

# 場合の数

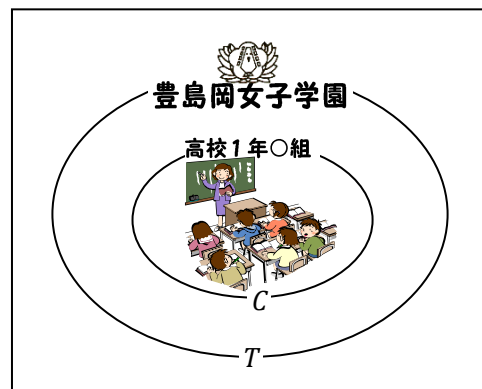
## §1 集合の要素の個数

ここでは集合を構成している**要素の個数**について考える。  
 豊島岡女子学園の生徒数を 1000 人，高校 1 年〇組の生徒数を 45 人とする，集合  $T$  の要素の個数が 1000，集合  $C$  の要素の個数が 45 となり，次のように表す。

$$n(T) = 1000, n(C) = 45$$

2 つの集合  $S, B$  の和集合の要素の個数  $n(S \cup B)$ ，

3 つの集合  $S, B, C$  の和集合の要素の個数  $n(S \cup B \cup C)$  は次のように表せる。



### 和集合の個数

$$\textcircled{1} \quad n(S \cup B) = n(S) + n(B) - n(S \cap B)$$

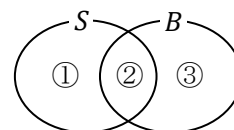
$$\textcircled{2} \quad n(S \cup B \cup C) = n(S) + n(B) + n(C) - n(S \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap S) + n(S \cap B \cap C)$$

### 証明

① 右図のように，集合内の要素の個数を①～⑦とする。

このとき，

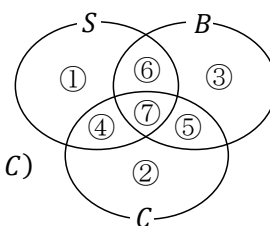
$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= n(S) + n(B) - n(S \cap B) \\ &= (\textcircled{1} + \textcircled{2}) + (\textcircled{2} + \textcircled{3}) - \textcircled{2} \\ &= \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \\ &= n(S \cup B) = \text{(左辺)} \end{aligned}$$



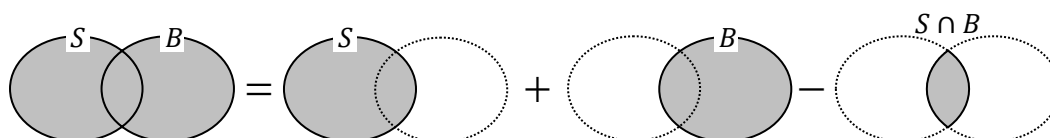
② 右図のように，集合内の要素の個数を①～⑦とする。

このとき，

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= n(S) + n(B) + n(C) - n(S \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap S) + n(S \cap B \cap C) \\ &= (\textcircled{1} + \textcircled{4} + \textcircled{6} + \textcircled{7}) + (\textcircled{3} + \textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7}) + (\textcircled{2} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{7}) \\ &\quad - (\textcircled{6} + \textcircled{7}) - (\textcircled{5} + \textcircled{7}) - (\textcircled{4} + \textcircled{7}) + \textcircled{7} \\ &= \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} \times 2 + \textcircled{5} \times 2 + \textcircled{6} \times 2 + \textcircled{7} \times 3 - (\textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7} \times 3) + \textcircled{7} \\ &= \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7} \\ &= n(S \cup B \cup C) = \text{(左辺)} \end{aligned}$$



