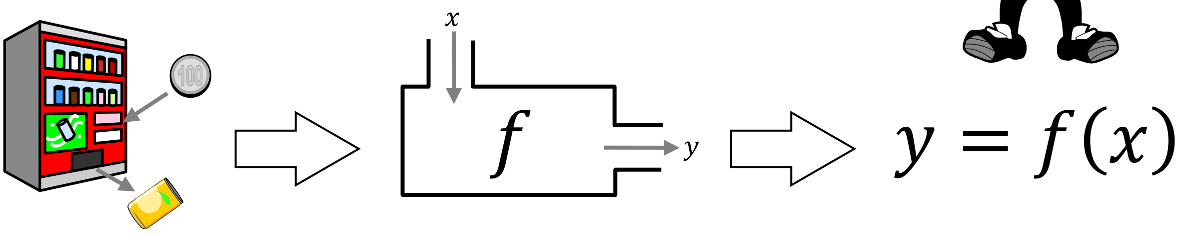
2 次 関 数

§1　関数とグラフ

○　関数とは

x の値をひとつ決めるとそれに応じて，y の値が規則 f によって **ただひとつ**定められるとき，**『y は x の関数である』**といい，この規則 f のことを**関数**という。このとき，x，y の関係を $y=f(x)$ と表す。

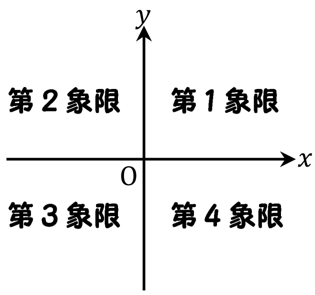


関数 $y=f(x)$ において，$x=a$ に対応して決まる y の値を $f(a)$ と表し，$f(a)$ を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**値**という。また，変数 x のとりうる値の範囲を**定義域**，それに対する y のとりうる値の範囲を**値域**という。

○　座標平面

平面上に x 軸，y 軸を定めると，その平面上のある点 P の位置は 2 つの数 a，b の組で $\mathrm{P}(a,\ b)$ と表すことができ，a を x 座標，b を y 座標という。座標軸で定められた平面を**座標平面**という。

また，座標軸で分けられた 4 つの部分を右図のように**第 1 象限**，**第 2 象限**，**第 3 象限**，**第 4 象限**という。ただし，座標軸上の点は，どの象限にも属さない。



例題 1 (1)　$f(x)=4x-3$，$g(x)=-3x^2+2x$ のとき，次の値を求めなさい。

$$f\left(\frac{3}{2}\right),\ f(-2),\ f(a+2),\ g(3a),\ g(a-2),\ g(a^2)$$

(2)　次の点は，第何象限の点ですか。

（ア）　$(2,\ 3)$　　（イ）　$(-1,\ -5)$　　（ウ）　$(-3,\ 2)$　　（エ）　$(4,\ -3)$

練習 1 (1)　$f(x)=-3x+2$，$g(x)=x^2-3x+2$ のとき，次の値を求めなさい。

$$f(0),\ f(-1),\ f(a+1),\ g(2),\ g(2a-1)$$

(2)　点 $(3x-1,\ 3-2x)$ は $x=2$ のとき第何象限にありますか。また，点 $(3x-1,\ -2)$ が第 3 象限にあるのは $x<$ $\boxed{}$ のときである。

例題 2　次の関数のグラフをかき，その値域を求めなさい。また，最大値，最小値があれば，それを求めなさい。

(1)　$y = -2x + 1\ (-1 \leqq x \leqq 2)$

(2)　$y = 2x - 4\ (0 \leqq x < 3)$

練習 2　次の関数の値域を求めなさい。また，最大値，最小値があれば，それを求めなさい。

(1)　$y = 5x - 2\ (0 \leqq x \leqq 3)$

(2)　$y = -3x + 1\ (-1 < x \leqq 2)$

例題 3　関数 $y = ax + b\ (1 \leqq x \leqq 2)$ の値域が $3 \leqq y \leqq 5$ であるとき，定数 a，b の値を求めなさい。

練習 3　関数 $y = ax + b\ (2 \leqq x \leqq 5)$ の値域が $-1 \leqq y \leqq 5$ であるとき，定数 a，b の値を求めなさい。

§2　2 次関数のグラフ

x の 2 次式で表された関数 y を x の 2 次関数といい，式で表すと，

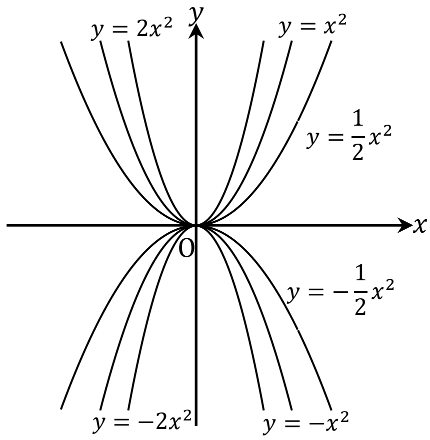
$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

となる。

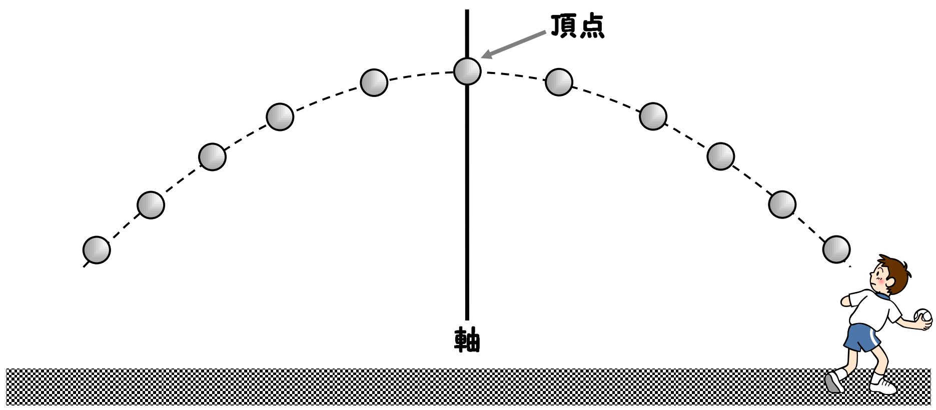
○　$y = ax^2$ $(a \neq 0)$ のグラフ

① $a > 0$ のとき
グラフは上に開いている。これを**下に凸（とつ）**と呼ぶ。
a の値が大きくなるほどグラフは閉じる。

② $a < 0$ のとき
グラフは下に開いている。これを**上に凸（とつ）**と呼ぶ。
a の値が小さくなるほどグラフは閉じる。

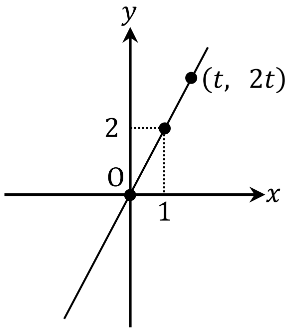


2 次関数のグラフは，**放物線(parabola)**とも呼ばれ，ボールを投げたときに描かれる軌跡に由来している。放物線は必ず対称軸を持ち，これを単に**軸**と呼び，軸と放物線の交点を**頂点**と呼ぶ。



○　$y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ のグラフ

2 点 (0, 0), (1, 2) を通る直線を考えると，この直線上の点は常に x **座標の 2 倍が** y **座標と等しい**。つまり，



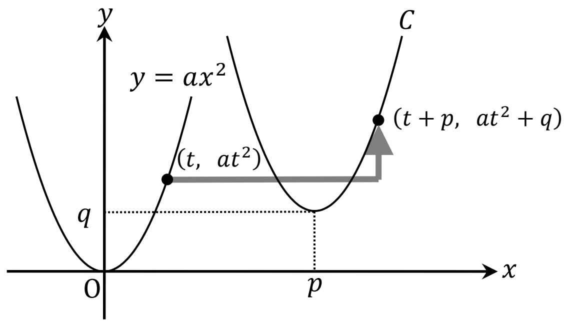
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

と表すことができる。この 2 式から t を消去すると，

$$y = 2x$$

となり，この式がこの直線を表す方程式になっている。

同様の考え方で，$y = ax^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したグラフ C が表す方程式を求めてみよう。$y = ax^2$ 上の任意の点は $(t,\ at^2)$ と表すことができるので，C 上の任意の点は $(t + p,\ at^2 + q)$ と表せる。つまり，



$$\begin{cases} x = t + p \\ y = at^2 + q \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

から t を消去すれば C の方程式が求まる。

$t = x - p$ より，$y = a(x - p)^2 + q$ となる。

この式は，頂点の座標が $(p,\ q)$ である放物線の方程式を表している。

放物線の方程式

頂点の座標が $(p,\ q)$ である放物線の方程式は

$$y = a(x - p)^2 + q$$

このことを用いて，$y = ax^2 + bx + c$ のグラフを考える。

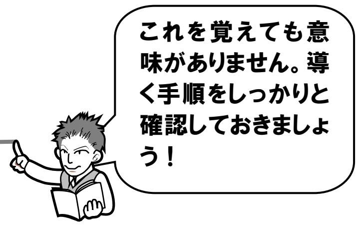
$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

2 次の係数 a でくくる。

(　) 内を平方完成する。

{　} を展開し,整理する。

これより，$y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，頂点の座標が $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ の放物線であることが分かる。



例題 4　次の 2 次関数のグラフは，2 次関数 $y=-x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか答えなさい。また，それぞれのグラフをかき，その軸と頂点を求めなさい。

(1)　$y=-x^2+1$　　(2)　$y=-(x+3)^2$　　(3)　$y=-(x-4)^2+2$

練習 4　次の 2 次関数のグラフは，[　] 内の 2 次関数のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか答えなさい。また，それぞれのグラフをかき，その軸と頂点を求めなさい。

