枚とも表になる確率を求めなさい。

以下の解答は誤りです。

誤答

全事象を U とすると，$U=\{$表 0 枚，表 1 枚，表 2 枚$\}$

2 枚とも表になる事象を A とすると，

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{1}{3}$$

例えば，10 円玉 1 枚と 100 円玉 1 枚を投げるとき，表が 1 枚となる場合は，

「10 円玉が表となる」と「100 円玉が表となる」

の 2 通りあります。

つまり，「10 円玉 1 枚と 100 円玉 1 枚を投げる」という試行における根元事象は

「2 枚とも表」，「2 枚とも裏」「10 円玉が表,100 円玉が裏」「10 円玉が裏,100 円玉が表」

の 4 通りあるわけです。

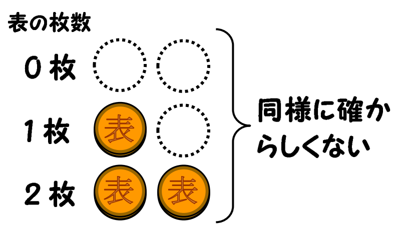
当然「10 円玉を 2 枚投げる」という試行と「10 円玉 1 枚と 100 円玉 1 枚を投げる」という試行で確率が異なるはずがないので，例 1 においても根元事象は 4 通りとなります。

正答

全事象を U とすると，$U=\{($表，表$)$，$($表，裏$)$，$($裏，表$)$，$($裏，裏$)\}$

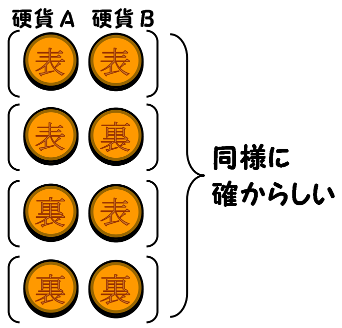
2 枚とも表になる事象を A とすると，

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{1}{4}$$



誤答における全事象のとり方は，3 通りが同程度に出ることが期待できません。つまり，「同様に確からしい」とは言えません。

それに対し，正答における全事象のとり方は，4 通りが同程度に出ることが期待できます。つまり，「同様に確からしい」と言えるのです。



このように，2 枚の硬貨を区別せずに考えてしまうと，間違いが起こってしまいます。

基本的に確率を考えるときは，「2 枚の 10 円玉を…」「同じさいころを…」などと書いてあっても，それぞれ別のものとして考えなくてはならないのです。

例 2　T，O，S，I，M，A の 6 文字を並べるとき，次の確率を求めなさい。

(1)　1 列に並べるとき，母音が隣り合わない確率

(2)　円形に並べるとき，母音が隣り合う確率

(1)　起こりうる場合は，6 文字を 1 列に並べる順列となるので，6! 通り

このうち，母音が隣り合わない場合は，右の①～④の 4 か所に

O，I，A の 3 文字を並べる順列となるので，$_4P_3$ 通り

そのそれぞれに対し，T，S，M の 3 文字の並べ方が，3! 通りある。

① T ② S ③ M ④

よって，求める確率は，$\dfrac{_4P_3\cdot 3!}{6!}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{1}{5}$

(2)　起こりうる場合は，6 文字を円順列となるので，$(6-1)!=5!$ 通り

このうち，母音が隣り合う場合は，

まず，母音 3 文字を 1 つにまとめて X とおき，4 文字 T，S，M，X の円順列を考える。

その並べ方は，$(4-1)!=3!$ 通り。

そのそれぞれに対して，母音 O，I，A の並び方は 3! 通りあるので，

よって，求める確率は，$\dfrac{3!\cdot 3!}{5!}=\dfrac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{3}{10}$

例 3　赤球 4 個，白球 6 個の入った袋から 4 個を取り出すとき，赤球 2 個と白球 2 個が出る確率を求めなさい。

取り出し方は全部で，

(○,○,○,○)，(○,○,○,●)，(○,○,●,●)，(○,●,●,●)，(●,●,●,●)