結局①は， $n(S) + n(B)$  を計算すると，重なっている部分が出てきてしまうので，その分を引いているだけである。

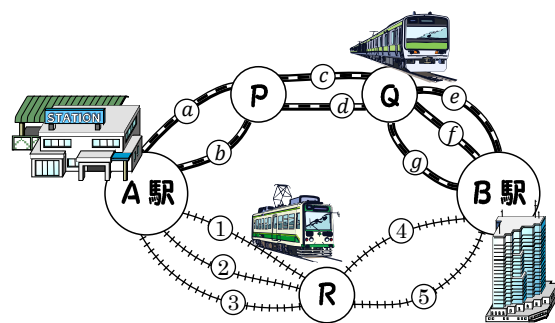


②についても同様に考えればよい。

## § 2 和の法則・積の法則

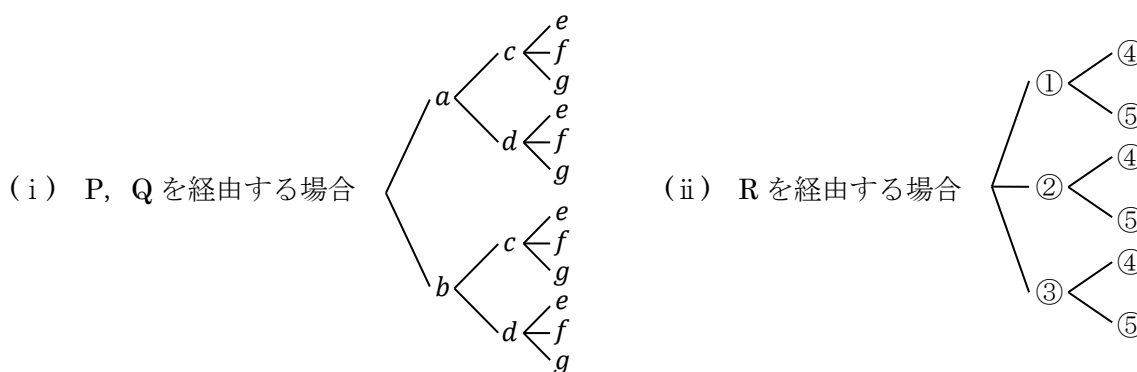
A 駅から B 駅まで電車を乗り継いで行きたい。  
 行き方は右のように、P、Q の 2 駅を経由していく方法と  
 R 駅を経由していく 2 通りの方法がある。

このとき、A 駅から B 駅までの経路が何通りあるかを考える。



### ○ 樹形図

これを正確に数えるには、すべての経路を書き出してから数えていけばよいが、**もれや重複がない**ようにすべて書き出すために、以下のような図を用いるとよい。この図のことを**樹形図**という。



例えば、P、Q の 2 駅を経由していく場合、A から P までは路線  $a$ 、P から Q までは路線  $c$ 、Q から B までは路線  $e$  で行くととき、その経路を  $a-c-e$  と結ぶことで表している。

### ○ 和の法則

上の樹形図から、A 駅から B 駅までの経路は、

(i) P、Q を経由する場合 12 通り

(ii) R を経由する場合 6 通り

となるので、A 駅から B 駅までの経路は全部で、

$$12 + 6 = 18 \text{ 通り}$$

となる。

このように、2 つの事柄 A と B があり、これらが**同時に起こらない**とき、

(i) A が起こる場合が  $m$  通り

(ii) B が起こる場合が  $n$  通り

とすると、A または B が起こる場合の数は  $m + n$  通りとなる。これを**和の法則**という。

## ○ 積の法則

数える個数が少ないときは、樹形図ですべての場合を表すことができるが、個数が多くなると樹形図で表すのが難しくなってくる。このようなときは、樹形図を踏まえたうえで、計算で処理をしていく必要がある。

(i) P, Q を経由する場合の数

A から P へ行く方法が 2 通り、そのそれぞれに対し P から Q へ行く方法が 2 通りあるので、A から Q へ行く方法は、

$$2 \times 2 = 4 \text{ 通り}$$

となる。その 4 通りそれぞれに対し、Q から B へ行く方法が 3 通りあるので、結局、A から P, Q を経由して B へ行く場合の数は

$$4 \times 3 = 12 \text{ 通り}$$

となる。

(ii) R を経由する場合

A から R へ行く方法が 3 通り、そのそれぞれに対し R から Q へ行く方法が 2 通りあるので、A から Q へ行く方法は、

$$3 \times 2 = 6 \text{ 通り}$$

このように、2 つの事柄 A と B があり、A が起こる場合が  $m$  通り、そのそれぞれに対し、B が起こる場合が  $n$  通りとすると、A, B がともに起こる場合の数は