(1)　$y=-x^2+4$ $[y=-x^2]$　　(2)　$y=2(x-1)^2$ $[y=2x^2]$　　(3)　$y=-3(x-2)^2-1$ $[y=-3x^2]$

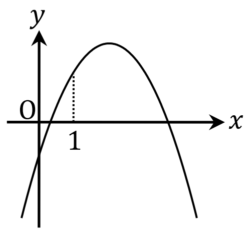
例題 5　次の 2 次関数のグラフをかきなさい。また，その軸と頂点を求めなさい。

(1)　$y=2x^2+3x+1$　　(2)　$y=-x^2+4x-3$

練習 5　次の 2 次関数のグラフをかきなさい。また，その軸と頂点を求めなさい。

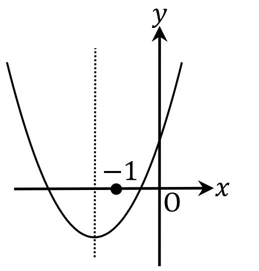
(1)　$y=-2x^2+5x-2$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x^2-3x-\dfrac{7}{2}$

例題 6　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を調べなさい。



(1)　a　　(2)　b　　(3)　c　　(4)　b^2-4ac　　(5)　$a+b+c$　　(6)　$a-b+c$

練習 6　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を調べなさい。



(1)　c　　(2)　b　　(3)　b^2-4ac　　(4)　$a+b+c$　　(5)　$a-b+c$　　(6)　$2a-b$

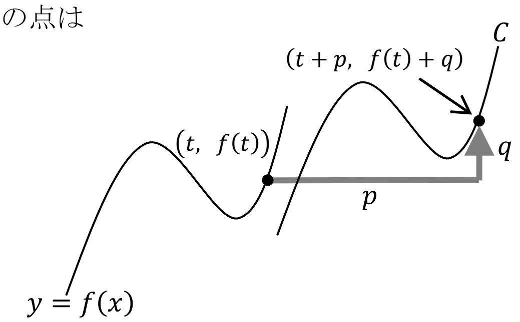
○　グラフの平行移動

関数 $y=f(x)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したグラフ C が表す方程式を求めよう。

$y=f(x)$ 上の任意の点を $\big(t,\ f(t)\big)$ とすると，C 上の任意の点は

$(t+p,\ f(t)+q)$ と表せる。つまり，

$$\begin{cases} x=t+p \\ y=f(t)+q \end{cases} \quad \big(t\text{ は任意の実数}\big)$$



から t を消去すれば C の方程式が求まる。

$t=x-p$ より，

$$y=f(x-p)+q \quad \Leftrightarrow \quad y-q=f(x-p)$$

と表すことができる。

　このことは，次のようにまとめることができる。

グラフの平行移動

関数 $y=f(x)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したグラフ C は

$$x \longrightarrow x-p, \quad y \longrightarrow y-q$$

と置き換えることで求まる。つまり，

$$y-q=f(x-p)$$

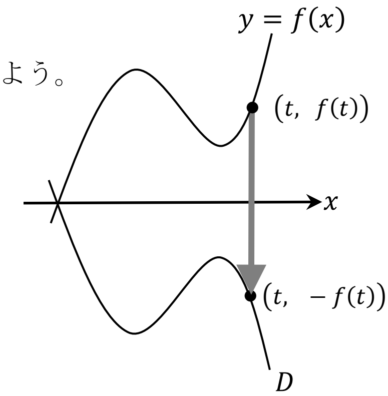
○　グラフの対称移動

$y=f(x)$ を x 軸に関して対称移動したグラフ D が表す方程式を求めよう。

$y=f(x)$ 上の任意の点を $\big(t,\ f(t)\big)$ とすると，D 上の任意の点は

$\big(t,\ -f(t)\big)$ と表せる。つまり，

$$\begin{cases} x=t \\ y=-f(t) \end{cases} \quad \big(t\text{ は任意の実数}\big)$$



から t を消去すれば D の方程式が求まる。

t を消去すると，

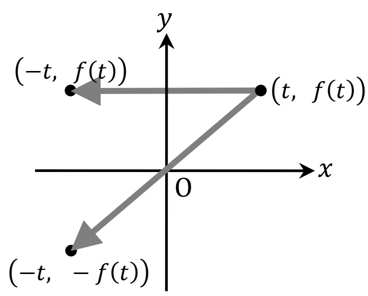
$$y=-f(x) \quad \Leftrightarrow \quad -y=f(x)$$

と表すことができる。

　また，y 軸，原点に関して対称移動したグラフについても同様に考えると，それぞれ，

$$y=f(-x),\ -y=f(-x)$$

と表すことができる。



　このことは，次のようにまとめることができる。

グラフの対称移動

関数 $y=f(x)$ を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したグラフは

それぞれ，

$$y \longrightarrow -y, \quad x \longrightarrow -x, \quad \begin{cases} x \longrightarrow -x \\ y \longrightarrow -y \end{cases}$$

と置き換えることで求まる。つまり，

$$-y=f(x),\ y=f(-x),\ -y=f(-x)$$

例 1　放物線 $y=x^2+2x-1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 平行移動して得られる放物線を求めなさい。また，x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したグラフをそれぞれ求めなさい。

解①

平行移動　$y+2=(x-1)^2+2(x-1)-1 \iff y=x^2-4$　　$x\to x-1,\ y\to y+2$

x 軸に関して対称移動　$-y=x^2+2x-1 \iff y=-x^2-2x+1$　　$y\to -y$

y 軸に関して対称移動　$y=(-x)^2+2(-x)-1 \iff y=x^2-2x-1$　　$x\to -x$

原点に関して対称移動　$-y=(-x)^2+2(-x)-1 \iff y=-x^2+2x+1$　　$x\to -x,\ y\to -y$

解②（頂点を移動）

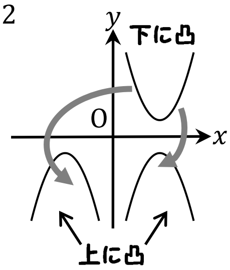
$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ より，頂点の座標は $(-1,\ -2)$

x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 平行移動すると頂点の座標は，$(0,\ -4)$ となるので，$y=x^2-4$

x 軸に関して対称移動すると頂点の座標は，$(-1,\ 2)$ となる。
このとき，求める放物線は上に凸なので，$y=-(x+1)^2+2$

y 軸に関して対称移動すると頂点の座標は，$(1,\ -2)$ となるので，$y=(x-1)^2-2$

原点に関して対称移動すると頂点の座標は，$(1,\ 2)$ となる。
このとき，求める放物線は上に凸なので，$y=-(x-1)^2+2$



例題 7　放物線 $y=-2x^2+4x-4$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めなさい。

練習 7　放物線 $y=x^2-4x$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めなさい。

例題 8 (1)　2 次関数 $y=2x^2+6x+7$ …① のグラフは，2 次関数 $y=2x^2-4x+1$ …② のグラフをどのように平行移動したものですか。

(2)　x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 平行移動すると，放物線 $C_1：y=2x^2+8x+9$ に移されるような放物線 C の方程式は $y=2x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ である。

練習 8 (1)　2 次関数 $y = x^2 - 8x - 13$ のグラフをどのように平行移動すると, 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 3$ のグラフに重なりますか。

(2)　x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると，放物線 $y = x^2 + 3x + 4$ に移されるような放物線の方程式を求めなさい。

例題 9　2 次関数 $y = 2x^2 - 5x + 4$ のグラフを，(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点 のそれぞれに関して対称移動した曲線をグラフにもつ 2 次関数を求めなさい。

練習 9　2 次関数 $y = -x^2 + 4x - 1$ のグラフを，(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点 のそれぞれに関して対称移動した曲線をグラフにもつ 2 次関数を求めなさい。

例題 10　放物線 $y = x^2 + ax + b$ を原点に関して対称移動し，更に x 軸方向に -1，y 軸方向に 8 だけ平行移動すると，放物線 $y = -x^2 + 5x + 11$ が得られるという。このとき，定数 a，b の値を求めなさい。

練習 10　放物線 $y = x^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した後，x 軸に関して対称移動したところ，放物線の方程式は $y = -x^2 - 3x + 3$ となった。このとき，p，q の値を求めなさい。

○　2 次関数の決定

ここでは，放物線にいくつかの条件を与えられたときに，その方程式を求める問題を考える。

例 2　3 点 (1，2)，(3，2)，(4，5) を通る 2 次関数を求めなさい。

解①($y = ax^2 + bx + c$ **を用いる**)

求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

(1，2)，(3，2)，(4，5) の座標をそれぞれ代入すると，

$a + b + c = 2$　…①，$9a + 3b + c = 2$　…②，$16a + 4b + c = 5$　…③

② − ① より，$8a + 2b = 0 \iff b = -4a$　…④

③ − ② より，$7a + b = 3$　…⑤

④，⑤より，b を消去すると，$7a - 4a = 3 \iff a = 1$

このとき，$b = -4$，$c = 5$

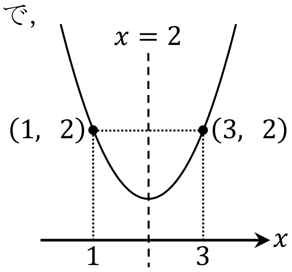
以上より，求める 2 次関数は $y = x^2 - 4x + 5$

解②（$y=a(x-p)^2+q$ **を用いる**）

(1, 2), (3, 2) を通ることから軸は $x=2$ となるので，
求める 2 次関数は $y=a(x-2)^2+q$ とおける。
(3, 2), (4, 5) の座標をそれぞれ代入すると，