の 5 通りと考えて，確率を $\frac{1}{5}$ としてしまうのは誤りです。

これら 5 通りは，「同様に確からしい」とは言えません。

起こりうる場合は，異なる 10 個の中から 4 個を取り出す組合せとなるので，$_{10}C_4$ 通り

このうち，赤球 2 個，白球 2 個を取り出す組合せは，

赤球の取り出し方が $_4C_2$ 通り，白球の取り出し方が $_6C_2$ 通りとなるので，$_4C_2\times{}_6C_2$ 通り

よって，求める確率は，$\dfrac{_4C_2\times{}_6C_2}{_{10}C_4}=\dfrac{\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\dfrac{6\cdot 15}{210}=\dfrac{3}{7}$

§2　確率の基本性質

　ある試行における全事象を U，事象を A とするとき，

$$0 \leqq n(A) \leqq n(U)$$

が成り立つ。ここで両辺を $n(U)$ で割ると，以下の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \frac{n(A)}{n(U)} \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqq P(A) \leqq 1$$

なお，$P(A) = 0$ のとき，$A = \emptyset$（事象 A が根元事象を持たない）

　　$P(A) = 1$ のとき，$A = U$

となる。

確率の基本性質①

① $0 \leqq P(A) \leqq 1$

② $P(\emptyset) = 0$，$P(U) = 1$

○　和事象と積事象

　2 つの事象 A，B において，

A または B が起こる事象を**和事象**といい，$A \cup B$ と表す。

また，A, B が同時に起こる事象を**積事象**といい，$A \cap B$ と表す。

$A \cap B = \emptyset$ のとき，つまり A, B が同時には起こりえないとき，A と B は互いに**排反事象**という。

　例えば，「さいころを 1 回振る」という試行において，

　　事象 A：偶数の目がでる

　　事象 B：3 以上の目が出る

　　事象 C：奇数の目が出る

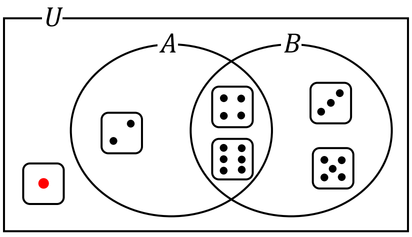
とすると，

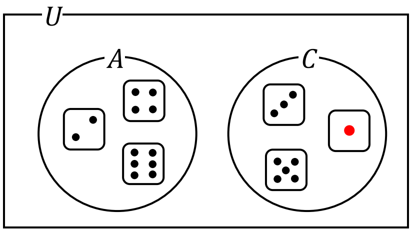
　　$A = \{2,\ 4,\ 6\}$，$B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，$C = \{1,\ 3,\ 5\}$

　　和事象：$A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

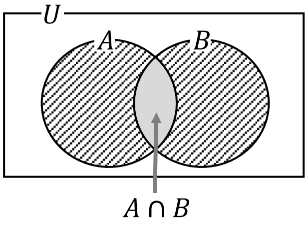
　　積事象：$A \cap B = \{4,\ 6\}$

　　　　　$A \cap C = \emptyset$（A と C は互いに排反事象）





○　和事象の確率



2 つの事象 A，B の和事象の確率 $P(A \cup B)$ について考える。
和事象の要素の個数 $n(A \cup B)$ は以下の式で表すことができる。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

この等式の両辺 $n(U)$ で割ると，以下の関係式が成り立つ。

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \iff P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

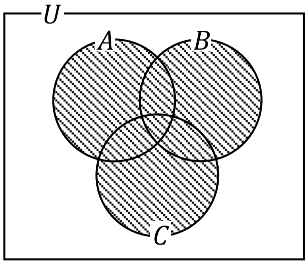
なお，$A \cap B = \emptyset$（A と B は互いに排反事象)のとき，$n(A \cap B) = 0$ となるので，$P(A \cap B) = 0$ 。
よって，和事象の確率は以下のようになる。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

確率の基本性質②

③　$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$　（$A \cap B = \emptyset$ のとき）
④　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$　（$A \cap B \neq \emptyset$ のとき）