$$m \times n \text{ 通り}$$

となる。これを**積の法則**という。

**例 1** 整数 72 の正の約数の個数を求めなさい。

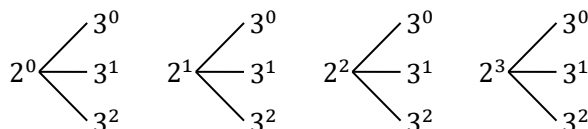
まずは樹形図をかいてみます。

**解①**

$72 = 2^3 \cdot 3^2$  より、72 の正の約数は

$$2^a 3^b \quad (0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 2)$$

と表すことができる。よって、72 の正の約数を、樹形図を用いて表すと以下のようになる。



これより、72 の約数は全部で 12 個ある。

次に、積の法則を用いて解きます。

**解②**

$72 = 2^3 \cdot 3^2$  より、72 の正の約数は

$$2^a 3^b \quad (0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 2)$$

と表すことができる。 $a$  の選び方は 4 通り、 $b$  の選び方は 3 通りあるので、

72 の約数は全部で  $4 \times 3 = 12$  個ある。

## §3 順列

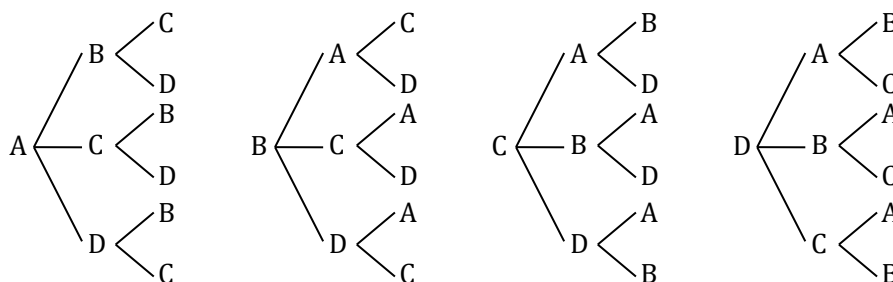
いくつかのものを、**順序をつけて並べる**ことを**順列**という。ここでは、その総数について考えていく。

**例2** A, B, C, Dの4つの文字から3つを取り出して1列に並べたとき、その並べ方の総数は全部で何通りありますか。

まずは樹形図をかいてみます。

**解①**

並べ方を樹形図を用いて表すと以下のようになる。



これより、並べ方の総数は、24通り。

次に、積の法則を用いて解きます。

**解②**

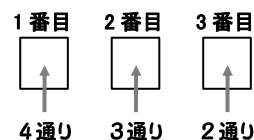
A, B, C, Dの4文字のうち3文字を、左から順番に並べていく。

1番目の文字の選び方はA, B, C, Dの4通りとなる。

2番目の文字の選び方は、1番目に用いた文字を除いた3通りとなる。

3番目の文字の選び方は、1番目、2番目に用いた文字を除いた2通りとなる。

よって、積の法則から並べ方の総数は、 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通り。



一般的に異なる  $n$  個のものから  $r$  個取り出して1列に並べたとき、その総数を  ${}_n P_r$  ( $P$ はPermutationの略)と表す。つまり、上の**例2**は「異なる4個から3個を取り出して1列に並べる」ので、 ${}_4 P_3$ と表せる。

よって、 ${}_4 P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ となる。

異なる  $n$  個のものから  $r$  個取り出して1列に並べたとき、

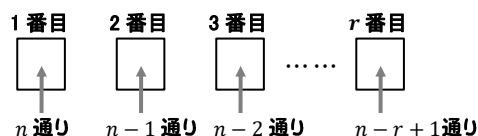
1番目の選び方は  $n$  通り、

2番目の選び方は  $n - 1$  通り、

3番目の選び方は  $n - 2$  通り、

⋮

$r$ 番目の選び方は  $n - r + 1$  通りなので、 ${}_n P_r = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1)$ となる。



### ●● 順列の総数 ●●

異なる  $n$  個のものから  $r$  個取り出して1列に並べた総数は

$${}_n P_r = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}_{r \text{ 個の積}}$$

また、 $r = n$  のとき、つまり「異なる  $n$  個のものを 1 列に並べる」順列は

$${}_n P_n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

となる。このとき、右辺は  $n$  以下の自然数すべての積となっているが、これを  $n$  の階乗といい、 $n!$  で表す。

$$\begin{aligned} 3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\ 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\ 5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \end{aligned}$$

この階乗の記号を使うと

$$\begin{aligned} {}_n P_r &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

と表すことができる。

なお、この式に  $r = n$  を代入すると、 ${}_n P_n = \frac{n!}{0!}$  となるが、そもそも  ${}_n P_n = n!$  なので、

$0!$  の値は 1 と定義される。

**例 3** T, O, S, I, M, A の 6 文字を 1 列に並べるとき、次のような並べ方は何通りありますか。

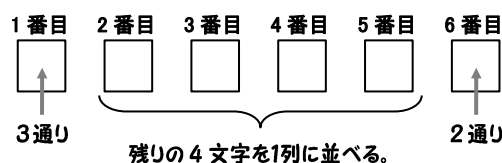
- (1) 母音が両端にくる場合                      (2) 母音がすべて隣り合う場合