$a+q=2$ …①，$4a+q=5$ …②

② − ① より，$3a=3$ ⇔ $a=1$
このとき，$q=1$
以上より，求める 2 次関数は $y=(x-2)^2+1$



例題 11　2 次関数のグラフが次の条件を満たすとき，その 2 次関数を求めなさい。

(1)　頂点が点 $(-2,\ 1)$ で，点 $(-1,\ 4)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で，2 点 $(-1,\ -6)$, $(1,\ 2)$ を通る。

練習 11　2 次関数のグラフが次の条件を満たすとき，その 2 次関数を求めなさい。

(1)　関数 $y=2x^2+6x+4$ と頂点が同じで，点 $(0,\ -5)$ を通る。

(2)　頂点の x 座標が -3 で，2 点 $(-6,\ -8)$, $(1,\ -22)$ を通る。

例題 12　2 次関数のグラフが次の条件を満たすとき，その 2 次関数を求めなさい。

(1)　頂点が x 軸上にあって，2 点 $(0,\ 4)$, $(-4,\ 36)$ を通る。

(2)　放物線 $y=2x^2$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 4)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-4$ 上にある。

練習 12　2 次関数のグラフが次の条件を満たすとき，その 2 次関数を求めなさい。

(1)　頂点が点 $(p,\ 3)$ で，2 点 $(-1,\ 11)$, $(2,\ 5)$ を通る。

(2)　放物線 $y=x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 4)$ を通り，頂点が直線 $y=2x+1$ 上にある。

例題 13　2 次関数のグラフが次の条件を満たすとき，その 2 次関数を求めなさい。

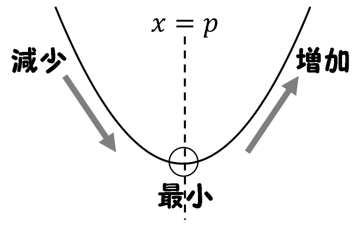
(1)　3 点 $(-1,\ 16)$, $(4,\ -14)$, $(5,\ -8)$ を通る。

(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動した曲線で，2 点 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$ を通る。

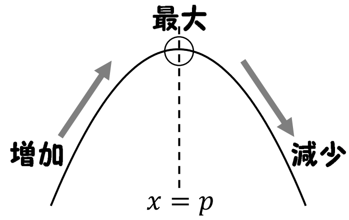
練習 13 (1)　グラフが 3 点 $(1,\ 8)$, $(-2,\ 2)$, $(-3,\ 4)$ を通る 2 次関数を求めなさい。

(2)　放物線 $y=2x^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，2 点 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$ を通る。定数 b，c の値を求めなさい。

§3　2 次関数の最大･最小



　2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大値，最小値について考える。
$a>0$ ならば，下に凸のグラフなので，
$x<p$ において減少し，$x>p$ において増加する。
つまり，$x=p$ で最小値 q をとり，最大値は存在しない。



$a<0$ ならば，上に凸のグラフなので，
$x<p$ において増加し，$x>p$ において減少する。
つまり，$x=p$ で最大値 q をとり，最小値は存在しない。

次に区間が与えられたときの最大値，最小値を考えよう。

例 3　2 次関数 $y=x^2-2x+3$ の以下の定義域における最大値，最小値を求めなさい。
(1)　$-2 \leqq x \leqq 0$　　(2)　$-1 \leqq x \leqq 2$　　(3)　$-1 \leqq x \leqq 3$　　(4)　$0 \leqq x \leqq 3$　　(5)　$2 \leqq x \leqq 4$

$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$
これより，(1)～(5)のそれぞれの定義域におけるグラフは下図のようになる。

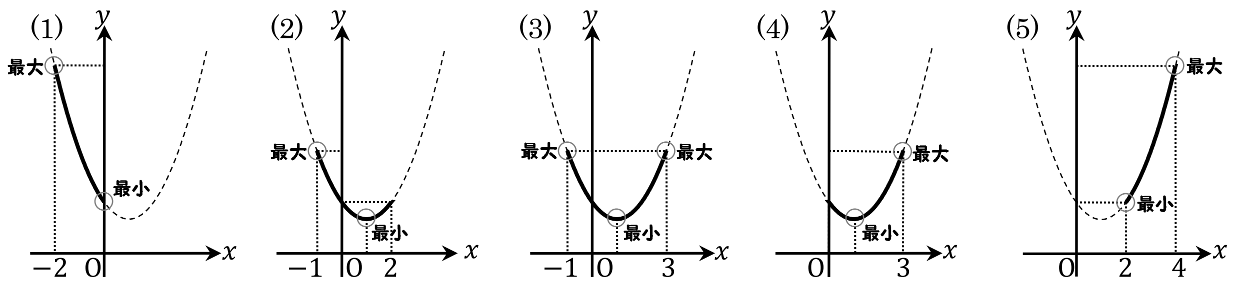
(1)　最大値　11　($x=-2$)
　　 最小値　3　($x=0$)

(2)　最大値　6　($x=-1$)
　　 最小値　2　($x=1$)

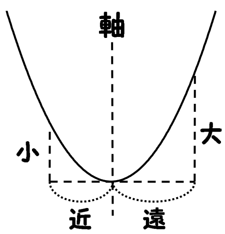
(3)　最大値　6　($x=-1$，3)
　　 最小値　2　($x=1$)

(4)　最大値　6　($x=3$)
　　 最小値　2　($x=1$)

(5)　最大値　11　($x=4$)
　　 最小値　3　($x=2$)



　下に凸のグラフの場合で考えると，
一般的に 2 次関数のグラフは軸に関して対称なので，**軸から遠くなるほど値が大きくなる**。
これより，最小値は定義域内に軸が



　含まれているとき　⇒　頂点で最小
　含まれていないとき　⇒　軸に最も近い点で最小
となる。また，最大値については，**軸から最も遠い点で最大**となる。

　上に凸のグラフの場合，最大と最小を逆にして考えればよい。

例題 14　次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めなさい。

(1)　$y = 3x^2 + 4x - 1$　　(2)　$y = -2x^2 + x$

練習 14　次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めなさい。

(1)　$y = x^2 - 2x - 3$　　(2)　$y = -2x^2 + 3x - 5$　　(3)　$y = -2x^2 + 6x + 1$　　(4)　$y = 3x^2 - 5x + 8$

例題 15　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めなさい。

(1)　$y = 2x^2 - 8x + 5 \ (0 \leqq x \leqq 3)$　　(2)　$y = -x^2 - 2x + 2 \ (-3 < x \leqq -2)$

練習 15　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めなさい。

(1)　$y = 2x^2 + 3x + 1 \ \left(-\frac{1}{2} \leqq x < \frac{1}{2}\right)$　　(2)　$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} \ (1 \leqq x \leqq 5)$

例題 16　定義域を $0 \leqq x \leqq 3$ とする関数 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$ の最大値が 9，最小値が 1 のとき，定数 a，b の値を求めなさい。

練習 16　定義域を $-1 \leqq x \leqq 2$ とする関数 $f(x) = ax^2 + 4ax + b$ の最大値が 5，最小値が 1 のとき，定数 a，b の値を求めなさい。

例 4　2 次関数 $y=x^2-2ax+a^2+1$　$(0\leqq x\leqq 2)$ について，

(1)　最小値を求めなさい。　　　　　　　　　　(2)　最大値を求めなさい。

a の値に応じて，**グラフが動きます**ので，最小値，最大値が 1 通りに決まりません。

つまり，**場合分けが必要**ということです。下に凸のグラフなので，最小値は軸から最も近い点に，

最大値は軸から最も遠い点に変化が生じたところで場合分けします。

$y=x^2-2ax+a^2+1=(x-a)^2+1$

(1)(ⅰ)　$a<0$ のとき

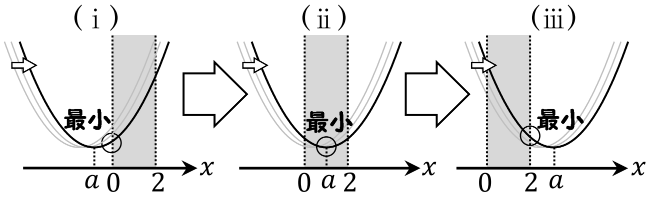
$x=0$ のとき最小値 a^2+1

(ⅱ)　$0\leqq a\leqq 2$ のとき

$x=a$ のとき最小値 1

(ⅲ)　$a>2$ のとき

$x=2$ のとき最小値 a^2-4a+5



(2)(ⅰ)　$a<1$ のとき

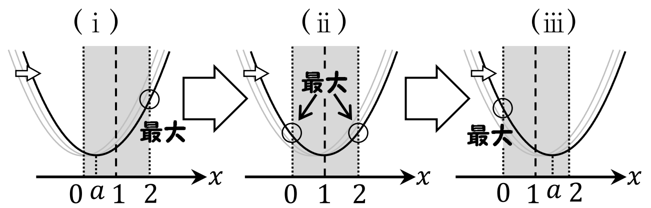
$x=2$ のとき最大値 a^2-4a+5

(ⅱ)　$a=1$ のとき

$x=0,\ 2$ のとき最大値 2

(ⅲ)　$a>1$ のとき

$x=0$ のとき最大値 a^2+1



例 5　a は正の定数とする。2 次関数 $y=x^2-2x+3$　$(0\leqq x\leqq a)$ について，

(1)　最小値を求めなさい。　　　　　　　　　　(2)　最大値を求めなさい。

今度は a の値に応じて**区間が動きます**。

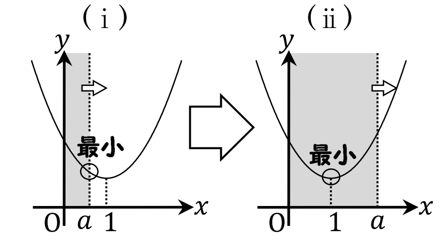
$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