なお，3 つの事象 A，B，C の和事象の確率 $P(A \cup B \cup C)$ は以下のようになる。



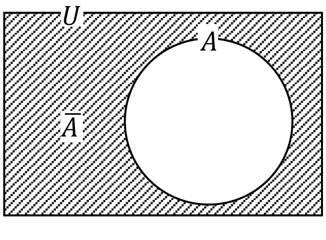
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \frac{n(A \cup B \cup C)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} + \frac{n(C)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} - \frac{n(B \cap C)}{n(U)} - \frac{n(C \cap A)}{n(U)} + \frac{n(A \cap B \cap C)}{n(U)} \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

○　余事象の確率

事象 A に対して，「A が起こらない」という事象を A の**余事象**といい，$\bar{A}$ で表す。
$A \cap \bar{A} = \emptyset$ より，$P(A \cap \bar{A}) = 0$ となるので，

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) - P(A \cap \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \quad \cdots①$$

また，$A \cup \bar{A} = U$ より，$P(A \cup \bar{A}) = P(U) = 1 \quad \cdots②$
①，②より，$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \iff P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
が成り立つ。



確率の基本性質③

⑤　$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

例 4 箱の中に 1 から 7 までの 7 枚の番号札が入っている。この箱の中から 3 枚の番号札を一度に取り出し，その番号の積を X とおく。このとき，次の確率を求めなさい。

(1) X が偶数となる確率　　(2) X が 6 の倍数となる確率

(3) X が偶数または 3 の倍数となる確率

3 枚の番号札の取り出し方は，${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ 通りある。

(1) 3 枚のうち少なくとも 1 枚は偶数を取り出せばよい。

3 枚とも奇数となる確率は，1，3，5，7 の 4 枚から 3 枚を取り出せばよいので，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{35} = \dfrac{4}{35}$

よって，求める確率は，$1 - \dfrac{4}{35} = \dfrac{31}{35}$

(2)(ⅰ) 6 を取り出すとき

残り 2 枚は何を取り出してもよいので，その取り出し方は，${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ 通り

よって，このときの確率は，$\dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$

(ⅱ) 6 を取り出さないとき

3 枚のうち 1 枚は 3 となり，残り 2 枚のうち少なくても 1 枚は偶数を取り出す。

残りの 2 枚の取り出し方は，全体から奇数の 2 枚取り出す場合を引けばよいので，

${}_5\mathrm{C}_2 - {}_3\mathrm{C}_2 = 10 - 3 = 7$ 通り

よって，このときの確率は，$\dfrac{7}{35} = \dfrac{1}{5}$

(ⅰ)，(ⅱ)は互いに排反なので，求める確率は，$\dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{22}{35}$

(3) X が偶数となる事象を A，X が 3 の倍数となる事象を B とすると，

求める確率は $P(A \cup B)$ となる。

X が 3 の倍数となるのは，少なくとも 1 枚 3 の倍数を引けばよいので，

$$P(B) = 1 - \frac{{}_5\mathrm{C}_3}{35} = 1 - \frac{10}{35} = \frac{5}{7}$$

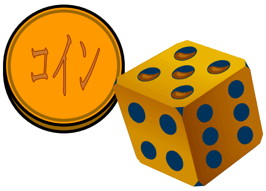
$P(A \cap B)$は 6 の倍数となる確率なので，(2)より，

$$P(A \cap B) = \frac{22}{35}$$

以上より，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{31}{35} + \frac{5}{7} - \frac{22}{35} = \frac{34}{35}$$

§3　試行の独立



試行 T_1，T_2 を以下のように定める。

試行 T_1 : 1 枚のコインを投げる

試行 T_2 : 1 個のさいころを投げる

このとき，この 2 つの試行の結果は互いに影響を与えないので，T_1，T_2 は**独立**であるという。

ここで，試行 T_1 における事象 A，試行 T_2 における事象 B を次のように定める。

事象 A : 表が出る

事象 B : 偶数の目が出る

このとき，確率 $P(A \cap B)$ を考える。

起こりうる場合は，コインの出方 2 通りそれぞれに対し，さいころの目の出方が 6 通りあるので，$2 \times 6 = 12$ 通り。

このうち，事象 A，B が同時に起こる場合は，コインの出方が 1 通りで，さいころの目の出方が 3 通りあるので，$1 \times 3 = 3$ 通り。

3 通り

(表，1)	(表，2)	(表，3)	(表，4)	(表，5)	(表，6)
(裏，1)	(裏，2)	(裏，3)	(裏，4)	(裏，5)	(裏，6)