(1) 母音は O, I, A の 3 つあるので、

1 番目の文字の選び方は O, I, A の 3 通りとなり、  
6 番目の文字の選び方は、1 番目に用いた文字を除いた  
2 通りとなる。

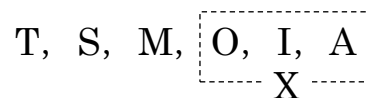
2 番目から 5 番目には、1 番目、2 番目に用いた文字を  
除いた 4 通りの文字が並ぶ。その並び方は  $4!$  通り。

以上より、並べ方の総数は、 $3 \times 2 \times 4! = 6 \times 24 = 144$  通り。



(2) 母音 3 文字を 1 つにまとめて、それを X とおく。

母音がすべて隣り合うには、4 文字 T, S, M, X を  
1 列に並べればよい。その並び方は、 $4!$  通り。



そのそれぞれに対して、母音 O, I, A の並び方は  $3!$  通りあるので、  
並べ方の総数は、 $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$  通り。

○ 円順列

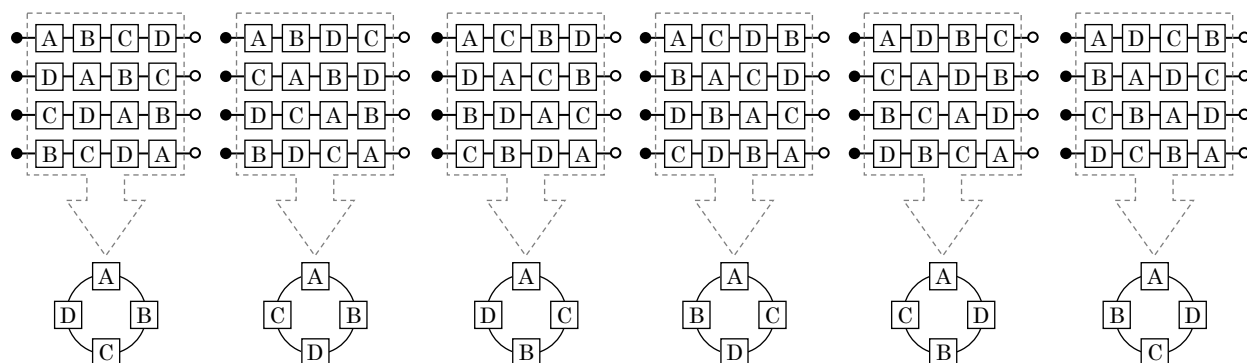
ここではいくつかのものを、円形に並べていくとき、その総数について考えていく。

**例 4** A, B, C, D の 4 つの文字を円形に並べる方法は何通りありますか。

円順列のポイントは、「回転したときに一致する並べ方は、同じ並び方と見なす」という点です。  
つまり、1 列に並べるときより、かなり総数は減ります。

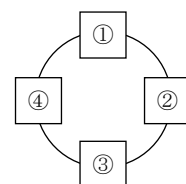
**解①**

まず、A, B, C, D の 4 文字を 1 列に並べる。その並べ方は 4! 通り。  
ここで、1 列に並べた各列の両端(下図の●と○)をつなぐと、4 通りの重複が現れるので、  
並べ方の総数は、 $\frac{4!}{4} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  通り。



**解②**

すべての円順列は、回転させることで必ず、右図の①の場所に A を配置することができる。つまり、A を①にあらかじめ固定しておいて、残りの C, D, E を②, ③, ④の 3 か所に並べればよい。  
よって、並べ方の総数は  $(4 - 1)! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  通り。



一般的に、円順列の総数は以下ようになる。

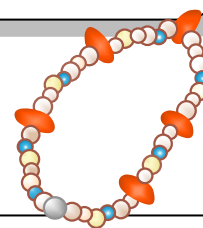
●● 円順列の総数 ●●

異なる  $n$  個のものの円順列の総数は

$$\frac{n!}{n} = (n - 1)! \text{ 通り}$$

**例 5** A, B, C, D の 4 つの宝石を用いてネックレスを作る。宝石の並び方が異なるものは何通りできますか。

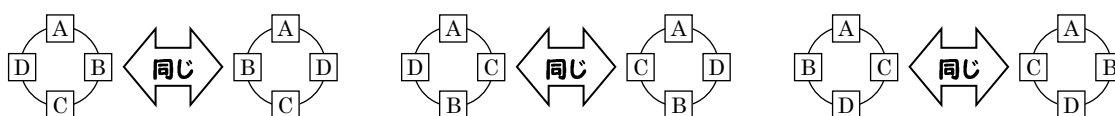
基本的には円順列と同じ考え方をしますが、ネックレスの場合、A, B, C, D の 4 つがひもにつながっているため、ひっくり返すことができます。つまり、ひっくり返して一致するものは 1 通りと考えるわけです。