(1)(ⅰ)　$0<a\leqq 1$ のとき

$x=a$ のとき最小値 a^2-2a+3

(ⅱ)　$a>1$ のとき

$x=1$ のとき最小値 2



(2)(ⅰ)　$0<a<2$ のとき

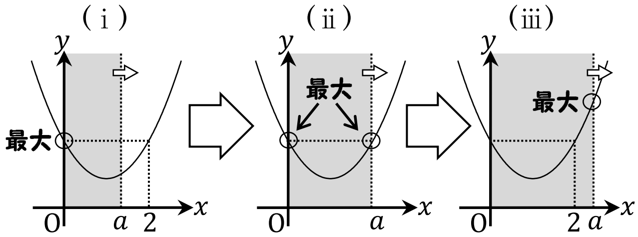
$x=0$ のとき最大値 3

(ⅱ)　$a=2$ のとき

$x=0,\ 2$ のとき最大値 3

(ⅲ)　$a>2$ のとき

$x=a$ のとき最大値 a^2-2a+3



例題 17　a は定数とする。$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3a$ について，次のものを求めなさい。

(1)　最大値　　　　　　　　　　　　　　(2)　最小値

練習 17　a は定数とし，関数 $y = x^2 + 2(a-1)x\ \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ について次のものを求めなさい。

(1)　最大値　　　　　　　　　　　　　　(2)　最小値

例題 18 (1)　関数 $y = -2x^2 + 8x + k\ \ (1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値が 4 であるように定数 k の値を定めなさい。また，このときの最小値を求めなさい。

(2)　関数 $y = x^2 - 2lx + l^2 - 2l\ \ (0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値が 11 になるような正の定数 l の値を求めなさい。

練習 18 (1)　2 次関数 $y = x^2 - x + k + 1$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値が 6 であるとき，定数 k の値を求めなさい。

(2)　関数 $y = -x^2 + 2lx - l^2 - 2l - 1\ \ (-1 \leqq x \leqq 0)$ の最大値が 0 になるような定数 l の値を求めなさい。

例題 19　a を正の定数とするとき，$0 \leqq x \leqq a$ における関数 $y = x^2 - 4x + 1$ の最大値，最小値を求めなさい。

練習 19　a を正の定数とするとき，$0 \leqq x \leqq a$ における関数 $y = -x^2 + 6x$ の最大値，最小値を求めなさい。

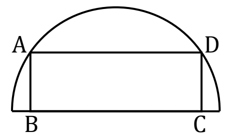
例題 20　a を定数とする。$a \leqq x \leqq a + 2$ における関数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ について，次のものを求めなさい。

(1)　最大値　　　　　　　　　　　　　　(2)　最小値

練習 20　a を定数とする。$a \leqq x \leqq a + 1$ における関数 $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$ について，次のものを求めなさい。

(1)　最大値　　　　　　　　　　　　　　(2)　最小値

例 6 図のように，半径 1 の半円の内部に，四角形 ABCD が内接している。
このとき，四角形の面積の最大値を求めなさい。



まず，どこかの長さを文字で置き，面積をその文字で表していきます。

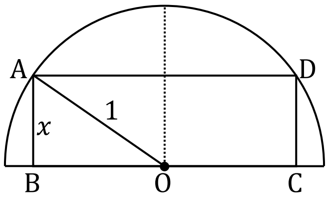
$\mathrm{AB} = x\ (0 < x < 1)$ とおくと，△ OAB において三平方の定理より，

$$x^2 + \mathrm{OB}^2 = 1 \iff \mathrm{OB}^2 = 1 - x^2$$

$\mathrm{OB} > 0$ より，$\mathrm{OB} = \sqrt{1 - x^2}$

よって，四角形の面積 S は，

$$S = \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} = x \cdot 2\sqrt{1 - x^2} = 2x\sqrt{1 - x^2} = 2\sqrt{x^2(1 - x^2)}$$



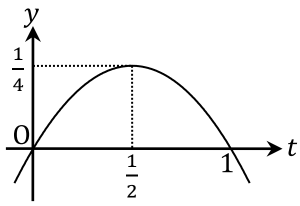
ここで，$\sqrt{\quad}$ の中の，$x^2(1 - x^2)$ の最大値を考える。

$x^2 = t$ とおくと，$x^2(1 - x^2) = t(1 - t)$

$0 < x < 1$ より，$0 < t < 1$

つまり，$y = t(1 - t)$ の $0 < t < 1$ における最大値を考える。

$$y = -t^2 + t = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$



よって，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{4}$ となる。

以上より，$t = \dfrac{1}{2}$ つまり $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，最大値 $S = 2\sqrt{\dfrac{1}{4}} = 1$

例 7 $f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$ について，次の各問いに答えなさい。

(1) $f(x,\ y)$ の最小値を求めなさい。

(2) $x + y = 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき，$f(x,\ y)$ の最大値，最小値を求めなさい。

(1)は $x,\ y$ の 2 変数の関数になります。2 変数を同時に動かそうとするのではなく，
1 文字を定数と見て式変形をすることがポイントです。

(1) y を固定して考える。

$$f(x,\ y) = (x - y)^2 + y^2 - 4y + 5$$

これより，$x = y$ のとき最小値 $y^2 - 4y + 5$

ここで，y を動かし，$y^2 - 4y + 5$ の最小値を考える。

$$y^2 - 4y + 5 = (y - 2)^2 + 1$$

これより，$y = 2$ のとき最小値 1

以上より，$f(x,\ y)$ の最小値は $x = y = 2$ のとき 1 となる。

(2)の x，y は，$x+y=1$ という関係式を満たしながら動くので**実質変数は１つ**になります。
条件式から x または y を消去するところから始めます。

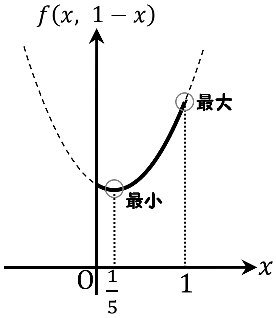
(2)　$y=1-x$ より，$f(x,\ y)$ から y を消去すると，

$$f(x,\ 1-x)=x^2-2x(1-x)+2(1-x)^2-4(1-x)+5$$
$$=5x^2-2x+3$$

$y=1-x \geqq 0$ より，$0 \leqq x \leqq 1$

よって，$f(x,\ 1-x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を考えればよい。

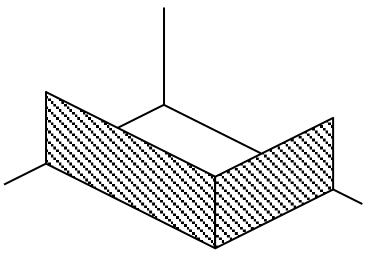
$$f(x,\ 1-x)=5x^2-2x+3=5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{5}$$



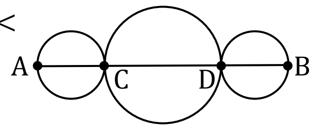
以上より，$x=\frac{1}{5}$，$y=\frac{4}{5}$ のとき最小値 $\frac{14}{5}$

$x=1$，$y=0$ のとき最大値 6

例題 21　長さ 6 m の金網を直角に折り曲げて，右図のように，直角な壁の隅のところに長方形の囲いを作ることにした。囲いの面積を最大にするには，金網をどのように折り曲げればよいですか。



練習 21　長さ 6 の線分 AB 上に，2 点 C，D を AC = BD となるようにとる。ただし，$0<$ AC <3 とする。線分 AC，CD，DB をそれぞれ直径とする 3 つの円の面積の和 S の最小値と，そのときの線分 AC の長さを求めなさい。



例題 22　直角を挟む 2 辺の長さの和が 20 である直角三角形において，斜辺の長さが最小の直角三角形を求め，その斜辺の長さを求めなさい。

練習 22　$\angle B=90°$，AB = 5，BC = 10 の△ABC がある。いま，点 P が頂点 B から出発して辺 AB 上を毎分 1 の速さで A まで進む。また，点 Q は P と同時に頂点 C から出発して辺 BC 上を毎分 2 の速さで B まで進む。このとき，2 点 P，Q 間の距離が最小になるときの P，Q 間の距離を求めなさい。

例題 23(1)　$x+2y=3$ のとき，$2x^2+y^2$ の最小値を求めなさい。

(2)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y=8$ のとき，xy の最大値と最小値を求めなさい。

練習 23(1)　$3x-y=2$ のとき，$2x^2-y^2$ の最大値を求めなさい。

(2)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+2y=1$ のとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めなさい。

例題 24　x，y が $x^2+2y^2=1$ を満たすとき，$\dfrac{1}{2}x+y^2$ の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めなさい。

練習 24　x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$2x^2+2y-1$ の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めなさい。

例題 25(1)　x，y の関数 $\mathrm{P}=x^2+3y^2+4x-6y+2$ の最小値を求めなさい。

(2)　x，y の関数 $\mathrm{Q}=x^2-2xy+2y^2-2y+4x+6$ の最小値を求めなさい。

なお，(1)，(2)では，最小値をとるときの x，y の値も示しなさい。

練習 25(1)　x，y の関数 $\mathrm{P}=2x^2+y^2-4x+10y-2$ の最小値を求めなさい。

(2)　x，y の関数 $\mathrm{Q}=x^2-6xy+10y^2-2x+2y+2$ の最小値を求めなさい。

なお，(1)，(2)では，最小値をとるときの x，y の値も示しなさい。

例題 26(1)　関数 $y=x^4-6x^2+10$ の最小値を求めなさい。

(2)　$-1\leqq x\leqq 1$ のとき，関数 $y=(x^2-2x-1)^2-6(x^2-2x-1)+5$ の最大値，最小値を求めなさい。

練習 26　次の関数の最大値，最小値を求めなさい。

(1)　$y=-2x^4-8x^2$　　　(2)　$y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$ $(1\leqq x\leqq 5)$