12 通り

以上より，求める確率は，$\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ となる。

この確率は次のように見ることができる。

$$P(A \cap B) = \frac{1 \times 3}{2 \times 6} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = P(A) \times P(B)$$

つまり，求める確率は，「コインを 1 枚投げて表が出る確率」と「さいころを 1 個投げて偶数が出る確率」の積で表すことができる。

一般的に，独立な試行 T_1，T_2 における全事象を U_1，U_2 とする。試行 T_1 で事象 A が起こり，試行 T_2 で事象 B が起こる確率 $P(A \cap B)$ について考える。

起こりうる場合は，試行 T_1 が $n(U_1)$ 通りあり，そのそれぞれに対して，試行 T_2 が $n(U_2)$ 通りあるので，$n(U_1) \times n(U_2)$ 通り。

このうち，事象 A，B が同時に起こる場合は，事象 A が起こる場合が $n(A)$ 通りあり，そのそれぞれに対して事象 B が起こる場合が $n(B)$ 通りあるので，$n(A) \times n(B)$ 通り。

よって，$P(A \cap B) = \dfrac{n(A) \times n(B)}{n(U_1) \times n(U_2)} = \dfrac{n(A)}{n(U_1)} \times \dfrac{n(B)}{n(U_2)} = P(A) \cdot P(B)$

独立試行の確率

独立な試行 T_1，T_2 において，試行 T_1 で事象 A が起こり，
試行 T_2 で事象 B が起こる確率は

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

例 5 さいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めなさい。
(1) 1,2 回目に 1 の目が出て，3,4 回目に 1 以外の目が出る確率
(2) 少なくとも 1 回偶数が出る確率

さいころを投げる試行において，各回の目の出方が，他の回に影響を与えることはありません。つまり，さいころを 4 回投げる各回の試行は互いに独立となります。

(1) さいころを 1 回投げたときに，

1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，1 以外の目が出る確率は $\frac{5}{6}$ となるので，

求める確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{1296}$

(2) さいころを 1 回投げたときに，奇数の目が出る確率は，$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

よって，4 回とも奇数が出る確率は，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

以上より，少なくとも 1 回偶数が出る確率は，$1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

○ 反復試行の確率

独立な試行を何度も繰り返して行うことを**反復試行**という。

例 6 さいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めなさい。
(1) 1,3 回目に 1 の目が出て，2,4 回目に 1 以外の目が出る確率
(2) 1 の目が 2 回出る確率

(1)は例 5(1)とほぼ同じ問題になります。

(1) さいころを 1 回投げたときに，

1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，1 以外の目が出る確率は $\frac{5}{6}$ となるので，

求める確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{1296}$

例 5，例 6 の(1)はともに「1 の目が 2 回出る確率」になっています。つまり，この 2 題は(2)の答えの一部になっているというわけです。あとは，「1 の目が 2 回出る」パターンが何通りあるか考えるだけです。

(2)　1の目が出たときは○，出なかったときは×で表すと，「1の目が2回出る」場合の数は○2個，×2個の並べ方の総数と一致する。つまり，${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$ 通り。

すべて確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$ となるので，

求める確率は，$6\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{216}$

1回目	2回目	3回目	4回目
○	○	×	×
○	×	○	×
○	×	×	○
×	○	○	×
×	○	×	○
×	×	○	○

一般的に，ある試行において事象 A が起こる確率を p とすると，この試行を n 回繰り返すとき，事象 A が r 回起こる確率は次のように考えればよい。

まず，事象 A が r 回起こる確率が p^r となり，$n-r$ 回は事象 A が起こらないので，その確率は $(1-p)^{n-r}$ となる。そして，n 回のうち r 回だけ事象 A が起こるので，その場合は ${}_n\mathrm{C}_r$ 通り。