4 つのものの円順列の総数は、 $\frac{4!}{4} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  通り。

このうち、ひっくり返して一致するものは、同じ並び方と考えるので、

並び方の総数は、 $6 \times \frac{1}{2} = 3$  通り。



## ○ 重複順列

いくつかの異なるものから、繰り返して用いることを許して並べていく順列を**重複順列**という。

**例 6** A, B, C, D, E の 5 つの文字のうち 3 個を繰り返し用いて並べる方法は何通りありますか。

1 番目, 2 番目, 3 番目すべて 5 通りの文字の並び方があるので、並び方の総数は、 $5^3 = 125$  通り。



一般的に、重複順列の総数は以下のようになる。

### ● 重複順列の総数 ●

$n$  個のものから  $r$  個とった重複順列の総数は  
 $n^r$  通り

## § 4 組合せ

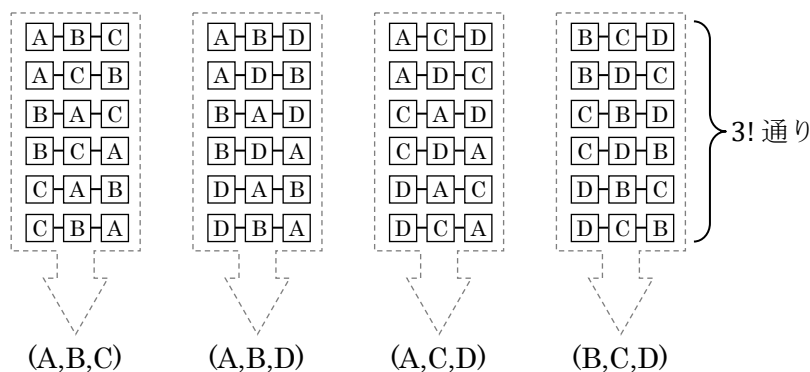
いくつかのものの中から一部を取り出したとき、その**組合せ**の総数について考える。

**例 7** A, B, C, D の 4 つの文字から 3 つを取り出したとき、その組合せの総数は全部で何通りありますか。

組合せの場合、順列との違って並べる作業はしません。つまり、順列よりかなり総数は減ります。

まず、A, B, C, D の 4 文字から 3 文字を取り出して 1 列に並べる。その並べ方は  ${}_4P_3$  通り。ここでは、3 文字を並べずに組合せを考えるので、 ${}_4P_3$  通りの中に、3 文字の並べ方分の  $3!$  通りの重複が現れる。

よって、並べ方の総数は、 $\frac{{}_4P_3}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$  通り。



一般的に異なる  $n$  個のものから  $r$  個を取る組合せの総数を  ${}_nC_r$  ( $C$  は Combination の略) と表す。つまり、上の**例 7**は「異なる 4 個のものから 3 個を取る組合せの総数」なので、 ${}_4C_3$  と表せる。

よって、 ${}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$  となる。

異なる  $n$  個のものから  $r$  個を取る組合せの総数は、**例 7**と同様に考えると、まず、異なる  $n$  個のものから  $r$  個取り出して 1 列に並べると、その総数は  ${}_nP_r$  通り。並べずに組合せを考ええると、 $r$  個の並べ方の分の  $r!$  通りの重複が現れるので、

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

となる。

### ●● 組合せの総数 ●●

異なる  $n$  個のものから  $r$  個を取る組合せの総数は

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

○  $nC_r$  の性質

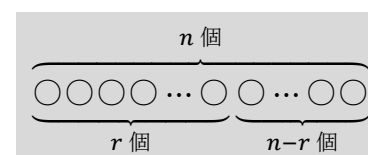
例 7 において、4 文字から「3 文字を取り出す」とこと、「残りの 1 文字を取り出す」とことは同じことなので、 ${}_4C_3 = {}_4C_1$  が成り立つ。

一般的には、「異なる  $n$  個のものから  $r$  個を取り出す」とき、異なる  $n$  個から「 $r$  個取り出す」とこと、「残りの  $n-r$  個取り出す」とことは同じことなので、