§4 2次方程式

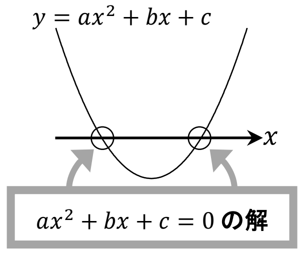
x の 2 次式で表された方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$を x の **2 次方程式**といい，これを満たす x の値を 2 次方程式の**解**という。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ と x 軸との共有点の y 座標は 0 なので，共有点の x 座標を求めるには，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解けばよい。

つまり，2 次方程式を解くということは

「2 次関数と x 軸との交点の x 座標を求める。」

ことと同じである。



○ 2 次方程式の解法

① 因数分解できるとき

積の性質

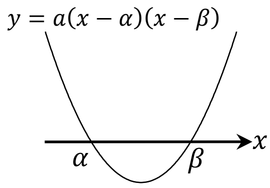
$$ab=0 \iff a=0 \text{ または } b=0$$

を用いる。例えば，$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

と因数分解できるとき，

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \iff x-\alpha=0 \text{ または } x-\beta=0$$
$$\iff x=\alpha \text{ または } x=\beta$$

となる。

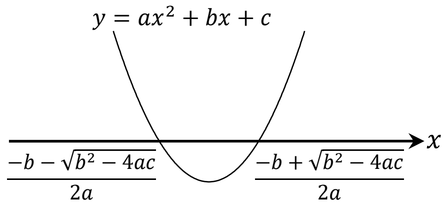


② 因数分解できないとき

解の公式を用いる。具体的には $a\neq 0$ のとき，

$$ax^2+bx+c=0 \iff \boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

となる。

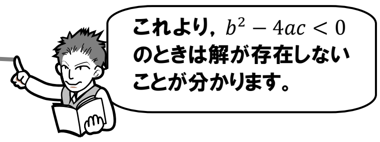


証明（中学の復習です）

$$ax^2+bx+c=0 \iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0$$
$$\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$b^2-4ac\geqq 0$ のとき，

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



b が偶数のときは…

$b=2b'$（b' は整数)とすると，

$$ax^2+2b'x+c=0 \iff x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b')^2-4ac}}{2a}=\boxed{\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}}$$

b が偶数のときは，こちらを使うと少し計算が楽になります。

必ず使えるようにしておきましょう。

例 8 次の 2 次方程式を解きなさい。

(1) $2x^2-3x+1=0$ (2) $-3x^2-x+1=0$ (3) $x^2-4x+1=0$

(4) $x^2-4x+4=0$ (5) $2x^2-4x+3=0$

(1) $2x^2-3x+1=0 \iff (2x-1)(x-1)=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$，1

(2) $-3x^2-x+1=0 \iff x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+12}}{-6}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$

(3) $x^2-4x+1=0 \iff x=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}$

(4) $x^2-4x+4=0 \iff (x-2)^2=0 \iff x=2$

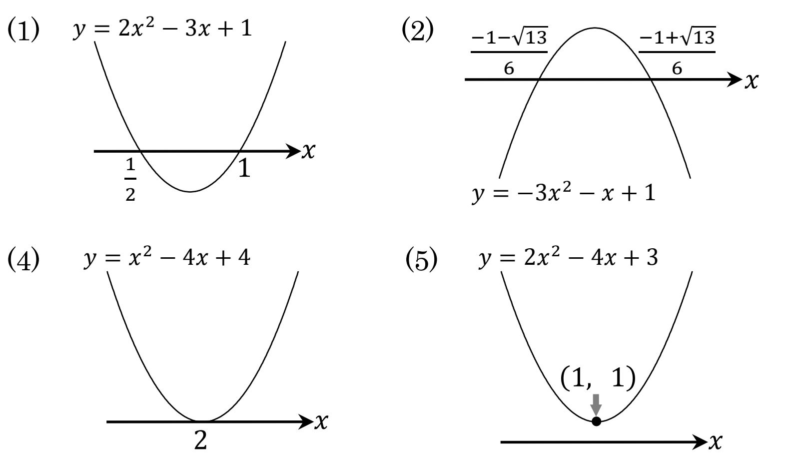
（解が 1 つになるとき，この解を**重解**という。）

(5) $2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1>0$ より，

$2x^2-4x+3=0$ を満たす x は存在しない。

よって，解なし。

（解の公式を用いると，$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}$ となる。
$\sqrt{\ }$ の中が負となるため解が存在しないことが分かる。）



例題 27 次の 2 次方程式を解きなさい。

(1) $(x+1)x=(x+1)(2x-1)$ (2) $8x^2-14x+3=0$ (3) $5x^2-7x+1=0$

(4) $24x-6x^2=10x^2+9$ (5) $2x-x^2=6(2x-1)$

練習 27 次の 2 次方程式を解きなさい。

(1) $2x(2x+1)=x(x+1)$ (2) $6x^2-x-1=0$ (3) $4x^2-12x+9=0$

(4) $5x=3(1-x^2)$ (5) $12x^2+7x-12=0$ (6) $x^2+14x-67=0$

例題 28 (1)　次の 2 次方程式を解きなさい。

（ア）　$-0.5x^2-\dfrac{3}{2}x+10=0$　　　（イ）　$\sqrt{2}x^2-5x+2\sqrt{2}=0$

(2)　方程式 $3(x+1)^2+5(x+1)-2=0$ を，おき換えを利用して解きなさい。

(3)　方程式 $x^2+x+|x-1|=5$ を解きなさい。

練習 28　次の方程式を解きなさい。

(1)　$\dfrac{x^2}{15}-\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{5}(x+1)$　　　(2)　$-\sqrt{3}x^2-2x+5\sqrt{3}=0$

(3)　$4(x-2)^2+10(x-2)+5=0$　　　(4)　$x^2-3x-|x-2|-2=0$

例題 29 (1)　2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が 2 と -4 であるとき，定数 a，b の値を求めなさい。

(2)　2 次方程式 $x^2+(a^2+a)x+a-1=0$ の 1 つの解が -3 であるとき，定数 a の値を求めなさい。また，そのときの他の解を求めなさい。

練習 29 (1)　2 次方程式 $3x^2+mx+n=0$ の解が 2 と $-\dfrac{1}{3}$ であるとき，定数 m，n の値を求めなさい。

(2)　$x=2$ が 2 次方程式 $mx^2-2x+3m^2=0$ の解であるとき，定数 m の値を求めなさい。また，そのときの他の解を求めなさい。

例題 30　次の連立方程式を求めなさい。

(1)　$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$　　　(2)　$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2+x-y=4 \end{cases}$

練習 30　次の連立方程式を求めなさい。

(1)　$\begin{cases} 3x-y+8=0 \\ x^2-y^2-4x-8=0 \end{cases}$　　　(2)　$\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0 \\ x^2-3x+2y^2+3y=9 \end{cases}$

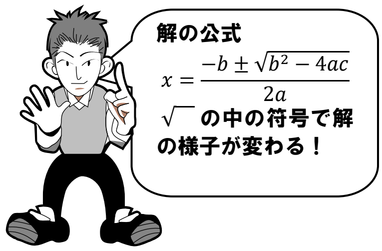
例題 31　a は定数とする。次の方程式を解きなさい。

(1)　$(a^2-2a)x=a-2$　　　(2)　$2ax^2-(6a^2-1)x-3a=0$

練習 31　a は定数とする。次の方程式を解きなさい。

(1)　$ax+2=x+a^2$　　　(2)　$(a^2-1)x^2-(a^2-a)x+1-a=0$

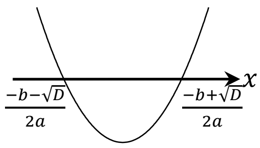
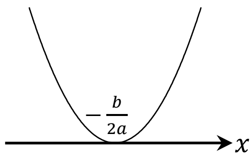
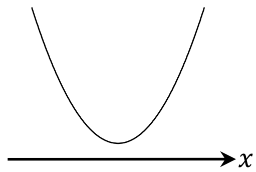
○　判別式



　p.17 の解の公式の証明を見ても分かるとおり，
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解を持つための条件は

$$b^2-4ac\geqq 0$$

である。特に $b^2-4ac=0$ のときは実数解をただ 1 つ(重解)持つ。
また， $b^2-4ac<0$ のときは実数解を持たない。
このように，2 次方程式は b^2-4ac の符号を調べることで，**解の個数を分類**することができる。
この b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**という。
　また，2 次方程式の解は，放物線と x 軸の交点の x 座標なので，**交点の個数を分類**することもできる。
普通，判別式は記号 D を用いて表す。

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の解	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ の 2 個	$x=-\dfrac{b}{2a}$ の 1 個 (重解)	解なし
$y=ax^2+bx+c$ と x 軸の交点 （$a>0$ のとき）	 交点 2 個	 交点 1 個 (接する)	 交点なし

例 9　2 次方程式 $x^2-6x+m=0$ が実数解を持つように，定数 m の値の範囲を定めなさい。

解①

この 2 次方程式の判別式を D とすると，
実数解を持つ条件は
$D\geqq 0\iff(-6)^2-4\cdot 1\cdot m\geqq 0\iff m\leqq 9$