よって，求める確率は，${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$ となる。

1回目	2回目	3回目	…	n−1回目	n回目
○	○	×	…	○	×
×	○	○	…	×	×
…	…	…	…	…	…

○をr個，×をn−r個の並べ方

反復試行の確率

ある試行で事象 A が起こる確率を p とすると，この試行を n 回繰り返すとき，事象 A が r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$$

例7　赤球3個，青球4個，白球5個の合計12個の球が入った袋から，1個取り出して戻すことを5回繰り返す。このとき，赤球2個，青球2個，白球1個が出る確率を求めなさい。

「1個取り出して元に戻す」ので各回の試行は互いに独立になります。それを5回繰り返しているので反復試行の問題です。

球を1個取り出すとき，それが

赤球である確率は $\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$，青球である確率は $\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$，白球である確率 $\dfrac{5}{12}$

赤球を取り出したときを○，青球を取り出したときを△，白球を取り出したときを×と表すと，赤球2個，青球2個，白球1個を取り出す場合の数は，○2個，△2個，×1個を1列に並べるときの順列の総数と一致する。つまり，

$${}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}=30\text{ 通り}$$

よって，求める確率は，$30\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{5}{12}=\dfrac{25}{288}$

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
○	○	△	△	×
○	△	○	△	×
○	△	△	○	×
…	…	…	…	…

○2個,△2個,×1個の並べ方

例 8 さいころを続けて 23 回投げるとき，1 の目がちょうど n 回 $(0 \leqq n \leqq 23)$ 出る確率を p_n とする。このとき，p_n が最大となるような n を求めなさい。

具体的に計算していくと，

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^{23},\ p_1 = {}_{23}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{22},\ p_2 = {}_{23}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{21},\quad \cdots$$

となりますが，これをすべて計算するのは少し大変そうです。そこで，ここでは p_n の大小比較をしていくことで，最大となる n を求めていきます。

$$p_n = {}_{23}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{23-n} = \frac{23!}{n!\,(23-n)!}\cdot\frac{5^{23-n}}{6^{23}}$$ より，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\dfrac{23!}{(n+1)!\,(22-n)!}\cdot\dfrac{5^{22-n}}{6^{23}}}{\dfrac{23!}{n!\,(23-n)!}\cdot\dfrac{5^{23-n}}{6^{23}}} = \frac{23-n}{5(n+1)}$$

（ｉ） $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \geqq 1$ のとき

$$\frac{23-n}{5(n+1)} \geqq 1 \iff 23-n \geqq 5n+5 \iff n \leqq 3$$

つまり，$n = 0,\ 1,\ 2$ のとき $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} > 1 \iff p_{n+1} > p_n$ となり，

$n = 3$ のとき $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 \iff p_{n+1} = p_n$ となるのでこれをまとめると，$p_0 < p_1 < p_2 < p_3 = p_4$

（ⅱ） $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ のとき

$$\frac{23-n}{5(n+1)} < 1 \iff 23-n < 5n+5 \iff n > 3$$

つまり，$n = 4,\ 5,\ 6,\ \cdots$ のとき $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} < 1 \iff p_{n+1} < p_n$ となるので，$p_4 > p_5 > p_6 > p_7 > \cdots$

（ｉ），（ⅱ）より，$p_0 < p_1 < p_2 < p_3 = p_4 > p_5 > p_6 > p_7 > \cdots$

となるので，$n = 3,\ 4$ のとき最大となる。

この問題のポイントは「p_n の大小比較」なので，比 $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を計算するのではなく，差 $p_{n+1} - p_n$ を計算して，0 との大小を比較してもよい。