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

が成り立つ。

また、 ${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$  となる。



例 8 男子 4 人、女子 6 人の計 10 人から 4 人を選ぶとき、次の場合の数を求めなさい。

- (1) すべての場合 (2) 男女各 2 人ずつの場合 (3) 女子が少なくとも 1 人含まれる場合

## 解①

(1) 10 人から 4 人を選べばよいので、 ${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$  通り

(2) 女子 2 人の選び方は、 ${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$  通り 男子 2 人の選び方は、 ${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$  通り

よって、求める場合の数は、 $15 \times 6 = 90$  通り

(3)(i) 男子 3 人、女子 1 人選ぶ場合

女子 1 人の選び方は、 ${}_6C_1 = 6$  通り 男子 3 人の選び方は、 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$  通り

よって、求める場合の数は、 $6 \times 4 = 24$  通り

(ii) 男子 1 人、女子 3 人選ぶ場合

女子 3 人の選び方は、 ${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$  通り 男子 1 人の選び方は、 ${}_4C_1 = 4$  通り

よって、求める場合の数は、 $20 \times 4 = 80$  通り

(iii) 男子 0 人、女子 4 人選ぶ場合

女子 4 人の選び方は、 ${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$  通り

(2)と(i), (ii), (iii)より、女子が少なくとも 1 人含まれる場合の数は、

$$90 + 24 + 80 + 15 = 209 \text{ 通り}$$

## 解②

(3) 4 人とも男子が選ばれる場合の数は 1 通り。

よって、女子が少なくとも 1 人含まれる場合の数は

$$210 - 1 = 209 \text{ 通り}$$

**例 9** 5人を次のように分ける方法は何通りありますか。

- (1) 部屋 A, B に 2 人, 部屋 C に 1 人入れる      (2) 2 人, 2 人, 1 人の 3 組に分ける

(1) 部屋 A に入る 2 人の選び方は,  ${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$  通り

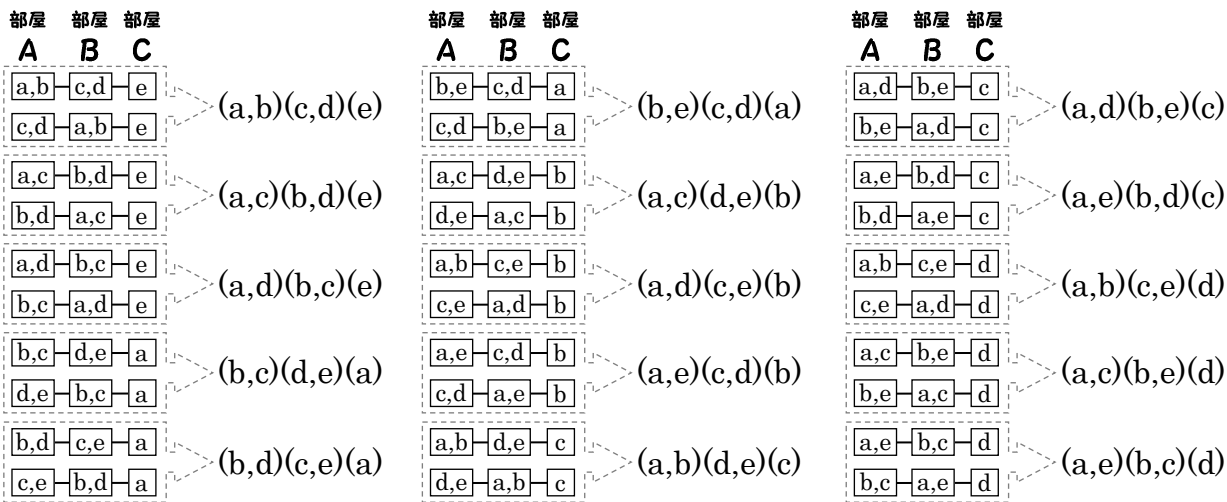
残りの 3 人の中から部屋 B に入る 2 人を選ぶ方法は,  ${}_3C_2 = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$  通り