1 次の係数が偶数のときは解の公式が

$$ax^2+2b'x+c=0\iff x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$$

となるので，判別式も簡略化できる。つまり，$(b')^2-ac$ の符号で解の個数を調べることができる。

$$(b')^2-ac=\frac{1}{4}(b^2-4ac)\ \ (\because b=2b')$$

なので，このときの判別式を $D/4$ と表す。

解②

この 2 次方程式の判別式を D とすると，
実数解を持つ条件は
$D/4\geqq 0\iff(-3)^2-m\geqq 0\iff m\leqq 9$

これを用いると計算が簡単になります。必ず使えるようにしておきましょう。

例 10　放物線 $y=x^2-6x+m$ が x 軸と共有点を持つように，定数 m の値の範囲を定めなさい。

聞いていることは違いますが，先程の例と同じ問題です。

解①

2 次方程式 $x^2-6x+m=0$ が実数解を持つ条件を考えればよい。

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

実数解を持つ条件は

$D/4 \geqq 0 \iff (-3)^2-m \geqq 0 \iff m \leqq 9$

判別式を使わなくても，頂点の位置に注目することで解くことができます。

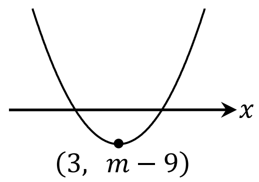
解②

$y=x^2-6x+m=(x-3)^2-9+m$

これより，頂点の座標は $(3,\ m-9)$

放物線が x 軸と共有点を持つには $(\text{頂点の}\ y\ \text{座標}) \leqq 0$ となればよいので，

$m-9 \leqq 0 \iff m \leqq 9$



例題 32(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を求めなさい。ただし，(イ)の k は定数とする。

(ア)　$x^2-3x+1=0$　　　　(イ)　$x^2+6x-2k+1=0$

(2)　x の 2 次方程式 $x^2+2mx+3m+10=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めなさい。また，そのときの方程式の解を求めなさい。

練習 32　m を定数とする。2 次方程式 $x^2+2(2-m)x+m=0$ について

(1)　$m=-1$，$m=3$ のときの実数解の個数を，それぞれ求めなさい。

(2)　重解をもつように m の値を定め，そのときの重解を求めなさい。

例題 33　次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めなさい。

(1)　x の方程式 $x^2-2ax+a^2+a-5=0$ が実数解をもつ。

(2)　x の方程式 $ax^2-(2a-3)x+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。

練習 33(1)　x の 2 次方程式 $x^2+(2k-1)x+(k-1)(k+3)=0$ が実数解を持つように，定数 k の値の範囲を定めなさい。

(2)　k を定数とする。x の方程式 $kx^2-4x+k+3=0$ がただ 1 つの実数解を持つような k の値を求めなさい。

例題 34　2 つの 2 次方程式 $2x^2+kx+4=0$，$x^2+x+k=0$ が共通の実数解をもつように定数 k の値を定め，その共通解を求めなさい。

練習 34　2 つの 2 次方程式 $x^2+6x+12k-24=0$ と $x^2+(k+3)x+12=0$ がただ 1 つの実数を共通解としてもつとき，実数の定数 k の値は $\boxed{}$ であり，そのときの共通解は $\boxed{}$ である。

例 11　放物線 $y=x^2-x+3$ と次の直線の共有点の座標を求めなさい。

(1)　$y=2x+1$　　　　(2)　$y=x+2$

(1)　2 式より y を消去すると，

$x^2-x+3=2x+1 \iff x^2-3x+2=0$

$\iff (x-1)(x-2)=0 \iff x=1,\ 2$

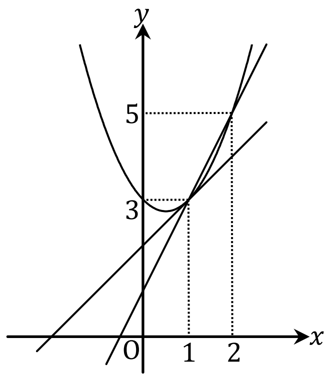
よって，共有点の座標は $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$

(2)　2 式より y を消去すると，

$x^2-x+3=x+2 \iff x^2-2x+1=0$

$\iff (x-1)^2=0 \iff x=1$

よって，共有点の座標は $(1,\ 3)$



(2)のように，直線と放物線を連立してできた**方程式が重解を持つとき**，その直線を放物線の**接線**という。
また，このときの共有点の座標 $(1,\ 3)$ を**接点**という。

例 12　放物線 $y=x^2$ の点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式を求めなさい。

点 $(1,\ 1)$ を通る直線は $y=a(x-1)+1$ とおける。

これと $y=x^2$ から y を消去すると，

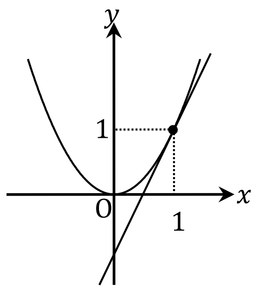
$x^2=a(x-1)+1 \iff x^2-ax+a-1=0$

この 2 次方程式が重解を持てばよいので，判別式を D とすると，

$D=0 \iff a^2-4(a-1)=0$

$\iff a^2-4a+4=0 \iff (a-2)^2=0 \iff a=2$

以上より接線の方程式は，$y=2x-1$



例題 35　次の(1)～(3)の 2 次関数のグラフは x 軸と共有点をもつか。もつ場合は，その座標を求めなさい。

(1)　$y=x^2-3x-4$　　(2)　$y=-x^2+4x-4$　　(3)　$y=3x^2-5x+4$

練習 35　次の 2 次関数のグラフは x 軸との共有点の有無を調べ，共有点があれば，その座標を求めなさい。

(1)　$y=-3x^2+6x-3$　　(2)　$y=2x^2-3x+4$　　(3)　$y=-x^2+4x-2$

例題 36　放物線 $y=x^2-4x+k$ と x 軸の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わりますか。

練習 36　2 次関数 $y=x^2-2x+2k-4$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わりますか。

例題 37　次の 2 次関数のグラフが x 軸に接するように，定数 k の値を定めなさい。また，そのときの接点の座標を求めなさい。

(1)　$y=x^2+2(2-k)x+k$　　　(2)　$y=kx^2+3kx+3-k$

練習 37　次の 2 次関数のグラフが x 軸に接するように，定数 k の値を定めなさい。また，そのときの接点の座標を求めなさい。

(1)　$y=-2x^2+kx-8$　　　(2)　$y=(k^2-1)x^2+2(k-1)x+2$

例題 38(1)　2 次関数 $y=-2x^2-3x+3$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めなさい。

(2)　放物線 $y=x^2-(k+2)x+2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが 4 であるとき, 定数 k の値を求めなさい。

練習 38(1)　2 次関数 $y=-3x^2-4x+2$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めなさい。

(2)　放物線 $y=x^2-ax+a-1$ が x 軸から切り取る線分の長さが 6 であるとき，定数 a の値を求めなさい。

例題 39　次の放物線と直線の共有点はありますか。あればその座標を求めなさい。

(1)　$y=x^2$,　$y=-x+2$　　　(2)　$y=-x^2+1$,　$y=4x+5$　　　(3)　$y=4x^2-6x+1$,　$y=2x-4$

練習 39　次の放物線と直線の共有点はありますか。あればその座標を求めなさい。

(1)　$\begin{cases} y=x^2-2x+3 \\ y=x+6 \end{cases}$　　　(2)　$\begin{cases} y=x^2-4x \\ y=2x-9 \end{cases}$　　　(3)　$\begin{cases} y=-x^2+4x-3 \\ y=2x \end{cases}$

例題 40(1)　放物線 $y=x^2+3x+a$ が直線$y=x+4$ と共有点をもつように，定数 a の値の範囲を定めなさい。

(2)　2 次関数 $y=-x^2$ のグラフと直線 $y=-2x+k$ の共有点の個数を調べなさい。ただし，k は定数とする。

練習 40(1)　関数 $y=x^2+ax+a$ のグラフが直線 $y=x+1$ と接するように，定数 a の値を定めなさい。また，そのときの接点の座標を求めなさい。

(2)　k は定数とする。関数 $y=x^2-2kx$ のグラフと直線 $y=2x-k^2$ の共有点の個数を調べなさい。

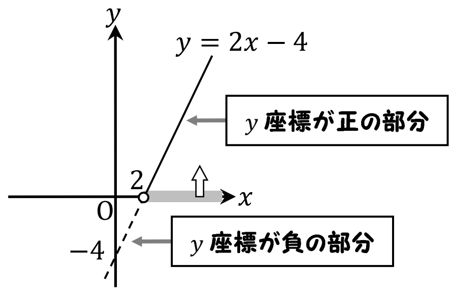
§5　2 次不等式

まず，1 次不等式の解法について考えていきましょう。

例 13　1 次不等式 $2x-4>0$ を解きなさい。

答えは『$2x-4>0 \iff x>2$』で問題ないでしょう。ここではグラフを用いて解をとらえていきます。

直線 $y=2x-4$ を考えると，
不等式 $2x-4>0$ は直線上の点において，
『y 座標が正となる部分』を考えるということである。
グラフより，このような x 座標の範囲は $x>2$ となる。



このように不等式の問題はグラフの大小関係に注目することで解くことができます。
では次に，2 次不等式について考えましょう。

例 14　2 次不等式 $x^2-3x+2>0$ を解きなさい。

まずは普通に解いていきます。

解①

$x^2-3x+2>0 \iff (x-1)(x-2)>0$

2 数の積が正になるのは，2 数がともに正か，ともに負のどちらかである。
よって，求める x の範囲は

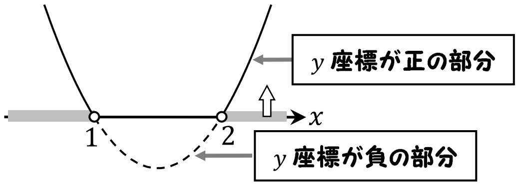
$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} x-1<0 \\ x-2<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<1 \\ x<2 \end{cases} \text{または} \begin{cases} x>1 \\ x>2 \end{cases}$$

$$\iff x<1 \quad \text{または} \quad x>2$$

次にグラフを用いて解いてみます。

解②

$y=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ より，グラフは右図。
不等式 $x^2-3x+2>0$ は放物線上の点において，
『y 座標が正となる部分』を考えるということである。
グラフより，このような x 座標の範囲は，
$x<1$ または $x>2$ となる。