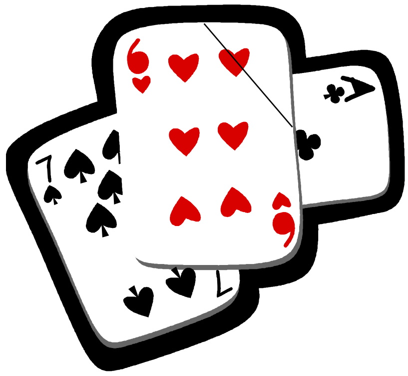
$$p_{n+1} - p_n = \frac{23!}{(n+1)!\,(22-n)!}\cdot\frac{5^{22-n}}{6^{23}} - \frac{23!}{n!\,(23-n)!}\cdot\frac{5^{23-n}}{6^{23}}$$

$$= \frac{23!}{n!\,(22-n)!}\cdot\frac{5^{22-n}}{6^{23}}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{5}{23-n}\right) = \frac{23!}{n!\,(22-n)!}\cdot\frac{5^{22-n}}{6^{23}}\cdot\frac{18-6n}{(n+1)(23-n)}$$

これより，$n > 3$ のとき，$p_{n+1} - p_n < 0 \iff p_{n+1} < p_n$

$0 \leqq n \leqq 3$ のとき，$p_{n+1} - p_n \geqq 0 \iff p_{n+1} \geqq p_n$

§4　条件付確率と乗法定理



　ジョーカーを除いた 52 枚のトランプの中から 1 枚選び，
それがハートのカードであれば勝ち，ハート以外であれば負け
というゲームをする。

　このとき，このゲームに勝つ確率は $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$ となるが，
前もって

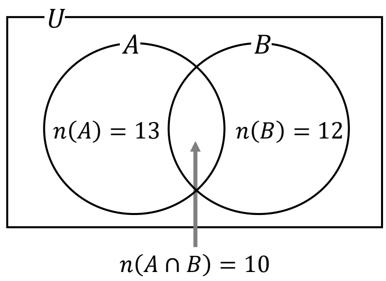
「ハートのカードは 10 枚,クローバーのカードは 2 枚に折り目がついている」

という裏情報を知っているとしたらどうだろうか？
折り目の付いているカードのほとんどがハートなので，
当然，折り目のついているカードを選びたくなるはずである。
　これは，裏情報がもたらされたことによって，カードを当てる確率に変化が起きたことを意味している。
このような確率のことを**条件付確率**という。

　それでは，具体的に条件付き確率を計算していこう。
今，52 枚のトランプの中から 1 枚を引くという試行において，事象 A，B を次のように定める。
　　事象 A：ハートのカードを引く
　　事象 B：折り目のついたカードを引く
このとき，考える確率は，
　　『折り目がついたカードを引いたときに，それがハートのカードである確率』
となり，これを記号では事象 A，B を用いて $P_B(A)$ と表す。
　ここでは，折り目がついているカードが 12 枚，そのうち，
ハートのカードは 10 枚なので，

$$P_B(A)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

となる。

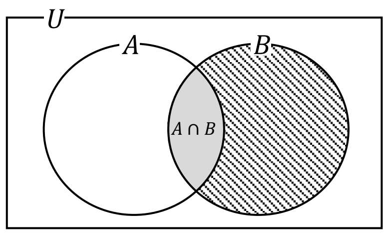


　一般的に，「事象 B が起こったときに，事象 A の起こる」条件付確率は，

全事象を B としたときの,$A\cap B$ が起こる確率

なので，次のように表すことができる。

$$P_B(A)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(U)}}{\frac{n(B)}{n(U)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



条件付き確率

事象 B が起こったときに，事象 A の起こる条件付確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

例 9 2個のさいころを同時に投げる。出た目の和が10以上になるとき，出た目がともに偶数である確率を求めなさい。

2個のさいころを投げるという試行において，出た目の和が10以上になる事象をA，出た目がともに偶数になる事象をBとする。このとき，求める確率は$P_A(B)$と表すことができる。
出た目の和が10以上になる場合の数は，
(4，6)，(5，5)，(6，4)，(5，6)，(6，5)，(6，6)の6通り。

よって，$P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

また，出た目の和が10以上で，かつ出た目がともに偶数になる場合の数は，
(4，6)，(6，4)，(6，6)の3通り。

よって，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

以上より，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{2}$

出た目の和が10以上になる場合の数は，
(4，6),(5，5),(6，4),(5，6),(6，5),(6，6)
の6通りで，このうちともに偶数になる場合の数は，
(4，6),(6，4),(6，6)
の3通りなので，求める確率は，
$P_A(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$
としてもよい。