残りの 1 人が部屋 C に入る。

よって, 求める場合の数は,  $10 \times 3 = 30$  通り

(2) (1)において部屋 A, B, C の区別をなくすと, 2 人ずつの組, 2 通りの区別がなくなる。

よって, 求める場合の数は,  $\frac{30}{2} = 15$  通り



○ 同じものを含む順列

**例 10** A, A, A, B, C の 5 つの文字を 1 列に並べる方法は何通りありますか。

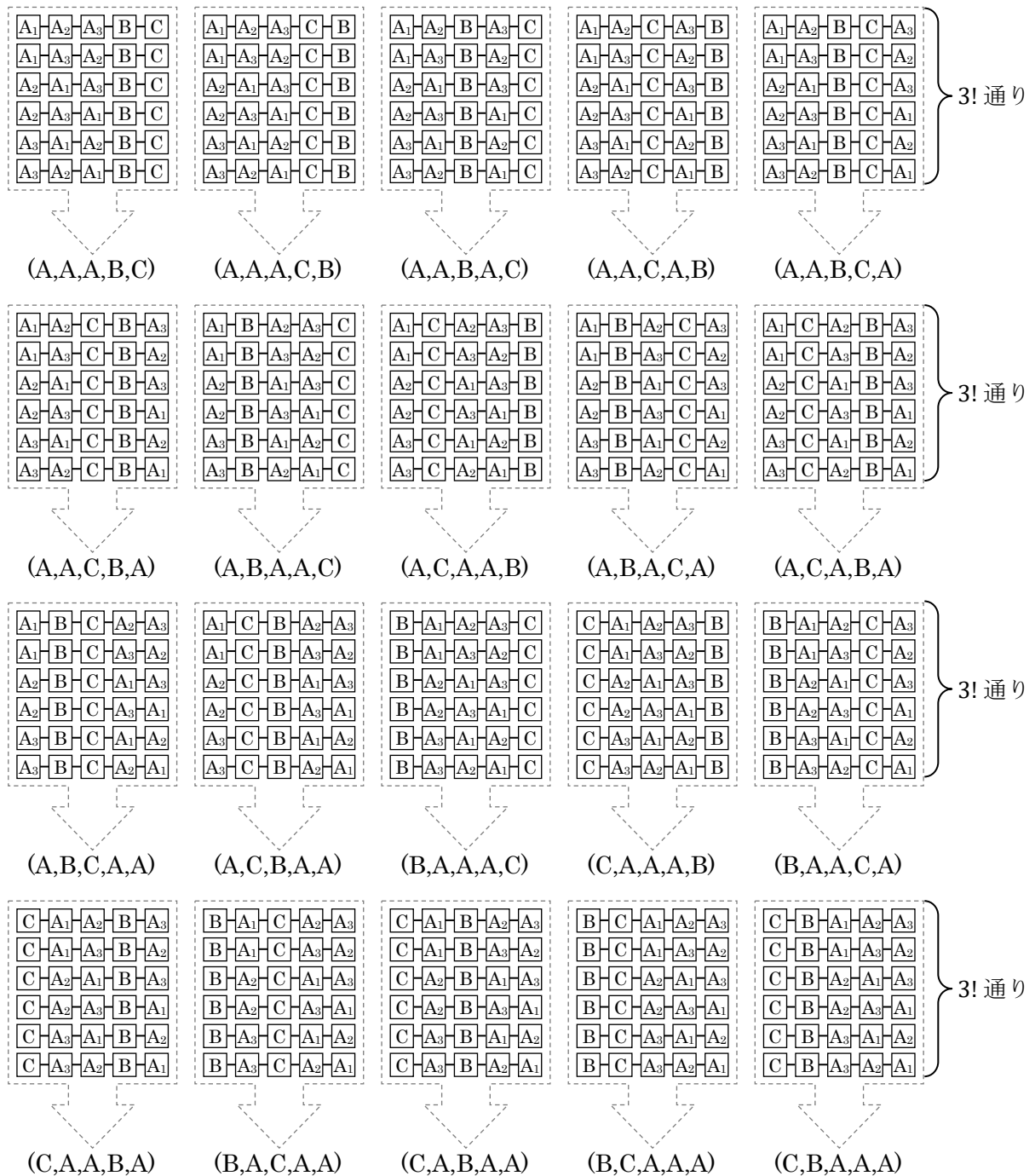
**解①**

まず, 3 つの A を区別して  $A_1, A_2, A_3$  とする。

5 つの文字  $A_1, A_2, A_3, B, C$  を 1 列に並べると, その並べ方は  $5!$  通り。

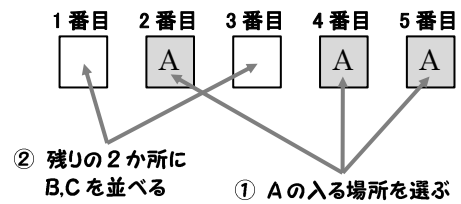
ここで, 3 つの  $A_1, A_2, A_3$  をすべて A にすると, 3 つの A の並べ方  $3!$  分だけ重複が現れる。