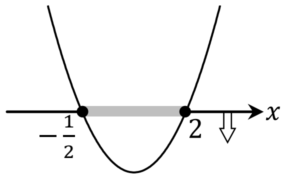
2 つの解答を比べると，解②の方がグラフをかくだけで解けるので楽です。
今後，2 次不等式を解く際には**グラフを用いて解く**ことにします。

例 15　次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$2x^2-3x-2 \leqq 0$　　(2)　$x^2+2x+2 \geqq 0$　　(3)　$x^2+2x+2 \leqq 0$

(1)　$y=2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)$ のグラフは右のようになる。

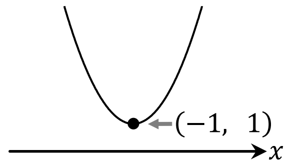
よって，$2x^2-3x-2 \leqq 0$ の解は $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2$



(2)　$y=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ のグラフは右のようになる。

よって，$x^2+2x+2 \geqq 0$ の解は，すべての実数。

(3)　グラフより，解なし。



グラフが接しているときは少々面倒です。

例 16　$f(x)=x^2-4x+4$ のとき，次の不等式を解きなさい。

(1)　$f(x) \geqq 0$　　(2)　$f(x)>0$　　(3)　$f(x) \leqq 0$　　(4)　$f(x)<0$

$y=x^2-4x+4=(x-2)^2$ のグラフは右のようになる。

これより，

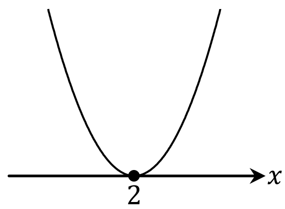
(1)　$f(x) \geqq 0$　・　　　　・$x=2$

(2)　$f(x)>0$　・　　　　・解なし

(3)　$f(x) \leqq 0$　・　　　　・全ての実数

(4)　$f(x)<0$　・　　　　・$x<2$，$x>2$

線で結びましょう。



例題 41　次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x(x-3)<0$　　(2)　$3x^2+20x-7 \geqq 0$　　(3)　$2x^2-x-4>0$

(4)　$2-x>x^2$　　(5)　$-x^2+2x+5 \geqq 0$

練習 41　次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x^2-x-6<0$　　(2)　$6x^2-x-2 \geqq 0$　　(3)　$3(x^2+4x)>-11$

(4)　$-2x^2+5x+1 \geqq 0$　　(5)　$5x>3(4x^2-1)$　　(6)　$-x^2+2x+\dfrac{1}{3} \geqq 0$

例題 42　次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x^2+2x+1>0$　　(2)　$x^2-4x+5>0$　　(3)　$4x \geqq 4x^2+1$　　(4)　$-3x^2+8x-6>0$

練習 42　次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x^2+4x+4 \geqq 0$　　(2)　$2x^2+4x+3<0$　　(3)　$-4x^2+12x-9 \geqq 0$　　(4)　$9x^2-6x+2>0$

例題 43　次の不等式を解きなさい。

(1)　$\begin{cases} 2x^2-5x-3<0 \\ 3x^2-4x-4 \leqq 0 \end{cases}$　　(2)　$2-3x-2x^2 \leqq 4x-2<x^2$

練習 43　次の不等式を解きなさい。

(1)　$\begin{cases} 6x^2-7x-3>0 \\ 15x^2-2x-8 \leqq 0 \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} x^2-6x+5 \leqq 0 \\ -3x^2+11x-6 \geqq 0 \end{cases}$　　(3)　$2x+4>x^2>x+2$

例題 44　不等式 $|x^2-2x-3| \geqq 3-x$ を解きなさい。

練習 44　次の不等式を解きなさい。

(1)　$7-x^2>|2x-4|$　　(2)　$|x^2-6x-7| \geqq 2x+2$　　(3)　$|2x^2-3x-5|<x+1$

例題 45　次の不等式を解きなさい。ただし，a は定数とする。

(1)　$x^2+(2-a)x-2a \leqq 0$　　(2)　$ax^2 \leqq ax$

練習 45　次の不等式を解きなさい。ただし，a は定数とする。

(1)　$x^2-ax \leqq 5(a-x)$　　(2)　$ax^2>x$　　(3)　$x^2-a(a+1)x+a^3<0$

例題 46　x についての不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$，$3x^2+2x-1>0$ を同時に満たす整数 x がちょうど 3 つ存在するような定数 a の値の範囲を求めなさい。

練習 46　x についての 2 つの 2 次不等式 $x^2-2x-8<0$，$x^2+(a-3)x-3a \geqq 0$ を同時に満たす整数がただ 1 つ存在するように，定数 a の値の範囲を定めなさい。

例題 47　次の事柄が成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい。

(1)　2 次不等式 $ax^2+bx+3>0$ の解が $-1<x<3$ である。

(2)　2 次不等式 $ax^2+bx-24 \geqq 0$ の解が $x \leqq -2$，$4 \leqq x$ である。

練習 47　次の事柄が成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい。

(1)　2 次不等式 $ax^2+8x+b<0$ の解が $-3<x<1$ である。

(2)　2 次不等式 $2ax^2+2bx+1 \leqq 0$ の解が $x \leqq -\dfrac{1}{2}$，$3 \leqq x$ である。

例題 48 (1)　2 次方程式 $2x^2-kx+k+1=0$ が実数解をもたないような，定数 k の値の範囲を求めなさい。

(2)　x の方程式 $mx^2+(m-3)x+1=0$ の実数解の個数を求めなさい。

練習 48 (1)　2 次方程式 $x^2-(k+1)x+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような，定数 k の値の範囲を求めなさい。

(2)　x の方程式 $(m+1)x^2+2(m-1)x+2m-5=0$ の実数解の個数を求めなさい。

例題 49　2 つの 2 次方程式 $ax^2-4x+a=0$，$x^2-ax+a^2-3a=0$ について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲をそれぞれ求めなさい。

(1)　2 つの方程式がともに実数解をもつ。

(2)　少なくとも一方の方程式が実数解をもつ。

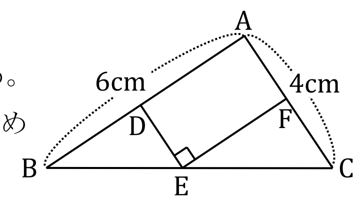
練習 49　2 つの 2 次方程式 $x^2-x+a=0$，$x^2+2ax-3a+4=0$ について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲をそれぞれ求めなさい。

(1)　両方とも実数解をもつ。　　(2)　少なくとも一方の方程式が実数解をもたない。

(3)　一方だけが実数解をもつ。

例題 50　立方体 A がある。A を縦に 1 cm 縮め，横に 2 cm 縮め，高さを 4 cm 伸ばし直方体 B を作る。また，A を縦に 1 cm 伸ばし，横に 2 cm 伸ばし，高さを 2 cm 縮めた直方体 C を作る。A の体積が，B の体積より大きいが C の体積より大きくならないとき，A の 1 辺の長さの範囲を求めなさい。

練習 50　図のような，直角三角形 ABC の各辺上に頂点をもつ長方形 ADEF を作る。長方形の面積が 3 m² 以上 5 m² 未満になるときの辺 DE の長さの範囲を求めなさい。



例題 51　実数 x，y が $x^2+y^2=2$ を満たすとき，$2x+y$ のとりうる値の最大値と最小値を求めなさい。また，そのときの x，y の値を求めなさい。

練習 51　実数 x，y が $x^2-2xy+2y^2=2$ を満たすとき

(1)　x のとりうる値の最大値と最小値を求めなさい。

(2)　$2x+y$ のとりうる値の最大値と最小値を求めなさい。

○　絶対不等式

任意の x で成立している不等式を**絶対不等式**という。ここでは，与えられた 2 次不等式が絶対不等式となる条件を求める。

例 17　不等式 $x^2-2(k+1)x+3k+3>0$ がすべての実数 x について成り立つような，定数 k の値の範囲を求めなさい。

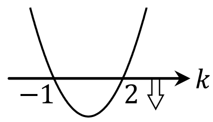
2 次関数 $y=x^2-2(k+1)x+3k+3$ がどのようなグラフになればよいかを考えればよいでしょう。

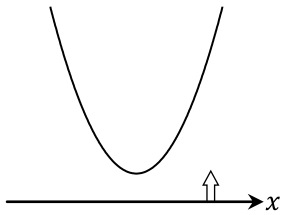
解①

$x^2-2(k+1)x+3k+3=0$ の判別式を D とすると，

2 次の係数が正より，$D<0$ となればよい。

$$\begin{aligned} D/4<0 &\iff (k+1)^2-(3k+3)<0 \\ &\iff k^2+2k+1-3k-3<0 \\ &\iff k^2-k-2<0 \\ &\iff (k+1)(k-2)<0 \\ &\iff -1<k<2 \end{aligned}$$





2 次関数 $y=x^2-2(k+1)x+3k+3$ の最小値に注目すること解くこともできます。

解②

$y=x^2-2(k+1)x+3k+3$ の最小値を求める。

$$y=x^2-2(k+1)x+3k+3=\{x-(k+1)\}^2-k^2+k+2$$

これより，$x=k+1$ のとき，最小値 $-k^2+k+2$

(最小値) >0 となればよいので，求める k の範囲は

$$-k^2+k+2>0 \iff -1<k<2$$

例題 52(1)　すべての実数 x に対して，2 次不等式 $x^2+(k+3)x-k>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めなさい。

(2)　任意の実数 x に対して，不等式 $ax^2-2\sqrt{3}x+a+2\leqq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めなさい。