○ 乗法定理

条件付確率の式「$P(A\cap B)=$」に変形することで，積事象の確率を求める**乗法定理**が得られる。

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \iff P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

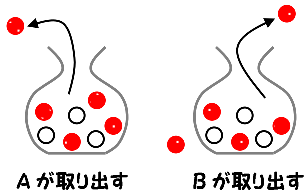
乗法定理

2つの事象A，Bがともに起こる確率は

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

例 10 袋の中に赤玉5個，白玉3個が入っている。A，Bの2人がこの順番に1個ずつ玉を取り出すとき，2人とも赤を取り出す確率を求めなさい。取り出した玉は元に戻さないとする。

Aが赤球を取り出す事象をA，Bが赤球を取り出す事象をBとすると，求める確率は$P(A\cap B)$である。



$P(A)$は最初にAが赤玉を取り出す確率なので，$P(A)=\dfrac{5}{8}$

$P_A(B)$はAが赤玉を取り出したという条件のもとで，Bも赤玉を取り出す確率となる。Aが取り出すと赤玉は4個になるので，$P_A(B)=\dfrac{4}{7}$

以上より，求める確率は，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{5}{14}$

○　原因の確率

例 11　A，B の 2 人で協力して数学の問題集を解く。全問題の 60%を A が解き，残りを B が解く。A の正答率は 80%，B の正答率が 75%である。全問題の中から 1 題を選ぶとき，

(1)　それが間違っている確率を求めなさい。

(2)　間違っていたとき，それが A の間違いである確率を求めなさい。

ある問題が間違いであるパターンは，

「A が解いた問題が間違っている」または「B が解いた問題が間違っている」

の 2 通りあります。

本問の(2)では間違いの原因が A，B のどちらにあるのかを確率的に考えている問題になります。

(1)　事象 $A,\ B,\ E$ を以下のように定める。

A：1 つの問題を選んだとき，それが A が解いた問題である

B：1 つの問題を選んだとき，それが B が解いた問題である

E：1 つの問題を選んだとき，それが間違いである

このとき，求める確率は $P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$

$=P(A)\cdot P_A(E)+P(B)\cdot P_B(E)$ (∵ 乗法定理)

$P(A)=\dfrac{60}{100}=\dfrac{3}{5}$，$P_A(E)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$，$P(B)=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$，$P_B(E)=\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$ となるので，

$$P(E)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{25}+\frac{1}{10}=\frac{11}{50}$$

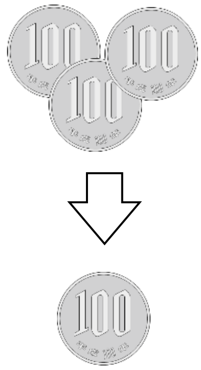
(2)　求めるのは 1 つの問題を選んだとき，

「その答えが間違っているという条件の下で，それが A が解いた問題である確率」

なので，$P_E(A)$ となる。これより，

$$P_E(A)=\frac{P(E\cap A)}{P(E)}=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A)\cdot P_A(E)}{P(E)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{11}{50}}=\frac{6}{11}$$

§5　期待値



　当選金額が 1 万円の宝くじがある。くじ 1 枚の値段が 300 円で，

当選確率が $\dfrac{1}{100}$ だとすると，皆さんはこの宝くじを買いますか？

当選確率が $\dfrac{1}{100}$ ということは，「100 枚買えば 1 枚は当たる？」ぐらいな感じです。

つまり，「100 枚買うと 1 万円もらえる」ぐらいな感じになるので，
平均すると，「宝くじを 1 枚買うと 100 円もらえる」ということになります。
　宝くじが 1 枚 300 円ということを考えるとこの宝くじを買うことは明らかに
損だということが分かります。

　ここで出てきた「100 円」という値は宝くじを 1 枚買ったときにもらえる金額の**平均値**になります。
つまり，宝くじを 1 枚買うと「平均して 100 円の利益が期待できる」ということから，この値のことを**期待値**といいます。