よって, 並べ方の総数は,  $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$  通り。



**解②**

まず、A の入る場所を選ぶ。  
 5 か所から A の入る 3 か所を選べばよいので、  
 その選び方は、 ${}_5C_3$  通り。  
 次に、残りの 2 か所に B, C を並べる。  
 その並べ方は、 $2!$  通り。  
 よって、並べ方の総数は、 ${}_5C_3 \times 2! = 10 \times 2 = 20$  通り。



**○ 重複組合せ**

ここでは、いくつかのものの中から**重複を許して**一部を取り出したとき、その**組合せ**の総数について考えていく。

**例 11** 赤, 青, 黄の 3 色のボールがたくさんある。この中から重複を許して 5 個取り出すとき、その取り出し方は何通りありますか。

まずは地道に数えていきます。

**解①**

取り出す赤, 青, 黄のボールの個数をそれぞれ  $a, b, c$  とする。  
 ただし、 $a, b, c$  は  $0 \leq a \leq 5, 0 \leq b \leq 5, 0 \leq c \leq 5, a + b + c = 5$  を満たす整数。

(i) 1 色のボールを取り出すとき

このとき条件を満たす  $(a, b, c)$  の組は、 $(0, 0, 5)$  の並べ方分だけある。  
 つまり、3 通りある。

$a$	$b$	$c$
0	0	5
0	5	0
5	0	0

(ii) 2 色のボールを取り出すとき

このとき条件を満たす  $(a, b, c)$  の組は、 $(0, 1, 4), (0, 2, 3)$  の並べ方分だけある。つまり、それぞれ  $3! = 6$  通りあるので、  
 全部で、 $2 \times 6 = 12$  通り。

$a$	$b$	$c$	$a$	$b$	$c$
0	1	4	0	2	3
0	4	1	0	3	2
1	0	4	2	0	3
1	4	0	2	3	0
4	0	1	3	0	2
4	1	0	3	2	0

(iii) 3 色とも取り出すとき

このとき  $(a, b, c)$  の組は、 $(1, 1, 3), (1, 2, 2)$  の並べ方分だけある。つまり、それぞれ 3 通りあるので、  
 全部で、 $2 \times 3 = 6$  通り。

$a$	$b$	$c$	$a$	$b$	$c$
1	1	3	1	2	2
1	3	1	2	1	2
3	1	1	2	2	1

以上より、並べ方は全部で  $3 + 12 + 6 = 21$  通り。

ここからは少し工夫して数えてみます。

**解②**

○が5個と|が2本(○○○○○|)|を1列に並べる。このとき、

- ① 2本の|の左にある○の個数が赤色のボールの個数
- ② 2本の|の間にある○の個数が青色のボールの個数
- ③ 2本の|の右にある○の個数が黄色のボールの個数

	a	b	c
○○○○○	⇒ 0	0	5
○○○○ ○	⇒ 0	4	1
○○  ○○○	⇒ 2	0	3
○ ○ ○○○	⇒ 1	1	3
○○ ○○ ○	⇒ 2	2	1

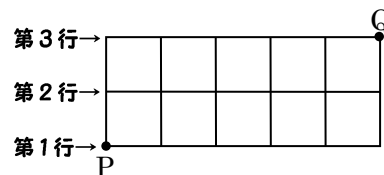
とすれば、5つのボールの取り出し方と、○○○○○|)|の並べ方が1対1に対応する。

○○○○○|)|の並べ方は、 ${}_{7}C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ 通りとなるので、

5つのボールの分け方も21通りとなる。

**解③**

右図のように縦に6本、横に3本の道を作り、地点Pから地点Qまでの最短経路を考える。このとき、



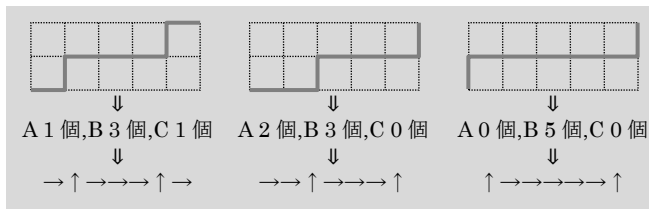
- ① 第1行目を進んだマス目の数が赤色のボールの個数
- ② 第2行目を進んだマス目の数が青色のボールの個数
- ③ 第3行目を進んだマス目の数が黄色のボールの個数

とすれば、5つのボールの取り出し方と、PからQまでの最短経路が1対1に対応する。

PからQまでの最短経路は、→が5個、↑が2個(→→→→→↑↑)の並べ方と1対1に対応するので、

その並べ方は、 ${}_{7}C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ 通り。

5つのボールの分け方も21通りとなる。



# MEMO