練習 52(1)　不等式 $x^2-2x\geqq kx-4$ の解がすべての実数であるような定数 k の値の範囲を求めなさい。

(2)　すべての実数 x に対して，不等式 $a(x^2+x-1)<x^2+x$ が成り立つような，定数 a の値の範囲を求めなさい。

例題 53　$0\leqq x\leqq 8$ のすべての x の値に対して，不等式 $x^2-2mx+m+6>0$ が成り立つような定数 m の値の範囲を求めなさい。

練習 53　a は定数とし，$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とする。$0\leqq x\leqq 3$ のすべての x の値に対して，常に $f(x)>0$ が成り立つような a の値の範囲を求めなさい。

○　解の配置の問題

例 18　2 次方程式 $x^2-2kx+3k-2=0$ が異なる 2 つの正の解を持つような k の値の範囲を求めなさい。

まずは問題の通り，2 次方程式として解いてみます。

解①

$x^2-2kx+3k-2=0$ の判別式を D とすると，異なる 2 解を持つ条件は

$$D>0 \iff k^2-3k+2>0 \iff (k-1)(k-2)>0 \iff k<1,\ k>2 \quad \cdots①$$

このとき，解は，$x=k\pm\sqrt{k^2-3k+2}$

$k-\sqrt{k^2-3k+2}<k+\sqrt{k^2-3k+2}$ より 2 解がともに正となるには,

$$k-\sqrt{k^2-3k+2}>0 \iff k>\sqrt{k^2-3k+2}$$

$k<0$ のとき，$(\text{左辺})<0$, $(\text{右辺})>0$ より，成り立たない。

よって，$k\geqq 0$ $\cdots②$ のときを考える。

両辺正より，2 乗すると,

$$k^2>k^2-3k+2 \iff 3k-2>0 \iff k>\frac{2}{3} \quad \cdots③$$

①，②，③より，$\dfrac{2}{3}<k<1,\ k>2$

次に 2 次関数と x 軸の交点の位置に注目して問題を解いてみます。

解②

$f(x)=x^2-2kx+3k-2$ とおく。

2 次関数 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わるように k の値を求める。

$x^2-2kx+3k-2=0$ の判別式を D とすると，異なる 2 点で交わる条件は

$$\begin{aligned} D>0 &\iff k^2-3k+2>0 \\ &\iff (k-1)(k-2)>0 \\ &\iff k<1,\ k>2 \quad \cdots① \end{aligned}$$

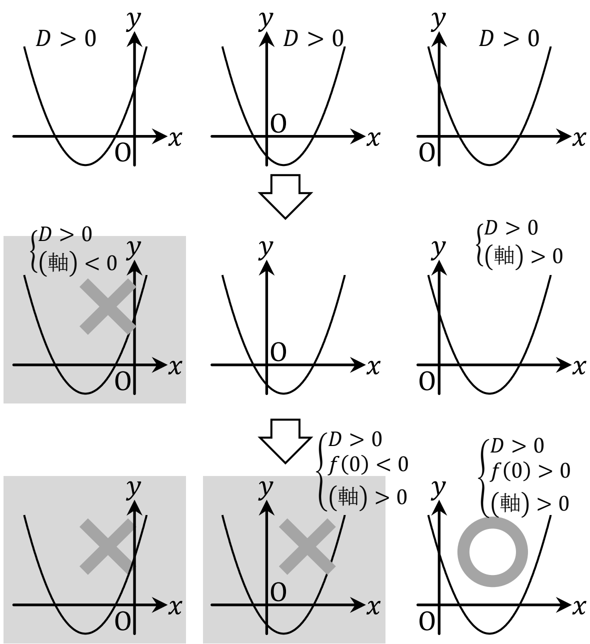
次に，軸 $(x=k)$ の位置に注目すると，異なる 2 つの正の解を持つには,

$$k>0 \quad \cdots②$$

最後に，y 切片に注目すると，異なる 2 つの正の解を持つには

$$\begin{aligned} f(0)>0 &\iff 3k-2>0 \\ &\iff k>\frac{2}{3} \quad \cdots③ \end{aligned}$$

①，②，③より，$\dfrac{2}{3}<k<1,\ k>2$



一般的に，2 次方程式の解の配置の問題は，グラフを用いて解くようにした方が，条件を視覚的にとらえることができるので解きやすくなるはずです。なお，グラフを用いて解く場合，以下の 3 つの条件に注目するとよいでしょう。

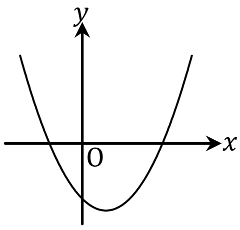
① 判別式　　② 軸の位置　　③ 境界条件（例 18 の場合 $f(0)$）

例 19　2 次方程式 $x^2-2kx+3k-2=0$ が正の解と負の解を持つような k の値の範囲を求めなさい。

グラフを用いて条件を考えていきましょう。

$f(x)=x^2-2kx+3k-2$ とおく。
$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。
このとき，求める条件は

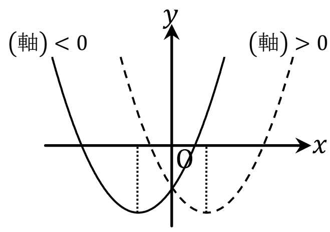
$$f(0)<0 \iff 3k-2<0 \iff k<\frac{2}{3}$$



なぜ判別式，軸の条件は不要なの？

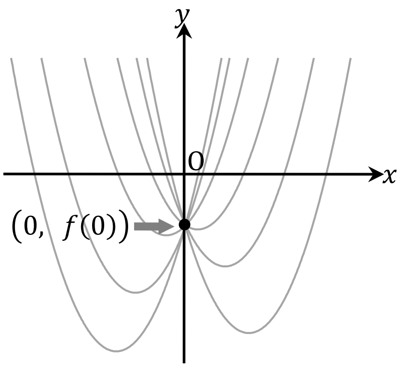
軸の条件について

右図を見ても分かるとおり，**正の場合も負の場合も考えられる**ので，条件を指定することはできません。
よって，不要です。



判別式について

右図を見ても分かる通り，$f(0)<0$ を満たすような点 $(0,\ f(0))$ を通る放物線は，必ず x 軸と 2 点で交わります。
つまり，$f(0)<0$ さえ言えば，その時点で放物線はすでに x 軸と交わるというわけです。つまり，判別式は不要です。



ちなみに，判別式をとってみると，

$$D>0 \iff k<1,\ k>2 \quad \cdots ①$$

$$f(0)<0 \iff k<\frac{2}{3} \quad \cdots ② \qquad ①，②より，k<\frac{2}{3}$$

となり，答えは変わりません。
つまり，判別式をとっても構わないのですが，不要なものはかかない方がよいでしょう。

例題 54　2 次関数 $y=x^2-mx+m^2-3m$ のグラフが次の条件を満たすとき, 定数 m の値の範囲を求めなさい。

(1)　x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わる。

(2)　x 軸の正の部分と負の部分で交わる。

練習 54　2 次関数 $y=-x^2+(m-10)x-m-14$ のグラフが次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めなさい。

(1)　x 軸の正の部分と負の部分で交わる。

(2)　x 軸の負の部分とのみ共有点をもつ。

例題 55　2 次関数 $y=x^2-(a+3)x+a^2$ のグラフが次の条件を満たすように, 定数 a の値の範囲を定めなさい。

(1)　x 軸の $x>1$ の部分と，異なる 2 点で交わる。

(2)　x 軸の $x>1$ の部分と $x<1$ の部分で交わる。

練習 55　2 次方程式 $2x^2+ax+a=0$ が次の条件を満たす解をもつように，定数 a の値の範囲を定めなさい。

(1)　ともに 1 より小さい異なる 2 つの解をもつ。

(2)　3 より大きい解と 3 より小さい解をもつ。

例題 56　2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が, $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めなさい。

練習 56　2 次方程式 $2x^2-ax+a-1=0$ が，$-1<x<1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めなさい。

例題 57　2 次方程式 $ax^2-(a+1)x-a-3=0$ が，$-1<x<0$，$1<x<2$ の範囲でそれぞれ 1 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めなさい。

練習 57　2 次方程式 $ax^2-2(a-5)x+3a-15=0$ が，$-5<x<0$，$1<x<2$ の範囲でそれぞれ 1 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定なさい。

例題 58　方程式 $x^2+(2-a)x+4-2a=0$ が $-1<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めなさい。

練習 58　方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$ が $-2<x<0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めなさい。

例題 59　2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+2ax+25$，$g(x)=-x^2+4ax-25$ がある。次の条件が成り立つような定数 a の値の範囲を求めなさい。

(1)　すべての実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つ。

(2)　ある実数 x に対して $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

練習 59　2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+2kx+2$，$g(x)=3x^2+4x+3$ がある。次の条件が成り立つような定数 k の値の範囲を求めなさい。

(1)　すべての実数 x に対して $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

(2)　ある実数 x に対して $f(x)>g(x)$ が成り立つ。

例題 60　$f(x)=x^2-2x+3$，$g(x)=-x^2+6x+a^2+a-9$ がある。次の条件が成り立つような定数 a の値の範囲を求めなさい。

(1)　$0\leqq x\leqq 4$ を満たすすべての実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

(2)　$0\leqq x\leqq 4$ を満たすある実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

練習 60　$f(x)=x^2+2x+a^2+14a-3$，$g(x)=x^2+12x$ がある。次の条件が成り立つような定数 a の値の範囲を求めなさい。

(1)　$-2\leqq x\leqq 2$ を満たすすべての実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)\geqq g(x_2)$ が成り立つ。

(2)　$-2\leqq x\leqq 2$ を満たすある実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)\geqq g(x_2)$ が成り立つ。