○　期待値の求め方

　ある宝くじの総本数は 100 本で，当選金額とその本数の関係は右の表のようになっているとする。
このとき，この宝くじを 1 本引いたときの期待値を求めよう。

	賞金	本数
1等	10,000	5
2等	5,000	15
3等	1,000	25
4等	100	55

　期待値とは宝くじを 1 本引いたときの賞金の平均値なので，以下のように
計算することができる。

$$\frac{10000 \times 5 + 5000 \times 15 + 1000 \times 25 + 100 \times 55}{100} = 1555\ (\text{円})$$

　ここで，この式の左辺は次にように変形することができる。

$$10000 \times \boxed{\frac{5}{100}} + 5000 \times \boxed{\frac{15}{100}} + 1000 \times \boxed{\frac{25}{100}} + 100 \times \boxed{\frac{55}{100}} = 1555$$

　この式において，$\boxed{}$ 部分はそれぞれ 1 等，2 等，3 等，4 等の当選確率となっている。
　つまり，賞金の期待値(平均値)は『**(賞金)×(当選確率)の和**』で求められることが分かる。

　一般的にある試行において，x_1，x_2，x_3，⋯，x_n という値になる確率がそれぞれ p_1，p_2，p_3，⋯，p_n であるとき，期待値 E は次のように求めることができる。

取りうる値	x_1	x_2	x_3	⋯	x_n
確　率	p_1	p_2	p_3	⋯	p_n

(ただし，$p_1 + p_2 + p_3 + \ \cdots\ + p_n = 1$)

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ \cdots\ + x_n p_n$$

例 12　$\boxed{0}$のカードが 2 枚，$\boxed{3}$のカードが 2 枚，$\boxed{6}$のカードが 1 枚，合計 5 枚のカードがあり，この中から 2 枚のカードを引く。以下の 2 つのゲームのどちらが有利ですか。

（ⅰ）(2 枚のカードの和)× 100 円の金額がもらえる。

（ⅱ）(2 枚のカードの積)× 100 円の金額がもらえる。

それぞれの場合の期待値を計算することで，有利・不利の判断ができます。

全事象は ${}_5C_2 = 10$ 通りとなる。

（ⅰ）もらえる金額を X とすると，$X = 0,\ 300,\ 600,\ 900$

それぞれの確率は右のようになる。

このとき，期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 300 \times \frac{4}{10} + 600 \times \frac{3}{10} + 900 \times \frac{2}{10}$$

$$= 120 + 180 + 180 = 480\,(円)$$

X	0	300	600	900
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

（ⅱ）もらえる金額を Y とすると，$Y = 0,\ 900,\ 1800$

それぞれの確率は右のようになる。

このとき，期待値 $E(Y)$ は

$$E(Y) = 0 \times \frac{7}{10} + 900 \times \frac{1}{10} + 1800 \times \frac{2}{10}$$

$$= 90 + 360 = 450\,(円)$$

Y	0	900	1800
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

以上より，(ⅰ)のゲームの方が有利であることが分かる。

column（年末ジャンボ宝くじの期待値）

毎年発売される年末ジャンボ宝くじ。1 等 7 億円と聞くと，ついつい買いたくなってしまうかもしれませんが，実は期待値は 149.995 円しかありません。くじが 1 本 300 円なので，買うと明らかに損。それでも多くの人が買いたくなるのは 7 億という夢を買っている(?) ということなのかもしれません。

等級	当選金額	当選本数	当選確率	金額×確率
1等	700,000,000	23	0.00000005	35
1等前後賞	150,000,000	46	0.00000010	15
1等組違い賞	100,000	4,577	0.00000995	0.995
2等	10,000,000	92	0.00000020	2
3等	1,000,000	920	0.00000200	2
4等	50,000	46,000	0.00010000	5
5等	10,000	1,380,000	0.00300000	30
6等	3,000	4,600,000	0.01000000	30
7等	300	46,000,000	0.10000000	30
発売本数		460,000,000	**期待値**	**149.995**